# Übungsblatt 3

Diskussion des Blattes: Do., 3.11.2022

**1.** Sei $B$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$. Betrachten Sie auf $B$ die Funktion $u(x) := |x|^\alpha$. Geben Sie hinreichende Bedingungen an, so daß $u \in H^k(B)$.

**2.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

**a)** Zeigen Sie: $H_0^1(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $H^1(\Omega)$.

**b)** Zeigen Sie: Für $u \in H^1(\Omega)$ gilt $|u(x)-u(y)| \leq \sqrt{|x-y|}\|u'\|_{L^2(\Omega)}$. *Hinweis:* Zeigen Sie die Aussage zuerst unter der Annahme, daß $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Verwenden Sie dann die Aussage, daß $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt.

**c)** Zeigen Sie mittels b) und dem Satz von Arzelà-Ascoli, daß $H^1(\Omega)$ kompakt in den $L^2(\Omega)$ eingebettet ist.

**3.** Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ die (euklidische) Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$. Sei $u(x) := \ln(-\ln|x|/e)$ (wobei $|x|$ die euklidische Norm von $x$ ist). Zeigen Sie: $u \in H_0^1(\Omega)$ (also: $u \in H^1(\Omega)$ und $\gamma_0 u = 0$) aber $u \notin L^\infty(\Omega)$.

**4.** (Fortsetzungsoperatoren für "glatte" Gebiete) Ziel: falls $\partial\Omega$ in $C^k$ ist, dann existiert ein Fortsetzungsoperator $E : H^k(\Omega) \to H^k(\mathbb{R}^d)$.

**a)** Sei $\Omega = (0,1)$ und $\widehat{\Omega} = (-1,1)$. Sei $u \in C^1([0,1])$. Setzen Sie $u$ zu einer Funktion $Eu \in C^1(-1,1)$ fort. Machen Sie hierzu den Ansatz für $x < 0$: $(Eu)(x) := \alpha_0 u(-x/2) + \alpha_1 u(-x/3)$ und bestimmen Sie $\alpha_0$, $\alpha_1$. Zeigen sie, daß sich $E : H^1(\Omega) \to H^1(-1,1)$ fortsetzen läßt. Zeigen Sie, daß sogar $E : H^2(\Omega) \to H^2(-1,1)$ gilt.

**b)** Seien $1 > q_0 > q_1 > \cdots > q_k > 0$. Konstruieren Sie wie in a) eine $C^k$-Fortsetzung einer Funktion $u \in C^k([0,1])$ auf $\widehat{\Omega}$ mittels des Ansatzes $(Eu)(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i u(-q_i x)$ für $x < 0$. Für welche Sobolevräume $H^s$ gilt $E : H^s(\Omega) \to H^s(\widehat{\Omega})$ ist stetig?

**c)** Sei $\Omega = (-1,1)^{d-1} \times (0,1)$ und $\widehat{\Omega} = (-1,1)^{d-1} \times (-1,1)$. Konstruieren Sie einen Fortsetzungsoperator $E : H^k(\Omega) \to H^k(\widehat{\Omega})$.