Übungsblatt 11

Diskussion des Blattes: Do., 12.1.2023

1. Betrachten Sie folgende (unendlich-dimensionale) Variante von Aufg. 10.3. Seien X, M Hilberträume, $a : X \times X \to \mathbb{R}$ stetige, symmetrische Bilinearform, $b : X \times M \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearform, $l \in X'$, $g \in M'$. Sei $u \in X$ ein Minimierer von

$$\min_{u \in X(g)} J(u), \qquad J(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - l(u), \qquad X(g) := \{u \in X \,|\, b(u,q) = g(q) \qquad \forall q \in M\}$$

Definieren Sie den Operator $\mathbf{B}^\top : M \to X'$ durch

$$\langle \mathbf{B}^\top \lambda, v \rangle_{X' \times X} = b(v, \lambda) \qquad \forall \lambda \in M, \quad v \in X$$

Zeigen Sie: Unter der Annahme, daß $\operatorname{Im} \mathbf{B}^\top$ abgeschlossen ist und daß die obige Minimierungsaufgabe eine Lösung $u \in X(g)$ hat, hat das folgende Sattelpunktproblem eine Lösung: finde $(u, \lambda) \in X \times M$ so daß

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= l(v) \qquad \forall v \in X \\ b(u,\mu) &= g(\mu) \qquad \forall \mu \in M \end{aligned}$$

Bemerkung: Tatsächlich ist die Forderung nach Abgeschlossenheit von $\operatorname{Im} \mathbf{B}^\top$ notwendig, um die Existenz eines “Lagrangemultiplikator” zu erhalten. Dies sieht man z.B. mit $X = L^2(0,1)$, $M = L^2(0,1)$, $a(u,v) = (u,v)_{L^2}$, $b(u,\lambda) = (u, \mathcal{A}\lambda)_{L^2}$, wobei der “Aufleitungsoperator” $(\mathcal{A}\lambda)(x) := \int_0^x \lambda(t)\,dt$. Dann ist $\operatorname{Ker} \mathbf{B} = \{0\}$ und man kann sich einfach überlegen, daß im Fall $g = 0$ und $l(v) := (f,v)_{L^2}$ mit $f \in L^2 \setminus H^1$ der Lagrangemultiplikator λ in der Sattelpunktformulierung nicht konstruiert werden kann.

2. Betrachten Sie ein regelmäßiges Dreiecksgitter $\mathcal{T}$ auf $(0,1)^2$ (bestehend aus rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreiecken). Betrachten Sie $X_N = (S_0^{1,1}(\mathcal{T}))^2$ und $M_N = S^{0,0}(\mathcal{T}) \cap L_0^2(\Omega)$. Geben Sie die Dimensionen von X_N und M_N an. Kann dieses Paar von Räumen für die Stokesbilinearform $b(\mathbf{u}, p) = \int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{u}$ inf-sup stabil sein?

3. Seien $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X, (Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ Hilberträume und $a : X \times X \to \mathbb{R}$ symmetrisch und koerziv. Sei $\mathbf{B} : X \to Y$ stetiger linearer Operator und $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ gegeben durch $b(u,v) := \langle \mathbf{B}u, v \rangle_Y$. Betrachten Sie für $t > 0$ und $l \in X'$ die Minimierungsaufgabe:

$$\min_{u \in X} \frac{1}{2} a_t(u,u) - l(u), \qquad a_t(u,u) := a(u,u) + t^{-2} \langle \mathbf{B}u, \mathbf{B}u \rangle_Y. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie: die eindeutige Lösung u des Minimierungsproblems (1) ist Lösung des folgenden “Sattelpunktproblems mit Strafterm”:

$$a(u,v) + b(v,\lambda) = l(v) \qquad \forall v \in X \tag{2a}$$
$$b(u,\mu) - t^2 \langle \lambda, \mu \rangle_Y = 0 \qquad \forall \mu \in Y. \tag{2b}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie wohl λ definiert wurde.

b) Betrachten Sie die folgende Verallgemeinerung des obigen Problems: Zu $g \in Y'$ finde $(u, \lambda) \in X \times Y$, so daß

$$\begin{aligned} a(u,v) + b(v,\lambda) &= l(v) \qquad \forall v \in X && \text{(3a)} \\ b(u,\mu) - t^2\langle \lambda, \mu\rangle_Y &= g(\mu) \qquad \forall \mu \in Y. && \text{(3b)} \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Falls die Bilinearform b die inf-sup-Bedingung

$$\inf_{0\neq\lambda\in Y} \sup_{0\neq u\in X} \frac{b(u,\lambda)}{\|u\|_X\|\lambda\|_Y} \geq \gamma > 0, \qquad \gamma \in (0,1),$$

erfüllt, dann ist dieses System eindeutig lösbar, und es existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von der Koerzivitätskonstante α_0 der Bilinearform a und den Normen $\|a\|$, $\|b\|$ abhängt, so daß für alle $t > 0$ gilt:

$$\|u\|_X + \|\lambda\|_Y \leq \frac{C}{\gamma}\left[\|l\|_{X'} + \|g\|_{Y'}\right].$$

Hinweis: Definieren Sie $\mathcal{B}((u,\lambda);(v,\mu)) := a(u,v) + b(v,\lambda) - b(u,\mu) + t^2\langle\lambda,\mu\rangle_Y$. 1.) Überlegen Sie sich Existenz und Eindeutigkeit von (u,λ). 2.) Zeigen Sie eine inf-sup Bedingung für $\mathcal{B}$, indem Sie zu gegebenem (u,λ) ein geeignetes (v,μ) konstruieren. Es ist hilfreich, die Fälle $\|u\| \geq \delta\|\lambda\|$ und $\|u\| < \delta\|\lambda\|$ für geeignetes δ (welches von γ, $\|a\|$ abhängen wird) zu betrachten.

Bemerkung: Der Beweis zeigt auch, dass man, falls abgeschlossene Unterräume $X_N \subset X$ und $Y_N \subset Y$ die diskrete inf-sup-Bedingung

$$\inf_{0\neq\lambda\in Y_N} \sup_{0\neq v\in X_N} \frac{b(v,\lambda)}{\|v\|_X\|\lambda\|_Y} \geq \gamma_N > 0$$

erfüllen, dann die a priori-Abschätzung

$$\|u - u_N\|_X + \|\lambda - \lambda_N\|_Y \leq C(1+\gamma_N^{-1}) \inf_{(v,\mu)\in X_N\times Y_N} \|u-v\|_X + \|\lambda-\mu\|_Y.$$

gilt.

4. ("locking" am Beispiel des Timoshenko-Balkens) Betrachten Sie für $\Omega = (0,1)$ den Raum $X = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ und (für kleine $t > 0$) die Bilinearform

$$a_t((w,\theta),(v,\vartheta)) := \underbrace{\int_\Omega \theta'\vartheta'}_{=:a((w,\theta),(v,\vartheta))} + t^{-2} \underbrace{\int_\Omega (w'-\theta)(v'-\vartheta)}_{=:\langle \mathbf{B}((w,\theta)),\mathbf{B}((v,\vartheta))\rangle_{L^2(\Omega)}}$$

Wir betrachten für gegebenes $l \in X'$ das Minimierungsproblem:

$$\min_{u\in X} \frac{1}{2}a_t(u,u) - l(u) \tag{4}$$

a) Überlegen Sie sich, daß $\operatorname{Ker}\mathbf{B}$ unendlichdimensional ist.

b) Zeigen Sie, daß die symmetrische Bilinearform a_t auf X koerziv ist.

c) **(optional)** Wir diskretisieren das Minimierungsproblem (4) indem wir zur uniformen Triangulierung $\mathcal{T}$ mit Maschenweite h den Raum $X_N = S_0^{1,1}(\mathcal{T}) \times S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ betrachten. Wir beobachten, daß $X_N \cap \operatorname{Ker} \mathbf{B} = \{0\}$.
Unser Ziel ist: Falls die exakte Lösung $0 \neq u = (w, \theta)$ in $\operatorname{Ker} \mathbf{B}$ liegt, dann gilt für den FEM-Fehler $u - u_N$, wobei $u_N = (w_N, \theta_N)$ die FEM-Approximation an u ist:

$$\|(\theta - \theta_N)'\|_{L^2(\Omega)} \geq \|\theta'\|_{L^2(\Omega)} \left(1 - C\frac{t}{h}\right),$$

für eine Konstante $C > 0$, die nur von Ω abhängt. Insbesondere folgt, daß man für $t \ll h$ keine Konvergenz erwarten kann. Gehen Sie wie folgt vor:

1. Zeigen Sie: $a_t(u - u_N, u - u_N) = \inf_{(v_N, \vartheta_N) \in X_N} \|\theta' - \vartheta_N'\|^2_{L^2(\Omega)} + t^{-2}\|v_N' - \vartheta_N\|^2_{L^2(\Omega)}$.
2. Zeigen Sie $a_t(u, u) = \|\theta'\|^2_{L^2(\Omega)}$.
3. Zeigen Sie: $\|f'\|_{L^2(K)} \leq Ch^{-1}\|f - \lambda\|_{L^2(K)}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, jedes Element $K \in \mathcal{T}$ und $f \in \mathcal{P}_1$. Schließen Sie: $\|v_N' - \vartheta_N\|_{L^2(\Omega)} \geq Ch\|\vartheta_N'\|_{L^2(\Omega)}$ für alle $(v_N, \vartheta_N) \in X_N$.
4. Zeigen Sie $\|\theta_N'\|_{L^2(\Omega)} \leq C\frac{t}{h}\|\theta'\|_{L^2(\Omega)}$. Verwenden Sie hierzu die Galerkinorthogonalität $a(u_N, u_N) = a(u, u) - a(u - u_N, u - u_N)$ und Céa's Lemma $a_t(u - u_N, u - u_N) \leq a_t(u, u) = \|\theta'\|^2_{L^2(\Omega)}$.

d) Formulieren Sie das Problem (4) als gemischtes Problem, indem Sie den Lagrangemultiplikator $\lambda = t^{-2}(w' - \theta)$ einführen. Zeigen Sie, daß die zugehörige Bilinearform $b((w, \theta), \mu) := \int_\Omega (w' - \theta)\mu$ eine eine inf-sup Bedingung erfüllt. Führen Sie hierzu ψ die stückweise lineare Funktion durch die Punkte $(0, 0)$, $(1/2, 1)$, $(1, 0)$, und machen Sie zu gegebenem μ den Ansatz $w = \int_0^x \mu(t)\, dt + A \int_0^x \psi(t)\, dt$, $\theta = -A\psi(x)$ mit geeignetem A.

e) Diskretisieren Sie die in d) erhaltene Formulierung, indem sie $(w, \theta) \in X$ durch Funktionen aus $X_N = S_0^{1,1}(\mathcal{T}) \times S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ approximieren und den Lagrangemultiplikator durch stückweise konstante Funktionen, d.h. im Raum $M_N = S^{0,0}(\mathcal{T})$ suchen. Zeigen Sie: die Bilinearform b ihrer Sattelpunktformulierung erfüllt die inf-sup-Bedingung mit einer Konstanten unabhängig von h (hinreichend klein).
Hinweis: Um die inf-sup-Bedingung nachzurechnen, müssen Sie zu gegebenem $\mu \in M_N$ Funktionen $(w, \theta) \in X_N$ konstruieren. Nehmen Sie an, daß $x = 1/2$ Gitterpunkt ist. Modifizieren Sie hierzu geeignet den Ansatz aus d), indem Sie anstelle von $\int_0^x \psi$ die Funktion $\int_0^x I^{0,0}\psi$ verwenden, wobei $I^{0,0}\psi$ eine stückweise konstante Approximation an ψ ist. Sie dürfen annehmen, daß h hinreichend klein ist.

f) **(optional)** Programmieren Sie die beiden Verfahren, d.h. die Energieminimierung basierend auf X_N und die Sattelpunktformulierung basierend auf $X_N \times M_N$. Testen Sie Ihr Programm für das Problem mit exakter Lösung

$$\theta(x) = g(x) - 6x(1 - x)\int_0^1 g(\xi)\, d\xi, \qquad w(x) = \int_0^x \theta(\xi)\, d\xi, \qquad g(x) = x^2(1 - x).$$