# Kapitel 3

# Sobolevräume

Sobolevräume sind Funktionenräume, in denen die Ableitungen in einem $L^p$-Sinn noch definiert sind, d.h. der Ableitungsbegriff wird erweitert. Historisch gesehen gab es sehr viele verschiedene Definitionen, die sich aber schließlich als äquivalent erwiesen. Diese verschiedenen Zugänge kann man noch heute an der Verwendung verschiedener Schreibweisen erkennen (z.B. die austauschbare Verwendung der Bezeichnungen $H^k(\Omega)$ und $W^{k,2}(\Omega)$).

## 3.1 Sobolevräume und schwache Ableitungen

Der Begriff der schwachen Ableitung ist über partielle Integration definiert — ein Nebenprodukt ist, daß sich die Formeln für die partielle Integration auch auf Sobolevfunktionen übertragen.

Für Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und glatte Funktionen $\varphi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet

$$D^\alpha \varphi \quad \text{die Ableitung} \quad \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_n}} \varphi.$$

**Definition 3.1 (schwache Ableitung)** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Dann heißt eine Funktion $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ die* $\alpha$-te schwache Ableitung *von $u$, falls*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int v_\alpha \varphi \quad \textit{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Falls die schwache Ableitung existiert, so ist sie eindeutig (Übung). Insbesondere ist der Begriff der schwachen Ableitung eine Verallgemeinerung des klassischen Ableitungsbegriffs:

**Problem 3.2** *Sei $u \in C^k(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. dann existiert für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le k$ die $\alpha$-te schwache Ableitung $v_\alpha$ der Funktion $u$ und ist gegeben durch $v_\alpha = D^\alpha u$.*

**Beweis:** Übung. ■

Weil für klassisch differenzierbare Funktionen der klassische Ableitungsbegriff und der Begriff der schwachen Ableitung übereinstimmen, entsteht keine Verwechslungsgefahr, wenn wir $D^\alpha u$ für die $\alpha$-te schwache Ableitung schreiben.

Existieren zu einer Funktion $u$ alle schwachen Ableitungen bis zur Ordnung $k$ und falls alle diese Ableitungen in $L^2$ sind, so ist $u$ ein Element des Sobolevraums $H^k$:

**Definition 3.3 (Sobolevraum $H^k$)** *Für $k \in \mathbb{N}_0$ heißt der lineare Raum*

$$H^k(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega) \textit{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \le k\} \tag{3.1}$$

Sobolevraum $H^k(\Omega)$. *Er wird mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx$$

*versehen. Die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm wird geschrieben als*

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{H^k(\Omega)}} = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

*Wir führen auf $H^k(\Omega)$ noch folgende Seminorm ein:*

$$|u|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

**Proposition 3.4** *$(H^k(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^k(\Omega)})$ ist ein Hilbertraum.*

**Beweis:** Übung. Es reicht, die Vollständigkeit zu zeigen, wofür man die Vollständigkeit von $L^2$ verwendet. ■

Diese Art, den Ableitungsbegriff zu erweitern, ist nicht die einzig mögliche. Naheliegend ist auch, den Raum $C^\infty(\Omega)$ (oder $C^k(\Omega)$) unter der Norm $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ abzuschließen, d.h. zu definieren

$$H^k(\Omega) := \overline{\left\{u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{H^k(\Omega)} < \infty\right\}}^{\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}}. \tag{3.2}$$

Es stellt sich heraus, daß diese Definition äquivalent zu Definition 3.3 ist.

**Satz 3.5** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt: Die Menge*

$$\left\{u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{H^k(\Omega)} < \infty\right\}$$

*ist dicht in $H^k(\Omega)$. Für $k = 0$ gilt außerdem: $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.*

**Beweis:** Die Inklusion

$$\left\{u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{H^k(\Omega)} < \infty\right\} \subset H^k(\Omega)$$

wurde schon in Proposition 3.2 gezeigt. Die Dichtheitsaussage geht auf ein Paper von Meyers & Serrin „$W = H$“, 1964, zurück [1] ■

**Definition 3.6** *Wir definieren*

$$H_0^k(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}}.$$

*$H_0^k(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.*

**Satz 3.7 (1. Poincarésche Ungleichung)** *Sei $\Omega$ ein beschränktes Gebiet. Dann gibt es eine Konstante $C_\Omega$, so daß*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega |u|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega).$$

**Beweis:** Übung. Überlegen Sie sich zudem, daß die Beschränktheit von $\Omega$ abgeschwächt werden kann zur Existenz eines Halbraumes $H \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega \subset H$. ■

Insbesondere ist damit $H_0^1(\Omega)$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle u, v\rangle = \int \nabla u \nabla v$ wieder ein Hilbertraum.

**Bemerkung 3.8** Eine weitere, naheliegende Erweiterung des Ableitungsbegriffs wäre, klassische Differenzierbarkeit fast überall zu fordern. Solche Konzepte erweisen sich als unpraktisch im Kontext von PDEs: Es gibt Funktionen $u$, die fast überall differenzierbar sind, für die $u' = 0$ f.ü. gilt, die aber trotzdem nicht nicht konstant sind (Bsp.: die Heavisidefunktion). Ein Ableitungsbegriff, der solche Funktionen zuläßt, stellt sich als unpraktisch heraus, denn dann kann man nicht mehr aus $u' = 0$ schließen, daß $u = const$ gilt. □

finis 5.Stunde

finis 6.Stunde

[1] Historische Anmerkung: Ursprünglich wurde der Raum $H^k(\Omega)$ durch die Abschlußbildung in (3.2) definiert; der in (3.1) mittels der Existenz von schwachen Ableitungen definierte Raum wird als $W^{k,2}(\Omega)$ bezeichnet. Aufgrund des Papers von Meyers & Serrin sind die beiden Räume jedoch identisch, weshalb wir hier nicht notationell unterscheiden

## 3.2 Lipschitzgebiete und Sobolevräume auf Lipschitzgebieten

Wenn Bedingungen an $\Omega$ gestellt werden, kann Satz 3.5 verschärft werden. Hierzu führt man den Begriff des Lipschitzgebietes ein.

**Definition 3.9 (Lipschitzfunktion)** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt* lipschitzstetig*, falls es eine Konstante $L > 0$ gibt mit*

$$\begin{cases} \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L\|x - y\| & \text{für alle } x, z \in \Omega \\ \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq L \end{cases}$$

*Für lipschitzstetige Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}^n$ definieren wir die Norm*

$$\|\varphi\|_{C^{0,1}(\Omega,\mathbb{R}^m)} := \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)} + \sup_{x,y\in\Omega} \frac{\|\varphi(x) - \varphi(y)\|}{\|x - y\|}.$$

*Der Raum der lipschitzstetigen Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}^m$ wird mit $C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ bezeichnet.*

**Bemerkung 3.10** Die Abhängigkeit der Wahl der Norm auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ haben wir unterdrückt — da in endlichdimendionalen Räumen alle Normen äquivalent sind, ändert sich höchstens $L$. □

**Satz 3.11** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dann ist $\varphi$ stetig, beschränkt und fast überall klassisch differenzierbar.*

**Beweis:** stetig, beschränkt ist klar. Differenzierbarkeit fast überall folgt aus Rademachers Satz. ■

Eine sehr große Klasse von Gebieten ist das der Lipschitzgebiete. Es umfaßt insbesondere Polygone (in 2D) und die meisten Typen von Polyedern (in 3D). Die wesentliche Eigenschaft eines Lipschitzgebietes ist, daß es "lokal unterhalb eines Lipschitzgraphen" ist. Die folgende Definition macht dies präzise:

**Definition 3.12 (Lipschitzgebiet)** *Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat einen* Lipschitzrand*, falls es $\alpha$, $\beta$, $\beta' > 0$ sowie $R \in \mathbb{N}$ kartesische Koordinatensysteme $(\mathbf{b}^r, \mathbf{e}_1^r, \ldots, \mathbf{e}_n^r)$ gibt* [2] *und $R$ lipschitzstetige Abbildungen $a_r : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ gibt, so daß folgendes gilt (vgl. Fig. 3.1):*

*(i) <u>Überdeckung von $\partial\Omega$:</u> Die offenen Mengen $U_r$, $r = 1, \ldots, R$, die im KOS $(\mathbf{b}^r, \mathbf{e}_1^r, \ldots, \mathbf{e}_n^r)$ jeweils die Form $B_\alpha(0) \times (-\beta', \beta')$ haben, überdecken $\partial\Omega$, d.h. $\partial\Omega \subset \bigcup_{r=1}^R U_r$*

*(ii) <u>$\partial\Omega$ ist lokal der Graph einer Lipschitzfunktion:</u> für jedes $r = 1, \ldots, R$ ist $\partial\Omega \cap U_r$ (im KOS $(\mathbf{b}^r, \mathbf{e}_1^r, \ldots, \mathbf{e}_n^r)$) der Lipschitzgraph $\{(x', a_r(x')) \,|\, x' \in B_\alpha(0)\}$*

*(iii) <u>$\Omega$ ist lokal auf einer Seite von $\partial\Omega$:</u> für jedes $r = 1, \ldots, R$ gilt (im KOS $(\mathbf{b}^r, \mathbf{e}_1^r, \ldots, \mathbf{e}_n^r)$):*
*$\{(x', y) \,|\, x' \in B_\alpha(0) \text{ und } a_r(x') - \beta < y < a_r(x')\} \subset \Omega$ sowie*
*$\{(x', y) \,|\, x' \in B_\alpha(0) \text{ und } a_r(x') < y < a_r(x') + \beta\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$*

**Bemerkung 3.13** Die Beschränktheit von $\Omega$ ist für uns Teil der Definition von Lipschitzgebiet. Es existiert in der Literatur eine Verallgemeinerung auf unbeschränkte Gebiete mit Lipschitzrand, die wir hier jedoch nicht betrachten. □

**Bemerkung 3.14** Es kann manchmal hilfreich sein, folgendes technische Approximationsresultat zu verwenden (der Beweis erfolgt durch Glätten der Funktionen $a_r$ mittels "mollifiers"): Ein Lipschitzgebiet $\Omega$ kann durch $C^\infty$-Lipschitzgebiete $\Omega_n$ approximiert werden, wobei gilt: (a) $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$ (oder, nach Wahl $\overline{\Omega} \subset \Omega_n$) (b) $a_r^n \to a_r$ in $C(B_\alpha(0))$ und (c) $\|a_r^n\|_{C^{0,1}(B_\alpha(0))} \leq C$ uniform in $n$ und (d) $\|a_r^n - a_r\|_{H^1(B_\alpha(0))} \to 0$. □

[2] Ein kartesischer Koordinatenwechsel ist von der Form $F_r(\mathbf{x}) = \mathbf{O}_r\mathbf{x} + \mathbf{b}^r$, wobei $\mathbf{b}^r \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{O}_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal. Die Formulierung "im KOS $(\mathbf{b}^r, \mathbf{e}_1^r, \ldots, \mathbf{e}_n^r)$" drückt aus, daß wir den Punkt $\mathbf{x}$ des affinen Raums $\mathbb{R}^n$ mit seinem Koordinatenvektor $\mathbf{x}^r$ bzgl. des kartesischen KOS $(\mathbf{b}^r, \mathbf{e}_1^r, \ldots, \mathbf{e}_n^r)$ durch $\mathbf{x} = \mathbf{b}^r + \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^r \mathbf{e}_i^r$ identifizieren.

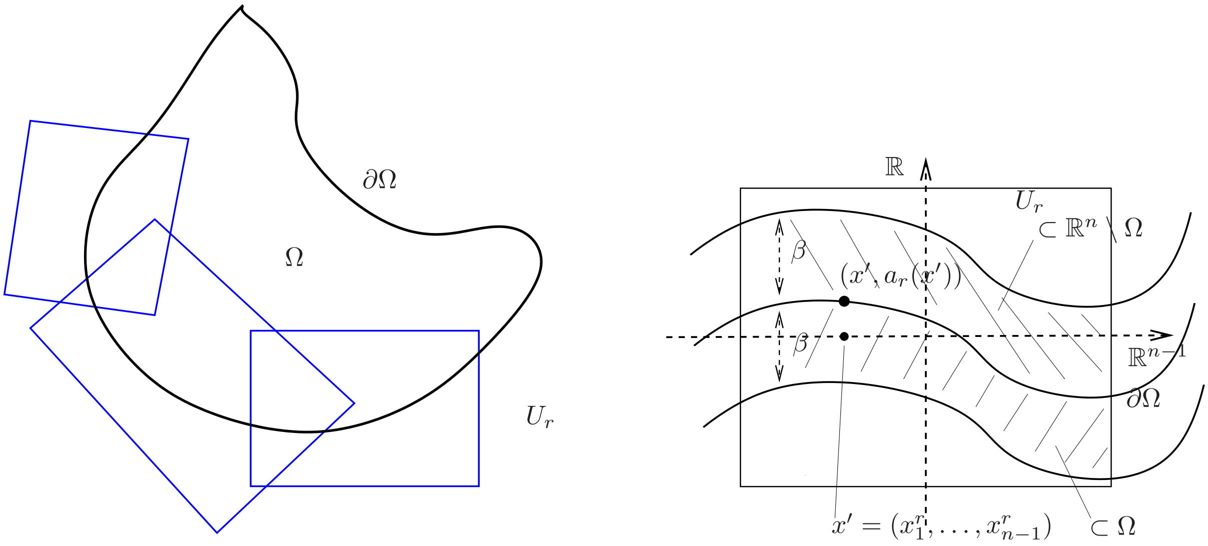
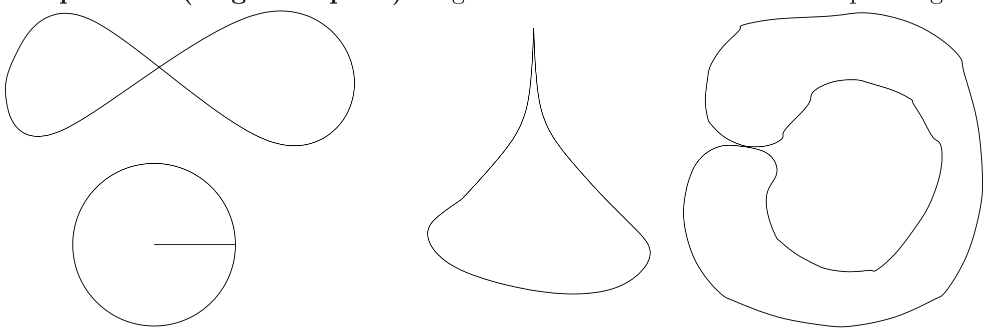



Abbildung 3.1: Definition von Lipschitzgebiet—siehe Def. 3.12

**Beispiel 3.15 (Gegenbeispiele)** Folgende Gebiete im $\mathbb{R}^2$ sind *nicht* Lipschitzgebiete:



□

Für Lipschitzgebiete gilt folgende Verschärfung von Satz 3.5:

**Satz 3.16** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitzgebiet und sei $k \geq 0$. Dann gilt: Die Menge*

$$C^\infty(\bar{\Omega}) := \{u|_\Omega \mid u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

*ist dicht in $H^k(\Omega)$.*

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Lipschitzgebieten ist, daß es Fortsetzungsoperatoren gibt.

**Satz 3.17** *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitzgebiet und $k \geq 0$. Dann existiert ein Fortsetzungsoperator*

$$E : H^k(\Omega) \to H^k(\mathbb{R}^n)$$

*mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$(Eu)|_\Omega = u$*
2. *$E$ ist linear*
3. *$E$ ist beschränkt, d.h. es gibt ein $C > 0$ so, daß*

$$\|Eu\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^k(\Omega)} \qquad \textit{für alle } u \in H^k(\Omega)$$

**Beweis:** Der Fall $n = 1 = k$: Übung. ■

**Übung 3.18** Für $H_0^k(\Omega)$ kann für beliebige offene $\Omega$ der Fortsetzungsoperator $E$ durch $(Eu)_{|\mathbb{R}^n\setminus\Omega} := 0$ definiert werden. □

**Satz 3.19** *Sei $\Omega$ ein Lipschitzgebiet und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $u \in H^k(\Omega)$ und $|u|_{H^k(\Omega)} = 0$ impliziert: $u$ ist ein Polynom vom Grad $k-1$.*

**Beweis:** Man beachte, daß Gebiete nach Definition *zusammenhängend* sind.

Wir skizzieren hier den Beweis für den Fall $k = 1$. Aus $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0$ folgt, daß $\nabla u = 0$. Wir betrachten nun ein festes zusammenhängendes $\Omega' \subset\subset \Omega$ und Glättungen $u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon$. Dann gilt (vgl. eine Übungsaufgabe): $\nabla u_\varepsilon = (\nabla u)_\varepsilon$ auf $\Omega'$, falls $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Daraus schließen wir, daß die $C^\infty(\Omega)$-Fuktion $u_\varepsilon$ die Bedingung $\nabla u_\varepsilon = 0$ auf der zusammenhängenden Menge $\Omega'$ erfüllt. Also ist $u_\varepsilon|_{\Omega'} = c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ konstant. Weil $\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon \to u$ in $L^2(\Omega')$ folgt also, daß $\lim_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon$ existiert. Also konvergiert die Folge $(u_\varepsilon)$ punktweise gegen eine Konstante Funktion. Dieser Limes muß $u$ sein.

Insgesamt erhalten wir, daß $u$ auf jeder zusammenhängenden Menge $\Omega' \subset\subset \Omega$ konstant ist. Weil $\Omega$ zusammenhängend ist, ist damit $u$ konstant auf $\Omega$. ■

finis 7.Stunde

## 3.3 Einbettungssätze

**Definition 3.20** *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $K : V \to W$ heißt* stetig *oder* beschränkt*, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß*

$$\|Ku\|_W \leq C\|u\|_V \qquad \text{für alle } u \in V$$

*gilt. Die* Norm von $K$ *ist gegeben durch*

$$\|K\| := \sup_{0\neq u\in V} \frac{\|Ku\|_W}{\|u\|_V}.$$

*Ist $V$ Teilmenge von $W$, so heißt $V$* in $W$ (stetig) eingebettet*, falls die Inklusion*

$$i : V \to W$$

*stetig ist.*

Trivialerweise sind die Sobolevräume $L^2 = H^0 \supset H^1 \supset H^2 \ldots$ ineinander eingebettet. Es stellt sich die Frage, in welcher Beziehung die Räume $H^k$ zu den vertrauten $C^\ell(\Omega), C^\ell(\bar{\Omega}), L^p(\Omega)$ stehen. Diese Fragen werden in den *Sobolevschen* und *Kondrachovschen* Einbettungssätzen beantwortet.

### 3.3.1 Sobolevsche Einbettungssätze

**Satz 3.21** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitzgebiet. Dann gelten folgende Einbettungen:*

$$H^k(\Omega) \subset \begin{cases} L^p(\Omega), & \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{k}{n}, & \text{für } k < \frac{n}{2} \\ L^q(\Omega), & q \in [1, \infty[, & \text{für } k = \frac{n}{2} \\ C^{0,k-\frac{n}{2}}(\bar{\Omega}), & & \text{für } \frac{n}{2} < k < \frac{n}{2} + 1 \\ C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), & \alpha \in [0, 1[, & \text{für } k = \frac{n}{2} + 1 \\ C^{0,1}(\bar{\Omega}) = W^{1,\infty}, & & \text{für } \frac{n}{2} + 1 < k. \end{cases}$$

**Übung 3.22**
- Zeigen sie direkt, daß $H^1(\Omega) \subset C^{0,\frac{1}{2}}$ für $n = 1$.
- Sei $n = 2$ und $\Omega = B_1(0)$, $u(x) = \ln(\ln(|x|/e))$. Zeigen Sie: $u \in H^1(\Omega)$ (sogar $u \in H_0^1(\Omega)$), $u \in L^q$ für alle $q \in [1, \infty[$ aber $u \notin L^\infty$.

weitere Anwendung: $r^\alpha$ ist in gebrochenen Sobolevraeumen: Babuskatrick

### 3.3.2 Kondrachovsche Einbettungssätze

**Definition 3.23** *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $K : V \to W$ heißt* kompakt*, falls es für jede beschränkte Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $V$ eine Teilfolge $(u_{n'})$ gibt, so daß $(Ku_{n'})$ in $W$ konvergiert. Ist $V$ Teilmenge von $W$, so heißt $V$* kompakt in $W$ eingebettet*, falls die Inklusion*

$$i : V \to W$$

*kompakt ist.*

**Bemerkung 3.24** Ist $i$ kompakt, dann ist $i$ auch stetig. □

**Beispiel 3.25** Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist $C^{0,1}([0,1]) \subset C([0,1])$ kompakt.

**Satz 3.26** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitzgebiet. Dann gilt: Die Einbettung*

$$H^k(\Omega) \subset \begin{cases} L^q(\Omega), & 1 \leq q < p \text{ mit } \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{k}{n}, \quad \text{für } k < \frac{n}{2} \\ L^q(\Omega), & q \in [1, \infty[, \quad \text{für } k = \frac{n}{2} \\ C^0(\bar{\Omega}), & \text{für } \frac{n}{2} < k \end{cases}$$

*ist kompakt.*

**Korollar 3.27** *[Rellichscher Auswahlsatz] Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitzgebiet, $k < k'$. Dann gilt:*

$$H^{k'}(\Omega) \subset H^k(\Omega)$$

*ist kompakt.*

Insbesondere ist $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ kompakt.

**Übung 3.28** Überlegen Sie sich, wie Korollar 3.27 aus Satz 3.26 folgt. □

Eine wichtige Anwendung von Korollar 3.27 ist die 2. Poincaré'sche Ungleichung:

**Satz 3.29 (2. Poincaré'sche Ungleichung)** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitzgebiet. Dann existiert ein $C_\Omega > 0$ derart, daß*

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{für alle } u \in H^1(\Omega), \qquad \text{wobei} \\ \bar{u} &:= \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx. \end{aligned}$$

**Beweis:** Wir zeigen:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left[ |\bar{v}| + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \right] \qquad \text{für alle } v \in H^1(\Omega)$$

Die Behauptung folgt dann leicht, wenn man $v := u - \bar{u}$ gesetzt wird.
Annahme: Es gilt nicht. Dann findet man eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H^1(\Omega)$ so daß

$$\|v_n\|_{H^1} > n \left[ |\bar{v}_n| + \|\nabla v_n\|_{L^2} \right] \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

O.B.d.A. ist $v_n \neq 0$ und $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$|\bar{v}_n| + \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ und } |\bar{v}_n| \to 0.$$

Aus Korollar 3.27 folgt, daß die in $H^1(\Omega)$ beschränkte Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(v_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ hat, die in $L^2(\Omega)$ konvergiert, d.h. $(v_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $L^2(\Omega)$. Aus $\|\nabla v_n\|_{L^2} \to 0$ folgt damit, daß $(v_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $H^1(\Omega)$ ist. Aus der Vollständigkeit von $H^1(\Omega)$ ergibt sich damit die Existenz von $v \in H^1(\Omega)$, so daß

$$v_{n'} \to v \qquad \text{in } H^1(\Omega).$$

Für $v$ gilt wegen $\|\nabla v_{n'}\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, $|\bar{v}_{n'}| \to 0$:

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{und} \quad |\bar{v}| = 0.$$

Nach Satz 3.19 ist also $v$ konstant. Wegen $|\bar{v}| = 0$ ergibt sich $v = 0$ und $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 0$. Andererseits gilt $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \lim_{n'\to\infty} \|v_{n'}\|_{H(\Omega)} = 1$. ↯ ■

Die 2. Poincarésche Ungleichung kann wie folgt verallgemeinert werden:

**Satz 3.30 (Lemma von Deny & Lions)** *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitzgebiet und $k \geq 1$. Sei $\mathcal{P}_k$ der Raum der Polynome von Grad $k$ (d.h. $u \in \mathcal{P}_k \Leftrightarrow D^\alpha u = 0 \quad \forall |\alpha| = k+1$). Dann existiert $C > 0$ (abhängig von $\Omega, k$), so daß*

$$\inf_{v\in\mathcal{P}_{k-1}} \|u - v\|_{H^k(\Omega)} \leq C|u|_{H^k(\Omega)} \qquad \text{für alle } u \in H^k(\Omega).$$

**Beweis:** Der Beweis ist dem von Satz 3.29 sehr ähnlich (für $k = 1$ wird gerade Satz 3.29 reproduziert). Sei $\Pi : L^2 \to \mathcal{P}_{k-1}$ die $L^2$-Projektion.
Beh: Es existiert ein $C > 0$

$$\|v\|_{H^k(\Omega)} \leq C\left[|v|_{H^k(\Omega)} + \|\Pi v\|_{L^2(\Omega)}\right] \qquad \text{für alle } v \in H^k(\Omega) \tag{3.3}$$

Das gewünschte Ergebnis folgt dann aus

$$\inf_{v\in P_k} \|u - v\|_{H^k(\Omega)} \leq \|u - \Pi u\|_{H^k(\Omega)} \leq C\left[|u|_{H^k(\Omega)} + \|\Pi(u - \Pi u)\|_{L^2(\Omega)}\right] = C|u|_{H^k(\Omega)}$$

Die Behauptung (3.3) folgt wieder durch Widerspruch:
Annahme: Es existiert eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H^k(\Omega)$ mit

$$\|v_n\|_{H^k(\Omega)} = 1 \quad \text{und} \quad \|v_n\|_{H^k(\Omega)} > n\left[|v_n|_{H^k(\Omega)} + \|\Pi v_n\|_{L^2(\Omega)}\right].$$

Wie im Beweis von Satz 3.29 existiert dann eine Teilfolge $(v_{n'})$ und ein $v \in H^k(\Omega)$, so daß $v_{n'} \to v$ in $H^k(\Omega)$ und

$$|v|_{H^k(\Omega)} = 0 \quad \text{und} \quad \|\Pi v\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Der Rückgriff auf Satz 3.19 schließt dann den Beweis ab. ■

## 3.4 Spursatz

Der Sobolevsche Einbettungssatz zeigt nur für $n = 1$, daß $H^1(\Omega)$-Funktionen stetig bis zum Rand sind (genauer: es gibt einen stetigen Repräsentanten). D.h. für $n = 1$ hat eine $H^1(\Omega)$-Funktion wohldefinierte Randwerte. Weitere Hinweise darauf, daß man eine Chance hat, Funktionen aus Sobolevräumen auf den Rand einzuschränken, ist Satz 3.16, der besagt, daß $C^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $H^k(\Omega)$ ist; für die Elemente von $C^\infty(\bar{\Omega})$ ist die *Spur* auf dem Rand in natürlicher Weise definiert und man kann hoffen, dies durch Dichtheitsargumente auf $H^k(\Omega)$ zu vererben. Dies ist für Lipschitzgebiete und $k \geq 1$ in der Tat der Fall:

**Satz 3.31** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitzgebiet. Dann gilt: Es existiert $C(\Omega) > 0$ derart, daß der Spuroperator*

$$\gamma_0 : C^\infty(\bar{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega), \quad u \mapsto u_{|\partial\Omega}$$

*die Abschätzung*

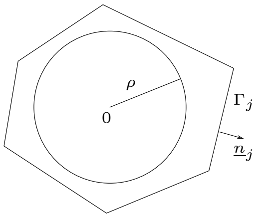
$$\|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C(\Omega)\|u\|_{H^1(\Omega)} \qquad \text{für alle } u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \tag{3.4}$$

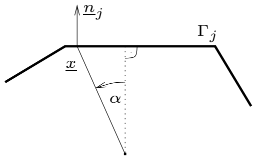
*erfüllt. Insbesondere läßt sich damit der Spuroperator $\gamma_0$ in eindeutiger Weise zu einem stetigen linearen Operator $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ fortsetzen.*

**Beweis:** Es reicht, (3.4) für $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ zu zeigen. Die Verallgemeinerung auf alle $u \in H^1(\Omega)$ folgt dann aus der Stetigkeit und Linearität von $\gamma_0$ und der Dichtheit von $C^\infty(\overline{\Omega})$ in $H^1(\Omega)$.

Wir illustrieren die Grundidee des Beweises von (3.4) für den Spezialfall $n = 2$ und der Annahme, daß $\Omega$ ein konvexes Polygon ist.

O.B.d.A. sei $B_\rho(0) \subset \Omega$. Wegen der Konvexität ist zudem $\Omega$ sternförmig bzgl. 0




Nach dem Gaußschen Satz gilt

$$\int_{\partial\Omega} v^2(\underline{x})\underline{x} \cdot \underline{n}\, d\underline{x} = \int_\Omega \nabla \cdot \left(v(\underline{x})^2 \underline{x}\right)\, d\underline{x} \qquad \text{für alle } v \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Sei $\underline{n}_j$ der äußere Normalenvektor auf $\Gamma_j$. Dann gilt

$$\underline{x} \cdot \underline{n}_j = |\underline{x}| \cos(\alpha) \geq \operatorname{dist}(0, \Gamma_j) \geq \rho.$$

Also

$$\int_{\partial\Omega} v(\underline{x})^2 \underline{x} \cdot \underline{n}\, dS = \sum_j \int_{\Gamma_j} v(\underline{x})^2 \underline{x} \cdot \underline{n}_j\, dS \geq \sum_j \int_{\Gamma_j} v(\underline{x})^2 \rho\, dS = \rho \|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

Weiterhin:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla \cdot (v((\underline{x})^2(\underline{x})) &= \int_\Omega v(\underline{x})^2 \nabla \cdot \underline{x} + \underline{x} \cdot \nabla v(\underline{x})^2 = 2\int_\Omega v(\underline{x})^2 + 2\int_\Omega (\underline{x} \cdot \nabla v(\underline{x})) v(\underline{x}) \\
&\leq 2\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\operatorname{diam}(\Omega) \int_\Omega |\nabla v||v| \leq 2\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\operatorname{diam}(\Omega)\|v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

also

$$\rho\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq 2\|v\|_{L^2(\Omega)} \left[\|v\|_{L^2(\Omega)} + \operatorname{diam}(\Omega)|v|_{H^1(\Omega)}\right] \leq 2(1 + \operatorname{diam}(\Omega))\|v\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}, \tag{3.5}$$

also

$$\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq \frac{2(1+\operatorname{diam}(\Omega))}{\rho}\|v\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2(1+\operatorname{diam}(\Omega))}{\rho}\|v\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Durch einen Dichteschluß folgt dann der Spursatz für alle $v \in H^1(\Omega)$. ∎

**Bemerkung 3.32** Das Argument läßt sich auch lokalisieren, um die Konvexitätsforderung zu umgehen. □

Der Kern von $\gamma_0$, d.h. $\operatorname{kern}(\gamma_0) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0 u = 0\}$ ist wegen der Stetigkeit von $\gamma_0$ ein abgeschlossener Unterraum von $H^1(\Omega)$; zudem stimmt er mit $H^1_0(\Omega)$ überein:

**Satz 3.33** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitzgebiet. Dann ist*

$$\operatorname{kern}(\gamma_0) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \gamma_0 u = 0\} = H^1_0(\Omega)$$

*ist ein abgeschlossener Unterraum von $H^1(\Omega)$.*

Eine naheliegende Frage ist, ob $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ surjektiv ist. Die ist nicht der Fall; der Raum

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := \gamma_0(H^1(\Omega))$$

ist ein echter Teilraum von $L^2(\partial\Omega)$, den wir mit der Norm

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} := \inf_{U \in H^1(\Omega), \gamma_0 U = u} \|U\|_{H^1(\Omega)}$$

versehen.

**Bemerkung 3.34** Für ein Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist die Aronstein-Slobodeckij-Norm definiert durch

$$\|u\| := \left(\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{\|x-y\|^n}\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sie ist äquivalent zu $\|\cdot\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$. □

**Bemerkung 3.35** Im Rahmen der Spursatzes gilt sogar die sog. multiplikative Spurabschätzung

$$\|\gamma_0 u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq C(\Omega)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ihr Beweis folgt aus dem Spursatz (vgl. (3.5)). □

**Übung 3.36 (Poincarésche Ungleichung)** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Lipschitzgebiet und $\emptyset \neq \Gamma_D \subset \partial\Omega$ offen. Definieren Sie $H^1_0(\Omega, \Gamma_D) := \{u \in H^1(\Omega) \,|\, (\gamma_0 u)|_{\Gamma_D} = 0\}$. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C|u|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega, \Gamma_D).$$

Allgemeiner gilt: Es existiert eine Konstante $C > 0$, welche nur von $\Omega$ und $\Gamma_D$ abhängt, so daß

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left[|u|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Gamma_D)}\right].$$

□

finis 8.Stunde

finis 9.Stunde

## 3.5 Gaußscher Satz — partielle Integration

Für Lipschitzgebiete ist der Normalenvektor $\underline{n}(x)$ für fast jedes $x \in \partial\Omega$ definiert. Für Funktionen $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $\underline{v} \in (C^1(\bar{\Omega}))^n$ gilt der Gaußsche Satz:

$$\int_\Omega u\nabla\cdot\underline{v} = -\int_\Omega \nabla u\cdot\underline{v} + \int_{\partial\Omega} u\underline{v}\cdot\underline{n},$$

der manchmal auch in Komponentenschreibweise für $u, w \in C^1(\bar{\Omega})$ geschrieben wird als

$$\int_\Omega u\partial_i w = -\int_\Omega \partial_i u w + \int_{\partial\Omega} u w n_i.$$

Diese Formeln können aufgrund des Spursatzes mit einem Dichteschluß zu Funktionen $u \in H^1(\Omega)$, $\underline{v} \in (H^1(\Omega))^n$ fortgesetzt werden:

**Satz 3.37** *[Gaußscher Satz] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitzgebiet. Dann gilt für alle $u \in H^1(\Omega)$, $\underline{v} \in (H^1(\Omega))^n$*

$$\int_\Omega u\nabla\cdot\underline{v} = -\int_\Omega \nabla u\cdot\underline{v} + \int_{\partial\Omega} u\underline{v}\cdot\underline{n}.$$

**Korollar 3.38** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitzgebiet. Dann gilt für alle $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$*

$$-\int_\Omega \triangle u v = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v - \int_{\partial\Omega} \nabla u\cdot n\, v.$$