Übungsblatt 5

Diskussion des Blattes: Do., 10.11.2022

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon. Sei Γ_D eine Kante von Ω. Sei $H^1_0(\Omega, \Gamma_D) := \{u \in H^1(\Omega) \,|\, (\gamma_0 u)|_{\Gamma_D} = 0\}$. Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &\leq C|u|_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega, \Gamma_D), \\ \|u\|_{H^1(\Omega)} &\leq C\left[|u|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Gamma_D)}\right] \qquad \forall u \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon. Sei Γ_N eine Vereinigung von Kanten von Ω und sei Γ_D die Vereinigung der restlichen Kanten von Ω. Wir definieren $H^1_0(\Omega, \Gamma_D)$ wie in Aufgabe 5.1. Wir betrachten:

$$\text{Finde } u \in H^1_0(\Omega, \Gamma_D) \text{ s.d.} \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + c(x)uv = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_N} gv \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega, \Gamma_D). \quad (1)$$

a) Sei $\Gamma_D \neq \emptyset$. Zeigen Sie: Für $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c \geq 0$ auf Ω hat die Variationsformulierung (1) hat eine eindeutige Lösung. Kann die Bedingung $c \geq 0$ abgeschwächt werden? *Hinweis:* Verwenden Sie Aufg. 5.1 in der Form $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P |u|_{H^1(\Omega)}$.

b) Sei $\Gamma_N = \partial\Omega$. Zeigen Sie: Falls $0 < \inf_{x \in \Omega} c(x)$, dann hat die Variationsformulierung (1) eine eindeutige Lösung. Was passiert im Fall $c(x) \equiv 0$?

c) (optional) Sei $c \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\overline{\Gamma_N})$. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ die Lösung von (1). Zeigen Sie: u erfüllt punktweise die folgende Aufgabe:

$$-\Delta u + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad \partial_n u = g \quad \text{auf } \Gamma_N \text{ ohne die Eckpunkte}, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D.$$

3. Erstellen Sie ein 2D-FEM Programm in MATLAB oder Python zum Lösen von

$$-\Delta u = f \qquad \text{auf } (0,1)^2 \qquad\qquad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

indem Sie die Routinen in
`http://www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS2223/blatt5_2D_FEM_empty_shell.m`
bzw. `http://www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS2223/blatt5_2D_FEM_empty_shell.py`
vervollständigen. Die rechte f ist bereits in dem Code als Funktion definiert. Zu Vergleichszwecken sollen Sie auch die exakte Energie mittels des Aitkenschen Delta-Verfahrens extrapolieren. Welches Konvergenzverhalten beobachten Sie im Energiefehler und für die extrapolierte Energie? *Hinweis:* Für die Quadraturen können Sie eine 1-Punkt-Quadratur verwenden.

4. Sei $\mathcal{T}$ ein Gitter auf $\Omega = (0,1)$ mit Knoten $x_0, \ldots, x_M$. Sei $S^{p,2}(\mathcal{T}) = \{u \in H^2(\Omega) \,|\, u|_K \circ F_K \in \mathcal{P}_p\}$, wobei F_K die affine (bijektive) Elementabbildung ist. Geben Sie eine Basis von $S^{p,2}(\mathcal{T})$, die Sie für die FEM-Realisierung der Bilinearform

$$B(u,v) := \int_\Omega u''v'' + c(x)uv$$

verwenden würden. Geben Sie die Besetzungsstruktur der Steifigkeitsmatrix an.