Übungsblatt 8

Diskussion des Blattes: Do., 1.12.2022

1. (Inverse Abschätzungen)

a) Betrachten Sie ein uniformes Gitter auf $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ mit Gitterweite $h \in (0,1)$. Zeigen Sie die folgende *inverse Ungleichung*:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{-1}\|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in S^{p,1}(\mathcal{T}). \tag{1}$$

Hinweis: Zeigen Sie, daß auf dem Referenzelement $\hat{K}$ für geeignetes $C > 0$ gilt:

$$\|u\|_{L^2(\hat{K})} \leq \|u\|_{H^1(\hat{K})} \leq C\|u\|_{L^2(\hat{K})} \qquad \forall u \in \mathcal{P}_p,$$

b) Sei $\mathcal{T}$ ein reguläres, affines, γ-formreguläres Gitter. Zeigen Sie, daß eine Konstante $C > 0$ gibt, die nur von γ abhängt, so daß die folgende *inverse Abschätzung* gilt:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\underline{h}^{-1}\|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in S^{1,1}(\mathcal{T}),$$

wobei $\underline{h} = \min_{K\in\mathcal{T}} h_K \leq 1$.

2. Sei $\mathcal{T}$ eine quasi-uniforme Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$ mit Gitterweite h. Sei $\mathbf{A}$ die Steifigkeitsmatrix, die durch Diskretisierung von

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit den Hutfunktionen entsteht. Zeigen Sie:

a) Für alle $u \in S^{1,1}(\mathcal{T})$ gilt: $C_1\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq h^d \sum_{i=1}^N |\mathbf{u}_i|^2 \leq C_2\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$.

b) Zeigen Sie: Die symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ erfüllt

$$\lambda_{max}(\mathbf{A}) \leq Ch^{d-2}, \qquad \lambda_{min}(\mathbf{A}) \geq Ch^d.$$

Geben Sie eine Abschätzung der Konditionszahl $\kappa_2(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2\|\mathbf{A}^{-1}\|_2$ an.

3. Es soll die inverse Ungleichung (1) aus Aufgabe 1 numerisch überprüft werden. Seien hierzu $\mathbf{B}$ und $\mathbf{M}$ die Steifigkeitsmatrix und die Massematrix, die zu den Bilinearformen

$$B(u,v) = \int_\Omega u'v' + uv, \qquad M(u,v) = \int_\Omega uv$$

gehören.

a) Überlegen Sie sich, daß

$$\Lambda = \max_{0\neq u\in S^{p,1}(\mathcal{T})} \frac{B(u,u)}{M(u,u)}$$

der größte Eigenwert des (verallgemeinerten) Eigenwertproblems

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{u}$$

ist.

b) Schreiben Sie Ihren 1D-FEM Code von Blatt 7 so um, daß er (für verschiedene Werte von p und Schrittweiten h) die Konstante Λ bestimmt. *Hinweis:* In MATLAB können Sie den Befehl `eigs(B,M,1)` verwenden. Plotten Sie für $p \in \{1, 2, 3\}$ den Wert von Λ gegen $h = 2^{-j}$, $j = 1, \dots, 6$.

4. Zeigen Sie: die Poincarékonstante C_P in der 1. Poincaréungleichung, d.h.

$$C_P = \sup_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}}{|u|_{H^1(\Omega)}}$$

ist der Kehrwert der Wurzel des kleinsten Eigenwert des Eigenwertproblems: Finde $(u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$, so daß

$$-\Delta u = \lambda u \qquad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2}$$

Hinweis: Betrachten Sie eine Folge $(u_n)_n$, die das Supremum realisiert. Normieren sie o.B.d.A. $\|u_n\|_{L^2} = 1$. Überlegen Sie sich, daß der Grenzwert u einer Teilfolge tatsächlich eine (schwache) Lösung eines Eigenwertproblems vom Typ (2) ist.