Übungsblatt 1

Diskussion des Blattes: Do., 13.10.2022

1. Sei $\Omega = (0,1)$ und seien $b,\ c,\ f \in C^1(\overline{\Omega})$. Sei $g \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie

$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u(0) = 0, \quad u'(1) = g.$$

a) Formulieren Sie eine Variationsformulierung für dieses Problem basierend auf dem Raum[1] $X := \{u \in C^1(\overline{\Omega}) \,|\, u(0) = 0\}$. Können Sie sich noch andere Variationsformulierungen vorstellen?

b) (optional) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap X$ eine Lösung ihrer Variationsformulierung. Zeigen Sie, daß es dann eine klassische Lösung des obigen Randwertproblems ist.

2. (stark monotone Operatoren) Sei V ein Hilbertraum und $\mathbf{B} : V \to V'$ lipschitzstetig und stark monoton, d.h.

$$\|\mathbf{B}u - \mathbf{B}v\|_{V'} \leq L\|u - v\|_V \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{B}u - \mathbf{B}v, u - v\rangle_{V' \times V} \geq \alpha \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V$$

für Konstanten L, $\alpha > 0$, die nur von $\mathbf{B}$ abhängen. Zeigen Sie: $\mathbf{B}$ is eine Bijektion. *Hinweis:* Monotonie für Injektivität. Für Surjektivität betrachten Sie wie im Beweis des Satz von Lax-Milgram der VO die Abbildung $\Phi(u) := u - \rho i^{-1}(\mathbf{B}u - l)$ und zeigen Sie, daß für geeignetes ρ der Banachsche Fixpunktsatz anwendbar ist.

3. Sei B eine koerzive und symmetrische Bilinearform auf dem Hilbertraum V und $l \in V'$. Sei $u \in V$ Lösung von $B(u,v) = l(v)$ für alle $v \in V$. Sei $V_N \subset V$ mit $\dim V_N = N$ und Basis $\{\varphi_i \,|\, i = 1, \ldots, N\}$. Sei $u_N \in V_N$ die Galerkinapproximation an u.

a) Zeigen Sie: Es gilt für den Energienormfehler

$$\|u - u_N\|_E^2 := B(u - u_N, u - u_N) = B(u,u) - B(u_N, u_N) = \|u\|_E^2 - \|u_N\|_E^2.$$

b) Seien $\mathbf{B} = (B(\varphi_j, \varphi_i))_{i,j=1}^N$ die Steifigkeitsmatrix und $\mathbf{l} = (l(\varphi_i))_{i=1}^N$ der Lastvektor und $\mathbf{u}$ der Vektor der Darstellung von u_N in der Basis $(\varphi_i)_{i=1}^N$. Zeigen Sie:

$$B(u_N, u_N) = \mathbf{u}^\top \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{u}^\top \mathbf{l}.$$

4. **a)** Schreiben Sie ein Matlab-Programm, das für beliebiges Gitter und stückweise lineare Ansatzfunktionen die Steifigkeitsmatrix und den Lastvektor für das Problem

$$-u'' + ku = f \quad \text{auf } \Omega = (-1,1), \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

assembliert. Hier ist f eine Funktion und $k \in \mathbb{R}$. Für die Quadratur des Lastvektors können Sie die Mittelpunktsregel ("1-Punkt Gaußquadratur") verwenden. Nutzen Sie beim Erstellen der Steifigkeitsmatrix aus, daß diese dünn besetzt ("sparse") ist.

[1] eigentlich müßte man den Sobolevraum $H^1_{(0}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \,|\, u(0) = 0\}$ verwenden

b) Geben Sie für $k = 0$ und $f \equiv 1$ die exakte Lösung u an. Bestimmen Sie die "Energie" $\|u\|_E^2 := B(u, u)$.

c) Bestimmen Sie für $k = 0$, $f \equiv 1$ und uniforme Gitter (mit Gitterweite h) mit Ihrem Programm den Energienormfehler der FE-Approximation, d.h. bestimmen Sie

$$\|u - u_N\|_E = \sqrt{B(u - u_N, u - u_N)}.$$

Plotten Sie (`loglog`) den Energienormfehler gegen h für verschiedene Werte von h. Welche Konvergenz beobachten Sie?