Übungsblatt 9

Diskussion des Blattes: Do., 15.12.2022

1. Sei $\Omega = (0,1)$ ein Intervall. Betrachten Sie die das Randwertproblem

$$-\left(a(x)u'\right)' + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

wobei die Koeffizienten a, c glatt seien und die Elliptizitätsbedingung

$$a(x) \geq \underline{a} > 0, \qquad c(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

gelte. Sei $\mathcal{T}$ ein Gitter auf Ω, und bezeichne $u_N \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ die FE-Approximation. Definieren Sie für jedes $K \in \mathcal{T}$

$$\eta_K^2 := h_K^2 \|f - (-\left(au_N'\right)' + cu_N)\|_{L^2(K)}^2.$$

Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, die unabhängig vom Gitter $\mathcal{T}$ und von u ist, so daß für den FE-Fehler $\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)}$ gilt:

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}} \eta_k^2.$$

Hinweis: Gehen Sie vor wie in der Vorlesung. Verwenden Sie jedoch den stückweise linearen Interpolanten anstelle des Clémentinterpolanten.

2. Betrachten Sie wiederum das Randwertproblem aus Aufgabe 1. Definieren Sie für jedes Element $K \in \mathcal{T}$ die Ausdrücke

$$B_K(u,v) := \int_K au'v' + cuv, \qquad r_K := f - (-\left(au_N'\right)' + cu_N)$$

wobei $u_N \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ die FEM-Approximation ist. Definieren Sie die Energienorm $\|\cdot\|_E$ und die Elementenergienorm $\|\cdot\|_{E,K}$ durch $\|u\|_E^2 = B(u,u)$ und $\|u\|_{E,K}^2 = B_K(u,u)$.

a) (*Dirichletschätzer*) Für jedes Element K sei $\Phi_K^D \in H_0^1(K)$ die Lösung von

$$-\left(a(\Phi_K^D)'\right)' + c\Phi_K^D = r_K \qquad \text{auf } K, \qquad \Phi_K^D = 0 \quad \text{auf } \partial K.$$

Dann gilt:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \|\Phi_K^D\|_{E,K}^2 \leq \|u - u_N\|_E^2.$$

b) (*Neumannschätzer*) Seien die Elemente K_i der Triangulierung von der Form $K_i = (x_i, x_{i+1})$, $i = 0, \ldots, N-1$. Sei für jeden Knoten x_i ein Wert $J_i \in \mathbb{R}$ (beliebig) gewählt. Definiere den Raum $V_i \subset H^1(K_i)$ durch: $V_i = H^1(K_i)$ für $i = 1, \ldots, N-1$ und $V_0 = \{v \in H^1(K_0) \colon v(0) = 0\}$ und $V_N = \{v \in H^1(K_N) \colon v(1) = 0\}$. Definiere R_{K_i} durch

$$R_{K_i}(v) := \int_{K_i} fv - B_{K_i}(u_N, v)$$

Für jedes Element K_i sei $\Phi_{K_i}^N \in V_i$ definiert durch

$$B_{K_i}(\Phi_{K_i}^N, v) = R_{K_i}(v) + J_{i+1}v(x_{i+1}) - J_i v(x_i) \qquad \forall v \in V_i$$

Zeigen Sie: Unter der Voraussetzung, daß Funktionen $\Phi_{K_i}^N$ existieren (für den Fall $c \equiv 0$ ist dies eine implizite Annahme an die Werte J_i) gilt

$$\|u - u_N\|_E^2 \leq \sum_K \|\Phi_K^N\|_{E,K}^2.$$

c) (Fortsetzung des Neumannschätzers) Sei φ_i die Hutfunktion, die mit dem Knoten x_i assoziiert ist. Zeigen Sie: wählt man $J_i := R_{K_i}(\varphi_i)$ für die inneren Knoten x_i, $i = 1, \ldots, N-1$, so gilt für die inneren Elemente K_i, $i = 1, \ldots, N-2$, die "Äquilbrierungsbedingung"

$$R_{K_i}(1) + J_{i+1} - J_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, N-2. \tag{1}$$

(Die Werte J_0 und J_N können natürlich so gewählt werden, daß die Äquilibrierungsbedingung (1) auch für K_0 und K_{N-1} gilt.)

Bemerkung: Diese Wahl der J_i ist "natürlich": Sie erzwingt die Äquilibrierungsbedingung, die gelten muß, damit im Fall $c \equiv 0$ die Neumannprobleme lösbar sind; weiters sind die Werte $J_i \approx u'(x_i) \approx u_N'(x_i+) \approx u_N'(x_i-)$, was man fordern sollte, wenn Φ eine gute Approximation an den Fehler $u - u_N$ sein soll (Warum?).

3. (Prager-Synge) Betrachten Sie das Poissonproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{ auf } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

mit Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$. Sei $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Sei $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ein (hinreichend glattes) Vektorfeld auf Ω mit $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = -f$ auf Ω. Zeigen Sie:

$$(\nabla(u - v), \nabla u - \boldsymbol{\sigma})_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Schließen Sie auf

$$\|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u - \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla v - \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Bemerkung: Diese Gleichung kann für Fehlerschätzung ausgenutzt werden: man wählt $v = u_N$ und konstruiert aus diesem v ein $\boldsymbol{\sigma}$, und dann liefert $\|\nabla u_N - \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(\Omega)}$ eine obere Abschätzung für den FEM-Fehler.

4. In der LVA wurde Konvergenz des adaptiven Algorithmus (Alg. 6.9) für den Elementfehlerschätzer

$$\eta^2(K, u_N) := h_K^2 \|f + \Delta u_N\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(\mathcal{T}_\ell)} h_K \|[\partial_n u_N]\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_N} h_K \|g - \partial_n u_N\|_{L^2(e)}^2$$

mit der Definition $h_K = |K|^{1/2}$ bewiesen. Zeigen Sie, daß der Algorithmus auch mit der Definition $h_K = \operatorname{diam} K$ konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, daß die Kontraktionsaussage aus Lemma 6.13 für *jedes* $\theta \in (0, 1)$ gilt. (In der VO wurde das nur für θ hinreichend nahe bei 1 bewiesen, aber die Aussage gilt tatsächlich für *jedes* $\theta \in (0, 1)$, wenn man etwas sorgfältiger vorgeht, als ich es getan habe.) Überlegen Sie sich, daß die beiden Fehlerschätzer äquivalent sind.