

Kapitel 9

DG-FEM

9.1 Motivation

Wir betrachten für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und hinreichend glatte Funktionen b , c und $\varepsilon > 0$ das Randwertproblem

$$-\varepsilon \Delta u + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega \quad (9.1a)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (9.1b)$$

Wir werden zudem an die Funktionen b und c die Bedingung

$$c(x) - \frac{1}{2} \nabla \cdot b(x) \geq c_0 > 0 \quad \text{auf } \Omega \quad (9.2)$$

fordern.

Uns interessiert hier der Fall von *kleinem* $\varepsilon > 0$. Es ist deshalb plausibel, numerische Verfahren zu erzeugen, die auch im Grenzfall $\varepsilon = 0$ gut funktionieren.

Die Grenzgleichung ist eine Gleichung *1. Ordnung*:

$$b(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega. \quad (9.3)$$

Bei dieser Gleichung kann nicht mehr eine Randbedingung auf dem gesamten Rand $\partial\Omega$ gefordert werden. Wir definieren den “Einströmrand”, den “Ausströmrand” und den “charakteristischen Rand” durch

$$\Gamma^- := \{x \in \partial\Omega : b(x) \cdot n(x) < 0\} \quad (9.4)$$

$$\Gamma^+ := \{x \in \partial\Omega : b(x) \cdot n(x) > 0\} \quad (9.5)$$

$$\Gamma^= := \{x \in \partial\Omega : b(x) \cdot n(x) = 0\}. \quad (9.6)$$

Hier ist $n(x)$ der (äußere) Normalenvektor im Punkt $x \in \partial\Omega$. Tatsächlich können wir für (9.3) nur eine Randbedingung auf Γ^- oder Γ^+ fordern. Wir betrachten deshalb das Grenzproblem

$$b(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega \quad (9.7a)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma^-. \quad (9.7b)$$

Beispiel 9.1 Betrachten Sie das Problem

$$-u' + u = f \quad \text{auf } (0, 1),$$

Überlegen Sie sich, daß man nicht sinnvollerweise $u(0) = 0 = u(1)$ fordern kann sondern nur $u(0) = 0$ oder $u(1) = 0$

9.2 DG für Transportprobleme

Unser Ziel ist ein numerisches Verfahren für (9.7). Hierzu sei \mathcal{T} ein Gitter, welches Γ^- auflöst, d.h. jede Randkante e erfüllt entweder $e \subset \Gamma^-$ oder $e \subset \partial\Omega \setminus \Gamma^-$. Für jedes Element K bezeichnen wir mit n_K die (äussere) Normale des Elementes K .

Zur Motivation nehmen wir an, daß die Lösung u von (9.7) hinreichend glatt ist. Sei v eine stückweise glatte Funktion, d.h. $v|_K$ ist glatt für jedes K . Betrachtet man ein Element K , so folgt aus (9.7a) durch Multiplikation mit v , Integration über K und partieller Integration:

$$\int_K fv = \int_K (c + b \cdot \nabla u)v = \int_K cv - u \nabla \cdot (bv) + \int_{\partial K} (b \cdot n_K)uv$$

Durch Summation über alle Elemente $K \in \mathcal{T}$ ergibt sich:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u (cv - \nabla \cdot (bv)) + \int_{\partial K} (b \cdot n_K)uv = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K fv$$

Wir führen weiterhin den Begriff des Flußes auf dem Rand jedes Elements K :

$$\Phi_K := (b \cdot n_K)u.$$

Bei der Diskretisierung wird man u stückweise glatt ansetzen. Damit liegt es nahe, den Raum

$$S^{p,0} := \{u \in L^2(\Omega) : u|_K \in \mathcal{P}_p \quad \forall K \in \mathcal{T}\}$$

zu gegebenem $p \in \mathbb{N}_0$ zu betrachten. Für eine numerische Realisierung liegt es dann nahe, die Testfunktionen v ebenfalls aus diesem Raum zu wählen. Hierzu ist zu bemerken, daß bei unstetigem Ansatz für u und unstetigen Testfunktionen v keine Kopplung zwischen $u|_K$ und $u|_{K'}$ für benachbarte Elemente K und K' existiert. Diese Kopplung realisieren wir nun dadurch, daß auf jeder Kante e der Gitters (mit Elementen K, K' , die sich e teilen), auf der eigentlich zwei Approximationen (nämlich $u|_K$ und $u|_{K'}$) an die exakte Lösung zur Verfügung stehen die Kopplung über einen “numerischen Fluß” zu realisieren, d.h. den Fluß Φ_K durch einen “numerischen Fluß” ersetzt. Eine sinnvolle Wahl des numerischen Flußes erscheint z.B. für eine Kante e zu sein:

$$\widehat{\Phi}_K = (b \cdot n_K)\widehat{u}|_e$$

wobei es für die Wahl von \widehat{u} viele Möglichkeiten gibt, z.B.

- $\widehat{u}|_e = \frac{1}{2}(u|_K + u|_{K'})|_e$
- $\widehat{u}|_e = u|_K$
- $\widehat{u}|_e = u|_{K'}$

Für Kanten $e \subset \Gamma^-$ wird man sinnvollerweise

$$\widehat{u}|_e = 0 \quad \forall e \subset \Gamma^-$$

wählen¹ Stellt man sich den numerischen Fluß $\widehat{\Phi}_K$ von der Form $(b \cdot n_K)\widehat{u}$ als gewählt vor (wobei nun \widehat{u} auf jeder Kante eindeutig definiert ist), so ergibt sich als numerisches Verfahren:

Finde $u \in S^{p,0}(\mathcal{T})$ s.d.

$$B_{DG}^{Trans}(u, v) := \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u (cv - \nabla \cdot (bv)) + \int_{\partial K} (b \cdot n_K)\widehat{u}v = l(v) := \int_{\Omega} vf \quad \forall v \in S^{p,0}(\mathcal{T}) \quad (9.8)$$

Üblicherweise wird diese Formulierung wieder partiell rückintegriert, und wir erhalten

Finde $u \in S^{p,0}(\mathcal{T})$ s.d.

$$B_{DG}^{Trans}(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (cu + b \cdot \nabla u)v + \int_{\partial K} (b \cdot n_K)(\widehat{u} - u)v = l(v) := \int_{\Omega} vf \quad \forall v \in S^{p,0}(\mathcal{T}) \quad (9.9)$$

Die Wahl des numerischen Flußes beeinflusst entscheidend die Qualität des numerischen Verfahrens. Wir führen das am folgenden Beispiel vor:

¹diese Wahl ist zwar naheliegend, aber nicht zwingend—weiterhin ist es zwar naheliegend, $\widehat{u}|_e$ nur abhängig von den Funktionswerten in den angrenzenden Elementen zu machen, aber auch das ist nicht zwingend

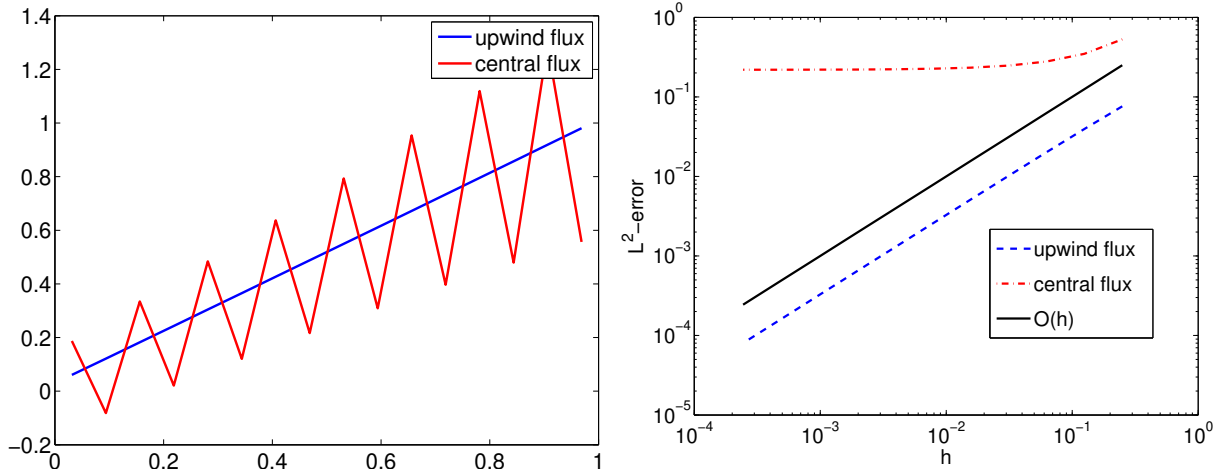


Abbildung 9.1: Links: Lösungsplot. Rechts: Konvergenzverhalten

Beispiel 9.2

$$u' + u = f \quad \text{auf } (0, 1), \quad u(0) = 0.$$

Hier ist $f(x) = 1 + x$, so daß die exakte Lsg $u(x) = x$. Sei $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$ und $K_i = (x_{i-1}, x_i)$. Für die Wahl $p = 0$ (d.h. $S^{0,0}(\mathcal{T})$ besteht aus den stückweise konstanten Funktionen) schreiben wir für $u|_{K_i} = u_i$ und die Testfunktionen bestehen ebenfalls aus stückweise konstanten Funktionen, für die $v|_{K_i} = v_i$ schreiben:

$$\begin{aligned} B_{DG}^{Trans}(u, v) &= \sum_{i=1}^N \int_{K_i} (u' + u)v + (\hat{u}(x_i)v_i - \hat{u}(x_{i-1})v(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{K_i} uv + (\hat{u}(x_i) - \hat{u}(x_{i-1}))v_i \\ &= \sum_{i=1}^N [hu_i + (\hat{u}(x_i) - \hat{u}(x_{i-1}))] v_i \end{aligned}$$

woraus sich als LGS ergibt:

$$\int_{K_i} f dx = hu_i + \hat{u}(x_i) - \hat{u}(x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N.$$

Wir betrachten 2 Wahlen von $\hat{u}(x_i)$:

- *upwind flux*: $\hat{u}(x_j) = u_j$ für $1 \leq j \leq N$ und $\hat{u}(x_0) = 0$ (und $\hat{u}(x_N) = u_N$)
- *central flux*: $\hat{u}(x_j) = \frac{1}{2}(u_j + u_{j+1})$ für $1 \leq j \leq N - 1$ und $\hat{u}(x_0) = 0$ und $\hat{u}(x_N) = u_N$.

Wir erkennen in Fig. 9.1, daß die Wahl des *upwind flux* gute Approximationen und sogar die erhoffte Konvergenz $O(h)$ liefert, während die Wahl des *central flux* zu keiner Konvergenz führt.

Entscheidend für die Wahl des numerischen Flußes \hat{u} ist, daß man ihn abhängig vom Vorzeichen von $b \cdot n_K$ in (9.9) wählt. Wie wir unten sehen werden, führt die richtige Wahl des numerischen Flußes auf ein Verfahren mit guten Stabilitätseigenschaften.

Der *upwind flux* $(b \cdot n_K)\hat{u}$ ist definiert durch folgende Wahl von \hat{u} auf jeder Kante:

- Sei e eine *innere* Kante von \mathcal{T} , welche sich K und K' teilen. Für $x \in e$ definieren wir:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= \text{egal} && \text{falls } b(x) \cdot n_K(x) = b(x) \cdot n_{K'}(x) = 0 \\ \hat{u}(x) &= u|_K(x) && \text{falls } b(x) \cdot n_K(x) > 0 \\ \hat{u}(x) &= u|_{K'}(x) && \text{falls } b(x) \cdot n_{K'}(x) > 0. \end{aligned}$$

- Sei e ein Kante auf Γ^- : dann definieren wir $\hat{u}|_e = 0$
- Sei e ein Kante auf $\partial\Omega \setminus \Gamma^-$: dann definieren wir $\hat{u}|_e$ als Limes von u vom angrenzenden Element

Bemerkung 9.3 In der Formulierung tritt nicht \hat{u} auf sondern $b \cdot n_K \hat{u}$. Deshalb ist die Wahl von \hat{u} egal, wenn $b \cdot n_K = 0$. Eigentlich sollte man nicht die Wahl von \hat{u} in der Vordergrund stellen sondern die Wahl der Größe $b \cdot n_K \hat{u}$.

Dieses Verfahren hat gut Stabilitätseigenschaften, wie wir nun zeigen:

Satz 9.4 *Mit dem Sprung $[\cdot]$ gilt für die Wahl des "upwind flux" und stückweise glatte Funktionen u :*

$$B_{DG}^{Trans}(u, u) \geq \sum_{K \in \mathcal{T}} \|\sqrt{c_0}u\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} \frac{1}{2} \| |b \cdot n_K|^{1/2} [u] \|_{L^2(e)}^2,$$

wobei \mathcal{E} die Menge aller Kanten von \mathcal{T} ist. Für Randkanten ist der Sprung einfach definiert als der Wert der Spur.

Beweis: Für glatte Funktionen u ist $u \nabla u = \nabla(\frac{1}{2}u^2)$. Damit gilt für jedes Element $K \in \mathcal{T}$

$$\int_K u(c - b \cdot \nabla u) = \int_K u^2 \left(c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b \right) + \int_{\partial K} \frac{1}{2} b \cdot n_K u^2$$

Damit

$$B_{DG}^{Trans}(u, u) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K u^2 \underbrace{\left(c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b \right)}_{\geq c_0} + \int_{\partial K} b \cdot n_K \left[\hat{u}u - \frac{1}{2}u^2 \right].$$

Die Summe $\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K}$ schreiben wir als Summe über Kanten. Dabei:

- Sei e eine *innere* Kante, die sich Elemente K und K' teilen. Sei $x \in e$. Sei oBdA K das Element mit $b(x) \cdot n_K(x) > 0$ (der Fall $b(x) \cdot n_K(x) = 0$ ist nicht interessant). Dann rechnen wir wegen $n_K = -n_{K'}$ und der Wahl von $\hat{u}(x)$:

$$\begin{aligned} & b(x) \cdot n_K(x) \left[\hat{u}(x)u_K(x) - \frac{1}{2}u_K(x)^2 \right] + b(x) \cdot n_{K'}(x) \left[\hat{u}(x)u_{K'}(x) - \frac{1}{2}u_{K'}(x)^2 \right] \\ &= b(x) \cdot n_K(x) \left[u_K(x)^2 - \frac{1}{2}u_K(x)^2 - u_K(x)u_{K'}(x) + \frac{1}{2}u_{K'}(x)^2 \right] \\ &= b(x) \cdot n_K(x) \frac{1}{2} |u_K(x) - u_{K'}(x)|^2. \end{aligned}$$

Diese Rechnung ist auch für den Fall $b(x) \cdot n_K(x) = 0$ richtig.

- Falls e eine Randkante mit $e \subset \Gamma^-$ ist, dann ist $\hat{u} = 0$ auf e und somit

$$b \cdot n_K \left[\hat{u} - \frac{1}{2}u \right] u = -b \cdot n_K \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2} |b \cdot n_K| u^2 = \frac{1}{2} |b \cdot n_K| [u]^2,$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, wie der Sprung auf Randkanten definiert ist.

- Falls e eine Randkante mit $e \subset \partial\Omega \setminus \Gamma^-$ ist, dann ist $b \cdot n_K \geq 0$ und $\hat{u} = u$. Somit

$$b \cdot n_K \left[\hat{u} - \frac{1}{2}u \right] u = \frac{1}{2} b \cdot n_K u^2 = \frac{1}{2} b \cdot n_K [u]^2,$$

wobei wir wieder ausgenutzt haben, wie der Sprung auf Randkanten definiert ist.

Faßt man alle Kantenbeiträge zusammen, dann hat man

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K} b \cdot n_K \left(\hat{u} - \frac{1}{2}u \right) u = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{T}} \| |b \cdot n_K|^{1/2} [u] \|_{L^2(e)}^2,$$

wobei wir leicht schlampig mit n_K einen Normalenvektor auf e bezeichnen. \square

Satz 9.4 zeigt, daß die Bilinearform B koerziv ist. Damit ist insbesondere eindeutige Lösbarkeit des diskreten Verfahrens gegeben.

Die Herleitung der Variationsformulierung zeigt außerdem, daß das Verfahren konsistent ist im folgenden Sinn: Falls u eine Lösung von (9.7) ist und zudem die Regularitätsbedingung $u \in H^1(\Omega)$ gilt, dann ist

$$B_{DG}^{Trans}(u, v) = l(v) \quad \forall v \in S^{p,0}(\mathcal{T}). \quad (9.10)$$

Damit ergibt sich die Galerkinorthogonalität

$$B_{DG}^{Trans}(u - u_N, v) = 0 \quad \forall v \in S^{p,0}(\mathcal{T}). \quad (9.11)$$

9.3 DG für elliptische Probleme

Wir betrachten nun die Aufgabe

$$-\varepsilon \Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \quad (9.12a)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (9.12b)$$

Ziel ist nun die Formulierung eines Verfahrens, bei dem die Lösung u im Raum $S^{p,0}(\mathcal{T})$ gesucht wird. Hierzu bietet es sich an, folgende Notation einzuführen: \mathcal{E}_I bezeichnet die inneren Kanten der Triangulierung und \mathcal{E}_B die Randkanten. Weiterhin definieren wir für stückweise glatte skalare Größen u und stückweise glatte vektorwertige Größen σ den *Mittelwertes* und den *Sprung* durch:

- Sei e eine innere Kante, die sich die Elemente K^+ und K^- teilen. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} \{u\}|_e &:= \frac{1}{2} (u_{K^+}|_e + u_{K^-}|_e), & \{\sigma\}|_e &:= \frac{1}{2} (\sigma_{K^+}|_e + \sigma_{K^-}|_e), \\ \llbracket u \rrbracket|_e &:= (u_{K^+} \mathbf{n}_{K^+})|_e + (u_{K^-} \mathbf{n}_{K^-})|_e, & \llbracket \sigma \rrbracket|_e &:= \sigma^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \sigma^- \cdot \mathbf{n}^-. \end{aligned}$$

- Für eine Randkante e definieren wir

$$\{\sigma\}|_e := \sigma|_e \quad \llbracket u \rrbracket|_e := u|_e \mathbf{n}$$

Mit diesen Notationen ergibt sich folgende Identität:

Lemma 9.5 (“DG magic formula”) Seien $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ and $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ stückweise glatt auf der Triangulierung \mathcal{T} . Dann gilt:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{\partial K} v \sigma \cdot \mathbf{n} = \int_{\mathcal{E}_I} \llbracket v \rrbracket \cdot \{\sigma\} + \int_{\mathcal{E}_I} \{v\} \cdot \llbracket \sigma \rrbracket + \int_{\mathcal{E}_B} \llbracket v \rrbracket \cdot \{\sigma\},$$

wobei $\int_{\mathcal{E}_I}$ und $\int_{\mathcal{E}_B}$ Kurzschreibweisen für die Summen über Integrale über die inneren Kanten \mathcal{E}_I und die Randkanten \mathcal{E}_B sind.

Beweis: Übung. \square

Zur Herleitung eines Verfahrens, welches auf $S^{p,0}(\mathcal{T})$ definiert ist, sei zunächst die Lösung u als glatt angenommen. Wir betrachten ein Element K , multiplizieren mit v , integrieren und integrieren partiell und erhalten

$$\int_K -\varepsilon \Delta u v = \int_K \varepsilon \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial K} \varepsilon \nabla u \cdot n_K v$$

Durch Summation über alle Elemente erhalten wir für stückweise glatte v

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \varepsilon \int_K \nabla u \cdot \nabla v - \varepsilon \int_{\partial K} \nabla u \cdot n_K v = l(v) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K f v = \int_{\Omega} f v$$

Verwenden wir nun Lemma 9.5 (mit $\sigma = \nabla u$), so ergibt sich

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \varepsilon \int_K \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\mathcal{E}_I} \varepsilon \llbracket v \rrbracket \{ \nabla u \} - \int_{\mathcal{E}_I} \varepsilon \{ v \} \llbracket \nabla u \rrbracket - \int_{\mathcal{E}_B} \varepsilon \llbracket v \rrbracket \{ \nabla u \} = l(v) \quad (9.13)$$

Für glatte Lösungen u des Problems (9.12) haben wir (vgl. die Definition des Sprungs!)

$$\llbracket u \rrbracket = 0 \quad \text{für alle inneren Kanten } e \in \mathcal{E}_I \quad (9.14)$$

$$\llbracket u \rrbracket = 0 \quad \text{für alle Randkanten } e \in \mathcal{E}_B \quad (9.15)$$

$$\llbracket \nabla u \rrbracket = 0 \quad \text{für alle inneren Kanten } e \in \mathcal{E}_I. \quad (9.16)$$

Wegen (9.16) erfüllt die Lösung u insbesondere

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \varepsilon \int_K \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\mathcal{E}_I} \varepsilon \llbracket v \rrbracket \{ \nabla u \} - \int_{\mathcal{E}_B} \varepsilon \llbracket v \rrbracket \{ \nabla u \} - \int_{\mathcal{E}_B} \varepsilon \llbracket v \rrbracket \{ \nabla u \} = l(v) \quad (9.17)$$

Wegen (9.14), (9.15) gilt für beliebiges² $\theta \in \mathbb{R}$ auch noch

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \varepsilon \int_K \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\mathcal{E}_I} \varepsilon \llbracket v \rrbracket \{ \nabla u \} - \theta \int_{\mathcal{E}_I} \varepsilon \llbracket u \rrbracket \{ \nabla v \} - \theta \int_{\mathcal{E}_B} \varepsilon \llbracket u \rrbracket \{ \nabla v \} - \int_{\mathcal{E}_B} \varepsilon \llbracket v \rrbracket \{ \nabla u \} = l(v) \quad (9.18)$$

oder, kompakter

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \varepsilon \int_K \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\mathcal{E}} \varepsilon \llbracket v \rrbracket \{ \nabla u \} - \theta \int_{\mathcal{E}} \varepsilon \llbracket u \rrbracket \{ \nabla v \} = l(v), \quad (9.19)$$

wobei wird mit $\int_{\mathcal{E}}$ die Summe der Integrale über alle Kanten bezeichnen.

Wenn wir bei der Diskretisierung die Ansatzfunktionen als lediglich stückweise polynomiell annehmen, dann müßen uns wieder mit der Frage der Kopplung beschäftigen, denn aus der ‘Herleitung’ von (9.19) ist nicht klar, daß (zumindest für $h \rightarrow 0$) die diskreten Approximationen (wenn sie denn existieren) Stetigkeit der Approximationen über die Elementgrenzen erreicht wird. Bezeichnet man mit h_e die Länge der Elementkante e so gilt für jeden beliebigen Parameter $\sigma \in \mathbb{R}$ (wir wählen später $\sigma > 0$ hinreichend groß)

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\sigma}{h_e} \llbracket u \rrbracket &= 0 \quad \text{auf inneren Kanten } e \in \mathcal{E}_I \\ \varepsilon \frac{\sigma}{h_e} \llbracket u \rrbracket &= 0 \quad \text{auf Randkanten } e \in \mathcal{E}_B \end{aligned}$$

Damit ergibt sich, daß die exakte Lösung u auch folgende Gleichung erfüllt:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \varepsilon \int_K \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\mathcal{E}} \varepsilon \llbracket v \rrbracket \{ \nabla u \} - \theta \int_{\mathcal{E}} \varepsilon \llbracket u \rrbracket \{ \nabla v \} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \varepsilon \frac{\sigma}{h_e} \int_e \llbracket u \rrbracket \llbracket v \rrbracket = l(v) \quad (9.20)$$

Definiert man die DG-Bilinearform

$$B_{DG}^{ell}(u, v) := \sum_{K \in \mathcal{T}} \varepsilon \int_K \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\mathcal{E}} \varepsilon \llbracket v \rrbracket \{ \nabla u \} - \theta \int_{\mathcal{E}} \varepsilon \llbracket u \rrbracket \{ \nabla v \} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \varepsilon \frac{\sigma}{h_e} \int_e \llbracket u \rrbracket \llbracket v \rrbracket \quad (9.21)$$

so bietet sich folgendes Verfahren an:

$$\text{Finde } u_N \in S^{p,0}(\mathcal{T}) \quad \text{s.d.} \quad B_{DG}^{ell}(u_N, v) = l(v) \quad \forall v \in S^{p,0}(\mathcal{T}). \quad (9.22)$$

²in der Praxis gibt es nur die Wahl $\theta = -1$, das sog. NIP (nonsymmetric interior penalty method), und $\theta = 1$, das sog. SIP (symmetric interior penalty method)

Nach der Herleitung ist das Verfahren konsistent, d.h. für hinreichend glatte Lösungen u von (9.12) gilt

$$B_{DG}^{ell}(u, v) = l(v) \quad \forall v \in S^{p,0}(\mathcal{T}).$$

Falls das diskrete Problem (9.22) lösbar ist, dann hat man damit Galerkinorthogonalität

$$B_{DG}^{ell}(u - u_N, v) = 0 \quad \forall v \in S^{p,0}(\mathcal{T}),$$

so daß sich Fehlerabschätzungen ergeben können.

Im Fall $\theta = -1$ ist das diskrete Problem (9.22) eindeutig lösbar, für $\theta \neq -1$ eindeutig lösbar, falls $\sigma > 0$ hinreichend groß gewählt wird:

Satz 9.6 *Auf dem Raum $S^{p,0}(\mathcal{T})$ wird die Norm*

$$\|u\|_{DG}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}} \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} \varepsilon \frac{\sigma}{h_e} \|[u]\|_{L^2(e)}^2$$

definiert. Dann gilt:

1. Für $\theta = -1$ gilt

$$B_{DG}^{ell}(u, u) = \|u\|_{DG}^2 \quad \forall u \in S^{p,0}(\mathcal{T}).$$

2. Sei $\theta \neq -1$. Dann existiert $\sigma > 0$, welches nur von der Formregularität von \mathcal{T} abhängt, so daß

$$B_{DG}^{ell}(u, u) \geq C \|u\|_{DG}^2 \quad \forall u \in S^{p,0}(\mathcal{T}).$$

Beweis: Strikt genommen muß man sich überlegen, daß $\|\cdot\|_{DG}$ eine Norm ist (Übung).

Der Fall $\theta = -1$ ist offensichtlich. Wir bemerken weiterhin, daß für die Koerzivität reicht, wenn das Argument stückweise glatt ist.

Der Fall $\theta \neq -1$ folgt aus einer Spurauschätzung und der Endlichdimensionalität von Polynomräumen. Sei e eine Kante.

$$\int_e \|[u]\| \{ \nabla u \} \leq \|[u]\|_{L^2(e)} \|\{ \nabla u \}\|_{L^2(e)}$$

Der Spursatz sagt für das Referenzelement \hat{K} und Polynome $\hat{u} \in \mathcal{P}_p$:

$$\|\nabla \hat{u}\|_{L^2(\partial \hat{K})} \leq C \|\nabla \hat{u}\|_{H^1(\hat{K})}.$$

Weil der Raum der Polynome endlichdimensional ist, existiert $C > 0$ so daß $\|\nabla \hat{u}\|_{H^1(\hat{K})} \leq C \|\nabla \hat{u}\|_{L^2(\hat{K})}$.
Damit folgt

$$\|\nabla \hat{u}\|_{L^2(\partial K)} \leq C \|\nabla \hat{u}\|_{L^2(\hat{K})}$$

Somit folgt mit Skalierungsargumenten für eine Kante e , die sich Elemente K und K' teilen:

$$\|\{ \nabla u \}\|_{L^2(e)}^2 \leq C h_K^{-1} \|\nabla u\|_{L^2(K)}^2 + C h_{K'}^{-1} \|\nabla u\|_{L^2(K')}^2.$$

Also folgt für $\delta > 0$ beliebig mit der Abschätzung $ab \leq (\delta/h_e)a^2 + (2\delta/h_e)^{-1}b^2$

$$\int_e \|[u]\| \{ \nabla u \} \leq C \delta^{-1} h_e^{-1} \|[u]\|_{L^2(e)}^2 + C \delta h_e \left[h_K^{-1} \|\nabla u\|_{L^2(K)}^2 + h_{K'}^{-1} \|\nabla u\|_{L^2(K')}^2 \right]$$

Für formreguläre Triangulierungen ist $h_e \sim h_K \sim h_{K'}$ so daß

$$B_{DG}^{ell}(u, u) \geq \sum_{K \in \mathcal{T}} \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(K)}^2 + \varepsilon \sum_{e \in \mathcal{E}} \frac{\sigma}{h_e} \|[u]\|_{L^2(e)}^2 - C \varepsilon \delta \sum_{K \in \mathcal{T}} \|\nabla u\|_{L^2(K)}^2 - C \delta^{-1} \varepsilon \sum_{e \in \mathcal{E}} h_e^{-1} \|[u]\|_{L^2(e)}^2.$$

Nun sieht man, daß die gewünschte Abschätzung erreicht wird, wenn $\sigma > 0$ hinreichend groß ist. \square

9.4 DG für singulär gestörte Probleme

Durch Zusammenfügen der Bilinearformen B_{DG}^{Trans} und B_{DG}^{ell} ergibt sich nun eine Bilinearform B_{DG} für das ursprüngliche Problem (9.1): Wählt man \hat{u} wie oben beschrieben, so daß ein *upwind flux* entsteht und wählt man Parameter θ und $\sigma \geq 0$, so ergibt sich als numerisches Verfahren für (9.1):

$$\text{Finde } u_N \in S^{p,0}(\mathcal{T}) \text{ s.d. } \quad B_{DG}(u_N, v) := B_{DG}^{Trans}(u_N, v) + B_{DG}^{ell}(u_N, v) = l(v) := \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in S^{p,0}(\mathcal{T}). \quad (9.23)$$

Nach Konstruktion ist die Bilinearform B konsistent, d.h. für hinreichend glatte Lösungen u von (9.1) gilt

$$B_{DG}(u, v) = l(v) \quad \forall v \in S^{p,0}(\mathcal{T}),$$

so daß sich die Galerkinorthogonalität

$$B_{DG}(u - u_N, v) = 0 \quad \forall v \in S^{p,0}(\mathcal{T}) \quad (9.24)$$

ergibt. Die Bilinearform B_{DG} ist tatsächlich koerziv auf $S^{p,0}(\mathcal{T})$:

Lemma 9.7 *Sei $\theta = -1$ oder $\sigma > 0$ hinreichend groß, falls $\theta \neq -1$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, welche nur von der Formregularität von \mathcal{T} abhängt, so daß für $\varepsilon > 0$ gilt:*

$$B_{DG}(u, u) \geq C \|u\|_{DG}^2 \quad \forall u \in S^{p,0}(\mathcal{T}),$$

wobei

$$\begin{aligned} \|u\|_{DG}^2 &:= \|u\|_{DG,ell}^2 + \|u\|_{DG,Trans}^2 \\ \|u\|_{DG,ell}^2 &:= \sum_{K \in \mathcal{T}} \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} \varepsilon \frac{\sigma}{h_e} \|\llbracket u \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \\ \|u\|_{DG,Trans}^2 &:= \sum_{K \in \mathcal{T}} c_0 \|u\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}} \frac{1}{2} \|b \cdot n\|^{1/2} \|\llbracket u \rrbracket\|_{L^2(e)}^2 \end{aligned}$$

Beweis: Übung. □

Zur Illustration, wie die Konvergenzbeweise laufen können, zitieren wir folgendes Resultat:

Satz 9.8 *Seien b und c hinreichend glatt und $c - \frac{1}{2} \nabla \cdot b \geq c_0 > 0$. Sei $u \in H^{p+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ Lösung von (9.1). Dann gilt für den DG-Fehler $u - u_N$:*

$$\|u - u_N\|_{DG} \leq C \left[\varepsilon^{1/2} h^p + h^{p+1/2} \right] \|u\|_{H^{p+1}(\Omega)}.$$

mit einem $C > 0$, welches nicht von ε abhängt.

Beweis: Es ist voranzuschicken, daß man für kleine ε nicht annehmen kann, daß man gute Abschätzungen für $\|u\|_{H^{p+1}(\Omega)}$ hat—insofern hat der Beweis hier nur Modellcharakter für die zu verwendenden Techniken.

1. *Schritt:* Wir definieren Πu als die L^2 -Projektion von u auf $S^{p,0}(\mathcal{T})$. Da der Raum $S^{p,0}(\mathcal{T})$ aus unstetigen Funktionen besteht, ist Πu einfach die elementweise L^2 -Projektion auf \mathcal{P}_p . Wir schreiben

$$u - u_N = u - \Pi u + \Pi u - u_N =: \eta + \xi$$

und bemerken, daß $\xi \in S^{p,0}(\mathcal{T})$ und daß η elementweise L^2 -orthogonal auf \mathcal{P}_p steht. Es ergeben sich damit relativ einfach die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{L^2(K)} &\leq C h_K^{p+1} \|u\|_{H^{p+1}(K)} \\ \|\nabla \eta\|_{L^2(K)} &\leq C h_K^p \|u\|_{H^{p+1}(K)} \\ \|\llbracket \eta \rrbracket\|_{L^2(e)} &\leq C h_e^{p+1/2} \|u\|_{H^{p+1}(\omega_e)}, \end{aligned}$$

wobei ω_e der Kantenpatch ist. Damit ergibt sich insbesondere

$$\|\eta\|_{DG} \leq \|\eta\|_{DG,ell} + \|\eta\|_{DG,Trans} \leq C \left[\varepsilon^{1/2} h^p + h^{p+1/2} \right].$$

2. *Schritt:* Wir schätzen nun ab,

$$\|u - u_N\|_{DG} \leq \|\eta\|_{DG} + \|\xi\|_{DG}.$$

Weiters haben wir die Galerkinorthogonalität $0 = B_{DG}(u - u_N, \xi) = B_{DG}(\eta + \xi, \xi)$, d.h.

$$B_{DG}(\xi, \xi) = -B_{DG}(\eta, \xi)$$

Um $\|\xi\|_{DG}$ abzuschätzen, verwenden wir nun die Koerzivität von B_{DG} auf dem diskreten Raum $S^{p,0}(\mathcal{T})$:

$$C\|\xi\|_{DG}^2 \leq B_{DG}(\xi, \xi) = -B_{DG}(\eta, \xi) = -B_{DG}^{Trans}(\eta, \xi) - B_{DG}^{ell}(\eta, \xi).$$

3. *Schritt:* Wir schätzen $B_{DG}^{ell}(\eta, \xi)$ ab: Die Bilinearform ist symmetrisch und Cauchy-Schwarzungleichung liefert

$$|B_{DG}^{ell}(\eta, \xi)| \leq \|\eta\|_{DG,ell} \|\xi\|_{DG,ell} \leq \|\eta\|_{DG} \|\xi\|_{DG}$$

4. *Schritt:* Wir schätzen $B_{DG}^{Trans}(\eta, \xi)$ ab. Hier werden wir nun ausnutzen, daß ξ eine diskrete Funktion ist und daß η elementweise Orthogonalitätseigenschaften hat. Aus der Variante (9.8) für B_{DG}^{Trans} ergibt sich

$$B_{DG}^{Trans}(\eta, \xi) = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \eta (c\xi - \nabla \cdot (b\xi)) + \int_{\partial K} (b \cdot n_K) \hat{\eta} \xi,$$

wobei $\hat{\eta}$ entsprechend den *upwind flux* definiert. Man kann sich überlegen, daß für jede Kante e gilt:

$$\|\hat{\eta}\|_{L^2(e)} \leq Ch_e^{p+1/2} \|u\|_{H^{p+1}(\omega_e)},$$

so daß sich mit Cauchy-Schwarz ergibt:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \left| \int_{\partial K} b \cdot n_K \hat{\eta} \xi \right| \leq Ch^{p+1/2} \|u\|_{H^{p+1}(\Omega)} \|\xi\|_{DG,Trans} \leq Ch^{p+1/2} \|u\|_{H^{p+1}(\Omega)} \|\xi\|_{DG}$$

Der Term $\sum_{K \in \mathcal{T}} \left| \int_K \eta c \xi \right| \leq Ch^{p+1} \|u\|_{H^{p+1}(\Omega)} \|\xi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{p+1} \|u\|_{H^{p+1}(\Omega)} \|\xi\|_{DG}$, wobei wir $c_0 > 0$ explizit verwendet haben. Der letzte Term ist

$$\int_K \eta \nabla \cdot (b\xi) = \int_K \eta (\nabla \cdot b) \xi + \int_K \eta b \cdot \nabla \xi.$$

Der Beitrag $\int_K \eta (\nabla \cdot b) \xi$ führt wieder wegen der Glattheit von b auf einen Term $h^{p+1} \|\xi\|_{L^2(\Omega)}$. Für den letzte Beitrag nutzen wir nun aus, daß ξ elementweise ein Polynom ist. Sei $\bar{b} = b(x_K)$, wobei x_K der Schwerpunkt von K ist. Dann ist wegen der Glattheit von b : $\|b - \bar{b}\|_{L^\infty(K)} \leq Ch_K$. Dann ist

$$\int_K \eta b \cdot \nabla \xi = \int_K \eta (b - \bar{b}) \cdot \nabla \xi + \int_K \eta \bar{b} \cdot \nabla \xi.$$

Weil $\bar{b} \cdot \nabla \xi$ ein Polynom vom Grad $p-1$ ist, gilt wegen der L^2 -Orthogonalität von η auf dem Raum der Polynome vom Grad p , daß $\int_K \eta \bar{b} \cdot \nabla \xi = 0$. Damit

$$\left| \int_K \eta b \cdot \nabla \xi \right| = \left| \int_K \eta (b - \bar{b}) \cdot \nabla \xi \right| \leq \|\eta\|_{L^2(K)} Ch_K \|\nabla \xi\|_{L^2(K)} \leq C \|\eta\|_{L^2(K)} \|\xi\|_{L^2(K)},$$

wobei wir im letzten Schritt eine inverse Ungleichung ausgenutzt konnten, weil $\xi|_K$ ein Polynom ist. Damit ergibt sich $|B_{DG}^{Trans}(\eta, \xi)| \leq h^{p+1/2} \|u\|_{H^{p+1}(\Omega)} \|\xi\|_{DG,Trans}$, was den Beweis abschließt. \square