Übungsblatt 12

Diskussion des Blattes: Do., 19.1.2023

1. (Quadratur auf Dreiecken)

a) Der Einfachheit halber wählen Sie als Referenzdreieck T^{ref} das gleichseitige Dreieck

$$T^{ref} := \{(x, y) \mid -1 < x < 1, 0 < y < \sqrt{3}(1 - |x|)\}.$$

Bestimmen Sie eine Quadraturformel Q^1 für die Quadratur $\int_{T^{ref}} f(x, y)\, dx\, dy$, die den Integranden f in den drei Eckpunkten auswertet, so daß sie exakt für Polynome vom Grad 0 ist. Ist die Formel auch exakt für Polynome vom Grad 1?

b) Erzeugen Sie analog zu Teilaufg. a) eine Quadraturformel Q^2, die auf den Mittelpunkten der drei Kanten von T^{ref} basiert. Zeigen Sie, daß diese Formel sogar exakt für Polynome vom Grad 2 ist. Sie dürfen verwenden, daß

$$\int_{T^{ref}} y\, dx\, dy = 1, \qquad \int_{T^{ref}} N(x, y)\, dx\, dy = \sqrt{3}, \qquad N(x, y) = (y-\sqrt{3}(1-x))(y-\sqrt{3}(1+x)).$$

Bemerkung: Die drei Kantenmittelpunkte haben die baryzentrischen Koordinaten $(1/2, 1/2, 0)$, $(0, 1/2, 1/2)$, $(1/2, 0, 1/2)$. Es existiert noch eine zweite symmetrische Quadraturformel, welche exakt ist für Polynome vom Grad 2. Sie basiert auf den 3 Punkten (in baryzentrischen Koordinaten) $(2/3, 1/6, 1/6)$, $(1/6, 2/3, 1/6)$, $(1/6, 1/6, 2/3)$.

2. (Quadratur auf Dreiecken, II) Für Quadraturformeln hoher Ordnung auf Dreiecken transformiert man typischerweise auf ein Viereck ("Duffytransformation") und verwendet auf S eine Tensorproduktformel. Seien

$$T^{ref} = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < x\}, \qquad S = (0, 1)^2$$

und die Transformation $S \ni (\xi, \eta) \mapsto (x, y) = (\xi, \xi\eta) \in T^{ref}$.

a) Formulieren Sie den obigen Zugang mit einer Tensorproduktgaußformel mit n Quadraturpunkten für jede Koordinatenrichtung[1]. Für welche Polynome (auf T^{ref}) ist diese Quadraturformel exakt?

b) Programmieren Sie die obige Tensorproduktquadratur. Sie können die Routine `gauleg.m` der Homepage verwenden. (`polynomial.legendre.leggauss(n)` stellt die Punkte und Gewichte unter Python bereit.) Verwenden Sie Ihre Quadraturroutine zur Bestimmung der Integrale

$$\int_{T^{ref}} r^{\alpha} \sin r\, dx\, dy, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Plotten Sie das Konvergenzverhalten Ihrer Quadratur (Fehler gegen Anzahl Quadraturpunkte n^2 mit $n \in \{1, \ldots, 25\}$, doppelt logarithmisch) für $\alpha \in \{-3/2, -1, -1/2\}$.

[1] Ein bißchen effizienter ist eine Tensorproduktformel basierten auf einer geeigneten Jacobiquadratur (d.h. Gaußquadratur für Integrale mit Gewichtsfunktion) in der ξ-Variablen und einer Gaußquadratur in der η-Variablen — warum?

Exakte Werte sind

$$\begin{aligned}
\int_{T^{ref}} \sin(r) r^{-1}\, dx\, dy &\approx 0.44697015766020388924, \\
\int_{T^{ref}} \sin(r) r^{-1/2}\, dx\, dy &\approx 0.37699223516581230275, \\
\int_{T^{ref}} \sin(r) r^{-3/2}\, dx\, dy &\approx 0.56869721658735701496
\end{aligned}$$

Erklären Sie das Verhalten im Fall $\alpha = -1$.

c) (**optional**) Das Konvergenzverhalten aus Teilaufg. b) für die Fälle $\alpha \neq -1$ kann mittels geeigneten zusammengesetzten Quadraturformeln verbessert werden. Programmieren Sie eine zusammengesetzte Tensorprodukt Gaußformel für $S = (0,1)^2$, die darauf basiert, daß S in Rechtecke $(x_i, x_{i+1}) \times (0,1)$ zerlegt wird mit Knoten $0 = x_0 < x_1 = \sigma^L < x_2 = \sigma^{L-1} < \cdots < x_{L+1} = \sigma^0 = 1$. Auf jedem Rechteck $(x_i, x_{i+1}) \times (0,1)$ wird eine Tensorprodukt Gaußregel mit n Punkten (in jede Richtung) verwendet. Programmieren Sie diese Regel, und wiederholen Sie Teilaufg. b). Wählen Sie $\sigma = 0.15$ und $L = n$.

3. Zeigen Sie (8.6) des Skriptes, d.h.

$$\inf_{u \in L^2(\Omega)} \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in (H^1(\Omega))^2} \frac{\int_\Omega u \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}}{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}} \geq \gamma > 0.$$

Hinweis: Studieren Sie das Vorgehen im Beweis der Stabilität des Taylor-Hood Elementes für das Stokesproblem. Verwenden Sie den Satz von deRham (Satz 7.26 des Skriptes). Zu geg. $u \in L^2(\Omega) \setminus \{0\}$ suchen Sie ein $\boldsymbol{\sigma} \in (H^1(\Omega))^2$ von der Form $\boldsymbol{\sigma} = \overline{u}\mathbf{x} + \delta \widetilde{\mathbf{u}}$ für ein geeignetes $\overline{u} \in \mathbb{R}$ und geeignetes $\widetilde{\mathbf{u}} \in (H^1_0(\Omega))^2$. Der Parameter $\delta \in \mathbb{R}$ wird geeignet gewählt.

4. Sei I_K^{RT} der Raviart-Thomas Interpolationsoperator auf Element $K \in \mathcal{T}$, der in der Raum $RT_0(K)$ abbildet. Zeigen Sie:

a) $\|I_K^{RT} \boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)} \leq C \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(K)}$

b) $\|\operatorname{div} I_K^{RT} \boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)} \leq C \|\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)}$

c) $\|I_K^{RT} \boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(K)} \leq C \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(K)}$
Hinweis: Für a): Lemma 8.16. Für c): Verwenden Sie eine geeignete polynomielle Approximation $\Pi\boldsymbol{\varphi}$ und eine inverse Ungleichung.