Übungsblatt 6

Diskussion des Blattes: Do., 17.11.2022

1. Sei Ω Polygon, $f \in L^2(\Omega)$, $h \in L^2(\partial\Omega)$, die die Kompatibilitätsbedingung

$$\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} h = 0 \tag{1}$$

erfüllen. Sei $\overline{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \,|\, \int_\Omega u = 0\}$ und seien $\{\varphi_i \,|\, i = 1, \dots, N\}$ die Hutfunktionen des $S^{1,1}(\mathcal{T})$. Sei $V_N = S^{1,1}(\mathcal{T}) \cap \overline{H}^1(\Omega)$ und die folgende die Variationsaufgabe gegeben:

$$\text{Finde } u \in \overline{H}^1(\Omega) \text{ s.d. } \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} hv \qquad \forall v \in \overline{H}^1(\Omega) \tag{2}$$

a) Die Diskretisierung von (2) mittels V_N ist äquivalent zum Lösen eines Gleichungssystems der folgenden Form:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{P}^\top \end{pmatrix} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

wobei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{P}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$. Geben Sie die auftretenden Matrizen und Ker$\mathbf{B}$ an.

b) Zeigen Sie: Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^\top & 0 \end{pmatrix}$$

ist regulär. Zeigen Sie: Die gesuchte Lösung $\mathbf{u}$ von (3) kann durch Lösen von

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

erhalten werden.

c) Zeigen Sie, daß $\mathbf{u}$ der Minimierer des Funktionals

$$\mathbf{u} \mapsto J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}^\top \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{u}^\top \mathbf{l}$$

unter der Nebenbedingung $\mathbf{u}^\top \mathbf{P} = 0$ ist. Zeigen Sie, daß die Lösung $(\mathbf{u}, \lambda)$ von (4) ein Extremalpunkt des Lagrangefunktionals $(\mathbf{u}, \lambda) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) := J(\mathbf{u}) + \lambda \mathbf{u}^\top \mathbf{P}$ ist.

2. In der VO wurden Fehlerabschätzungen für den (stückweise) linearen Interpolanten auf *formregulären* Gittern gezeigt, bei denen der kleinste Winkel von Null weg beschränkt ist ("minimal angle condition"). Tatsächlich kann man auch *anisotrope* Elemente in der FEM zulassen. Es gibt (in 2D) zwei Typen von anisotropen Elementen: solche, bei denen der größte Winkel von π weg beschränkt ist ("maximal angle condition") und solche, bei denen der größte Winkel es nicht ist. Die Fehlerabschätzungen für den linearen Interpolanten unterscheiden sich stark in beiden Fällen. Während man im ersten Fall noch gute Interpolationsfehlerabschätzungen erhalten kann, ist das im zweiten Fall im Allgemeinen nicht der Fall.

a) Betrachten Sie das Dreieck K mit Eckpunkten $(-h,0)$, $(h,0)$, $(0,\varepsilon h)$ und die Funktion $u(x_1,x_2)=x_1^2$. Zeigen Sie für den linearen Interpolanten $Iu(x_1,x_2)=h^2-h\varepsilon^{-1}x_2$ und deshalb

$$\frac{|u-Iu|_{H^1(K)}}{|u|_{H^2(K)}}=hc_\varepsilon$$

mit einem c_ε, welches $c_\varepsilon \geq c\varepsilon^{-1}$ erfüllt.

b) Betrachten Sie das Dreieck K mit Eckpunkten $(0,0)$, $(h,0)$, $(0,\varepsilon h)$ und die Funktion $u(x_1,x_2)=x_1^2$. Zeigen sie für den linearen Interpolanten $Iu(x_1,x_2)=hx_1$ und damit

$$\frac{|u-Iu|_{H^1(K)}}{|u|_{H^2(K)}}=hc$$

für ein $c>0$ unabhängig von ε.

3. Im Beweis der Approximationsaussage

$$\inf_{v\in S^{1,1}(\mathcal{T}_h)}\|u-v\|_{H^1(\Omega)}\leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)} \tag{5}$$

(bei regulären, formregulären, affinen Triangulierungen mit Schrittweite $h:=\max_{K\in\mathcal{T}_h}=h)$ wurde das Lemma von Deny-Lions verwendet, welches auf der kompakten Einbettung $H^2\subset H^1$ beruht. Zeigen Sie: Falls (5) für alle $h>0$ gilt, dann ist die Einbettung $H^2(\Omega)\subset H^1(\Omega)$ kompakt. Zeigen Sie allgemeiner: Falls für einen Raum $Y\subset H^1(\Omega)$ und ein $\alpha>0$ die Aussage

$$\forall u\in Y:\qquad \inf_{v\in S^{1,1}(\mathcal{T}_h)}\|u-v\|_{H^1(\Omega)}\leq Ch^\alpha\|u\|_Y$$

gilt, dann ist die Einbettung $Y\subset H^1(\Omega)$ kompakt.

4. Sei $\mathcal{T}$ ein reguläre, *affine* Triangulierung des Polygons $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ in *Parallelogramme*, bei der die Elementabbildungen $F_K:\widehat{K}:=(0,1)^2\to K$ die Bedingungen

$$\|F_K'\|_2\leq Ch_K,\qquad \|(F_K')^{-1}\|_2\leq Ch_K^{-1}$$

erfüllen (für ein $C>0$, welche nicht von K abhängt). Hier ist h_K der Durchmesser von K. Sei $p\in\mathbb{N}$ fest. Sei $S^{p,1}(\mathcal{T}):=\{u\in H^1(\Omega)\colon u|_K\circ F_K\in\mathcal{Q}_p\}$, wobei der Tensorproduktraum $\mathcal{Q}_p:=\operatorname{span}\{x^iy^j\colon 0\leq i,j\leq p\}$. Konstruieren Sie einen Operator $I:C(\overline{\Omega})\to S^{p,1}(\mathcal{T})$ mit der Approximationseigenschaft

$$\|u-Iu\|_{L^2(\Omega)}\leq Ch^{p+1}|u|_{H^{p+1}(\Omega)}\qquad \forall u\in H^{p+1}(\Omega),$$

wobei $h=\max_{K\in\mathcal{T}}h_K$.

Hinweis: Auf dem Referenzviereck kann I kann als Interpolationsoperator in $(p+1)^2$-Punkten konstruiert werden. Es ist geschickt, die Punkte so zu wählen, daß auf jeder Kanten $p+1$ Punkte sind, damit die elementweise konstruierte Interpolante global stetig ist. Bemerken Sie hierzu, daß die Funktionen aus $S^{p,1}(\mathcal{T})$ Polynome auf jeder Kanten sind.