Übungsblatt 4

Diskussion des Blattes: Do., 3.11.2022

1. Sei $I = (0,1)$ und $u \in H^1(I)$. Zeigen Sie: $|u| \in H^1(I)$. *Hinweis:* Approximieren Sie $|u(x)| = \sqrt{u^2(x) + \varepsilon^2}$.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Lipschitzgebiet. Es ist $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (sogar mit kompakten Einbettungen). Diese kompakte Einbettung drückt sich in den folgenden sog. "Interpolationsungleichungen" aus.

a) Zeigen Sie unter Verwendung eines Fortsetzungsoperators und geeigneter partieller Integration auf $\mathbb{R}^d$: Es gibt ein $C_\Omega > 0$ so daß

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^2(\Omega)$$

Sie dürfen annehmen, daß Sie Fortsetzungsoperatoren E zur Verfügung haben, die folgende Eigenschaft haben: $E : H^2(\Omega) \to H^2(\mathbb{R}^d)$ mit $\|Eu\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)}$ und $\|Eu\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$.

b) Zeigen Sie mittels einer geeigneten partiellen Integration und der Dichtheitsaussage, daß $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $H^2(\Omega)$ ist, daß für ein $C_\Omega > 0$

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{L^2(\Omega)} |u|_{H^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega).$$

c) Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|^{2/3}_{L^2(\Omega)} \|u\|^{1/3}_{H^3(\Omega)} \qquad \forall u \in H^3(\Omega)$$

3. Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Deny-Lions, daß für $k > 0$ (und beschränkte Lipschitzgebiete) gilt:

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} \leq C_\Omega \left[|u|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right] \qquad \forall u \in H^k(\Omega),$$

d.h. die Seminormen $|u|_{H^1(\Omega)}, \ldots, |u|_{H^{k-1}(\Omega)}$ sind "überflüssig".

4. Sei $\Omega = (0,1)^2$ das Einheitsquadrat unterteilt in $N \times N$ Rechtecke. Jedes Rechteck sei weiter in zwei Dreiecke unterteilt wie in untenstehender Figur für $N = 3$ angedeutet. Betrachten Sie die finite Elementdiskretisierung des Problems

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit stückweise linearen Ansatzfunktionen auf dem Dreiecksgitter. Stellen Sie die Steifigsmatrix auf. Hierzu ist es zweckmäßig, die Knoten mit doppelten Indizes (i,j) für $i,j = 0,\ldots,N$ zu behandeln, wobei der Knoten mit Index (i,j) die Koordinaten $x_{ij} = (ih, jh)$ mit $h = 1/N$ hat. Vergleichen Sie die Matrix mit der finiten Differenzenmatrix für das gleiche Problem. Die Formulierung durch finite Differenzen ist gegeben durch das Gleichungssystem

$$\frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h^2} = f_{ij} := f(x_{ij}), \qquad i,j = 1,\ldots,N-1$$

sowie den Randbedingungen

$$u_{ij} = 0 \qquad \text{falls } i \text{ oder } j \in \{0, N\}.$$

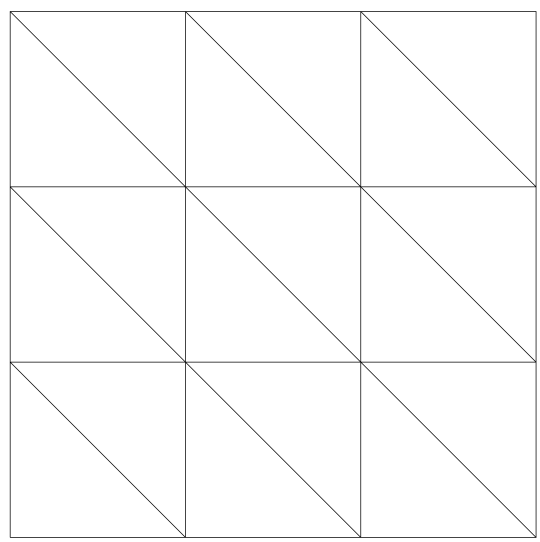

Abbildung 1: Beispielgitter für Aufg. 4 für $N = 3$