Übungsblatt 10

Diskussion des Blattes: Do., 22.12.2022

1. **a)** Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

$$\inf_{\|u\|_2=1} \sup_{\|v\|_2=1} u^T\mathbf{B}v > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker}\mathbf{B}^T = \{0\}$$

$$\forall v \neq 0 : \sup_{\|u\|_2=1} u^T\mathbf{B}v > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker}\mathbf{B} = \{0\}$$

b) Sei nun $n = m$. Zeigen Sie:

$$\inf_{\|u\|_2=1} \sup_{\|v\|_2=1} u^T\mathbf{B}v \geq \gamma > 0 \qquad \Longrightarrow \|\mathbf{B}^{-1}\|_2 \leq \gamma^{-1}.$$

2. Seien X, Y reflexive Räume. Sei $B : X\times Y \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearform. Dann sind die folgenden Aussagen (1), (2) äquivalent:

$$\inf_{0\neq x\in X} \sup_{0\neq y\in Y} \frac{B(x,y)}{\|x\|_X\|y\|_Y} \geq \gamma > 0 \qquad \text{zusammen mit} \qquad \forall 0 \neq y \in Y \ \sup_{0\neq x\in X} \frac{B(x,y)}{\|x\|_X} > 0 \quad (1)$$

$$\inf_{0\neq y\in Y} \sup_{0\neq x\in X} \frac{B(x,y)}{\|x\|_X\|y\|_Y} \geq \gamma > 0 \qquad \text{zusammen mit} \qquad \forall 0 \neq x \in X \ \sup_{0\neq y\in Y} \frac{B(x,y)}{\|y\|_Y} > 0 \quad (2)$$

3. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv semidefinit. Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (mit $m \leq n$), $l \in \mathbb{R}^n$ und $g \in \operatorname{Im}\mathbf{B}$. Sei $u \in \mathbb{R}$ ein Minimierer von

$$\min_{u\in\mathbb{R}^n:\mathbf{B}u=g} \frac{1}{2}u^\top\mathbf{A}u - l^\top u.$$

Zeigen Sie:

a) Es existiert ein *Langrangemultiplikator* $\lambda \in \mathbb{R}^m$, so daß folgendes LGS erfüllt ist:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{B} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ g \end{pmatrix}.$$

b) (Eindeutigkeit von u) Falls $\mathbf{A}$ SPD auf Ker$\mathbf{B}$ ist, dann ist der Minimierer u eindeutig.

c) (Eindeutigkeit von λ) λ ist eindeutig bestimmt, falls $\mathbf{A}$ SPD auf Ker$\mathbf{B}$ ist und Ker$\mathbf{B}^\top = \{0\}$ ist. Zeigen Sie: Ker$\mathbf{B}^\top = \{0\}$, falls $\mathbf{B}$ vollen Rang hat.

4. Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv definit auf Ker$\mathbf{B}$. Definiere

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: die inf-sup Bedingung

$$\inf_{\|v\|=1} \sup_{\|u\|=1} v^\top\mathcal{B}u > 0 \tag{3}$$

ist äquivalent dazu, daß $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ regulär ist.