6.6.1 Konvergenz von adaptiven Verfahren: ein axiomatischer Zugang

Die Arbeit [**?**] hat die wesentlichen Mechanismen des Beweises von Satz 6.29 herausgearbeitet und verallgemeinert. Wir stellen das Vorgehen aus [**?**] kurz dar.

Wir erinnern daran, daß

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{n+1} &= (\mathcal{T}_{n+1} \cap \mathcal{T}_n) \cup (\mathcal{T}_{n+1} \setminus \mathcal{T}_n) = \text{nicht verf. Elemente} \cup \text{Elemente, die verfeinert wurden}\\ \mathcal{T}_n &= (\mathcal{T}_{n+1} \cap \mathcal{T}_n) \cup (\mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}_{n+1}) = \text{nicht verf. Elemente} \cup \text{Elemente, die verfeinert werden.}\end{aligned}$$

Der Konvergenzbeweis basiert auf folgenden "Axiomen" (A1)–(A4):

(A1) (Stabilität auf unverfeinerten Elementen)

$$\eta_{n+1}(\mathcal{T}_n \cap \mathcal{T}_{n+1}, u_{n+1}) \le \eta_n(\mathcal{T}_n \cap \mathcal{T}_{n+1}, u_n) + C\|u_{n+1} - u_n\|_E$$

(A2) (Kontraktion auf verfeinerten Elementen) $\exists q \in (0,1)$ s.d.

$$\eta_{n+1}(\mathcal{T}_{n+1} \setminus \mathcal{T}_n, u_{n+1}) \le q\eta_n(\mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}_{n+1}) + C\|u_{n+1} - u_n\|_E$$

(A3) (Zuverlässigkeit)

$$\|u - u_n\|_E \le C\eta_n(\mathcal{T}_n, u_n)$$

(A4) (Satz des Pythagoras)

$$\|u - u_n\|_E^2 = \|u - u_{n+1}\|_E^2 + \|u_{n+1} - u_n\|_E^2$$

Lemma 6.31 *Definiert man den Fehlerschätzer*

$$\eta_n^2(K, v) := h_K^2\|f + \Delta v\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}} h_e\|[\partial_n v]\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_N} h_e\|g - \partial_n v\|_{L^2(e)}^2$$

mit $h_K := |K|^{1/2}$, $h_e := h_K$, *so erfüllt* η_n *die Bedingungen (A1) und (A2).*

Beweis: *ad (A1):* Eine Variante der Dreiecksungleichung zeigt für beliebige Teilmengen $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}_n$ und Funktionen u, v:

$$\eta_n(\mathcal{G}, u) \le \eta_n(\mathcal{G}, v) + \sqrt{\sum_{K\in\mathcal{G}} h_K^2\|\Delta(u - v)\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}} h_e\|[\partial_n(u - v)]\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_N} h_e\|\partial_n(u - v)\|_{L^2(e)}^2} \tag{6.54}$$

Falls u, v stückweise Polynome sind, dann folgt mit inversen Ungleichungen

$$\begin{aligned}\|\Delta(u - v)\|_{L^2(K)} &\le Ch_K^{-1}\|\nabla(u - v)\|_{L^2(K)},\\ \|[\partial_n(u - v)]\|_{L^2(e)} &\le Ch_e^{-1/2}\|\nabla(u - v)\|_{L^2(\omega_e)}, \quad e \in \mathcal{E},\\ \|[\partial_n(u - v)]\|_{L^2(e)} &\le Ch_e^{-1/2}\|\nabla(u - v)\|_{L^2(\omega_e)}, \quad e \in \mathcal{E}_N.\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

ad (A2): Zur Illustration betrachten wir nur den Beitrag $h_K^2\|f + \Delta v\|_{L^2(K)}^2$ und nur eine Zerlegung in 2 Söhne: $K = K_1 \cup K_2$. Wie in (6.54) zeigt man

$$\eta_{n+1}(\mathcal{G}, u_{n+1}) \le \eta_{n+1}(\mathcal{G}, u_n) + C\|u_{n+1} - u_n\|_E$$

Um $\eta_{n+1}(\mathcal{G}, u_n)$ mit $\mathcal{G} = \mathcal{T}_{n+1} \setminus \mathcal{T}_n$ zu kontrollieren, sei $K \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}_{n+1}$ mit Söhnen K_1, K_2. Wesentlcih ist die Beobachtung

$$h_{K_1} = h_{K_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}h_K.$$

Damit

$$\begin{aligned}\eta_{n+1}^2(\{K_1,K_2\},u_n) &= h_{K_1}^2\|f+\Delta u_n\|_{L^2(K_1)}^2 + h_{K_2}^2\|f+\Delta u_n\|_{L^2(K_2)}^2 \\ &= \frac{1}{2}h_K^2\left(\|f+\Delta u_n\|_{L^2(K_1)}^2 + \|f+\Delta u_n\|_{L^2(K_2)}^2\right) = \frac{1}{2}h_K^2\|f+\Delta u_n\|_{L^2(K)}^2.\end{aligned}$$

Tatsächlich erreicht man so (mit einer analogen Rechnung für die Kantensprünge)

$$\eta_{n+1}^2(\{K_1,K_2\},u_n) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_n^2(K,u_n).$$

□

Lemma 6.32 *Die Annahmen (A1), (A2) implizieren die Existenz von $\gamma \in (0,1)$ und $C > 0$, so daß*

$$\eta_{n+1}^2(\mathcal{T}_{n+1},u_{n+1}) \le \gamma^2\eta_n^2(\mathcal{T}_n,u_n) + C\|u_{n+1}-u_n\|_E^2,$$

falls $\mathcal{T}_{n+1}$ aus $\mathcal{T}_n$ mittels Algorithmus 3 mit $\theta \in (0,1)$ erzielt wird.

Beweis: *1. Schritt:* Sei $\mathcal{M}_n$ die Menge der markierten Elemente in Alg. 3. Dann ist $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}_{n+1}$, und wir schätzen ab:

$$\theta\eta_n^2(\mathcal{T}_n,u_n) \le \sum_{K\in\mathcal{M}_n}\eta_n^2(K,u_n) \le \sum_{K\in\mathcal{T}_n\setminus\mathcal{T}_{n+1}}\eta_n^2(K,u_n) = \eta_n^2(\mathcal{T}_n,u_n) - \sum_{K\in\mathcal{T}_n\cap\mathcal{T}_{n+1}}\eta_n^2(K,u_n)$$

Damit ergibt sich

$$\eta_n^2(\mathcal{T}_n\cap\mathcal{T}_{n+1},u_n) \le (1-\theta)\eta_n^2(\mathcal{T}_n,u_n). \tag{6.55}$$

2. Schritt: Für beliebiges $\delta > 0$ rechnen wir:

$$\begin{aligned}\eta_{n+1}^2(\mathcal{T}_{n+1},u_{n+1}) &= \eta_{n+1}^2(\mathcal{T}_{n+1}\cap\mathcal{T}_n,u_{n+1}) + \eta_{n+1}^2(\mathcal{T}_{n+1}\setminus\mathcal{T}_n,u_{n+1}) \\ &\overset{(A1),(A2)}{\le} (1+\delta)\eta_n^2(\mathcal{T}_{n+1}\cap\mathcal{T}_n,u_n) + (1+\delta)q^2\eta_n^2(\mathcal{T}_n\setminus\mathcal{T}_{n+1},u_n) + C\delta^{-1}\|u_{n+1}-u_n\|_E^2, \\ &= (1+\delta)\eta_n^2(\mathcal{T}_{n+1}\cap\mathcal{T}_n,u_n) + (1+\delta)q^2\eta_n^2(\mathcal{T}_n,u_n) - (1+\delta)q^2\eta_n^2(\mathcal{T}_n\cap\mathcal{T}_{n+1},u_n) + C\delta^{-1}\|u_{n+1}-u_n\|_E^2, \\ &= (1+\delta)q^2\eta_n^2(\mathcal{T}_n,u_n) + (1+\delta)(1-q^2)\eta_n^2(\mathcal{T}_n\cap\mathcal{T}_{n+1},u_n) + C\delta^{-1}\|u_{n+1}-u_n\|_E^2, \\ &\overset{\text{1. Schritt}}{\le} (1+\delta)\left[q^2+(1-q^2)(1-\theta)\right]\eta_n^2(\mathcal{T}_n,u_n) + C\delta^{-1}\|u_{n+1}-u_n\|_E^2 \\ &= (1+\delta)\left[1-(1-q^2)\theta\right]\eta_n^2(\mathcal{T}_n,u_n) + C\delta^{-1}\|u_{n+1}-u_n\|_E^2.\end{aligned}$$

Wählt man nun δ so klein, daß $\gamma^2 := (1+\delta)(1-(1-q^2)\theta) < 1$, ist der Beweis abgeschlossen. □

Lemma 6.33 *Sei $(V_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge von geschachtelten, abgeschlossenen Räumen, d.h. $\overline{V}_{n+1} = V_{n+1} \subset V_n = \overline{V}_n$ für alle n. Seien $u_n \in V_n$ die zugehörigen Galerkinapproximationen an u. D.g.: Es existiert u_∞ mit $u_n \to u_\infty$ (in H^1) und damit $\|u_{n+1}-u_n\|_{H^1} \to 0$ für $n \to \infty$.*

Beweis: Die Konvergenz $\|u_{n+1}-u_n\|_{H^1} \to 0$ folgt aus der Konvergenz $u_n \to u_\infty$. Für die Existenz von u_∞, sei $V_\infty := \overline{\cup_n V_n}$ und $u_\infty \in V_\infty$ die Galerkinapproximation an u. Dann gelten die Galerkinorthogonalitäten

$$\begin{aligned}B(u_\infty,v) &= \ell(v) \quad \forall v \in V_\infty, \\ B(u_n,v) &= \ell(v) \quad \forall v \in V_n \subset V_\infty.\end{aligned}$$

Genau wie bei der *a priori* Analyse schließen wir auf

$$\|u_\infty-u_n\|_E \le \inf_{v\in V_n}\|u_\infty-v\|_E.$$

Weil nach Konstruktion $\cup_n V_n$ dicht in V_∞ ist, folgt $u_\infty = \lim_n u_n$. □

Korollar 6.34 *Für die Folge $(u_n)_n$, die mit Alg. 3 erzeugt wird, gilt*

(i) $\eta_n \to 0$ *für* $n \to \infty$

(ii) Wegen (A3) folgt sogar $\|u - u_n\|_E \to 0$ *für* $n \to \infty$.

Beweis: (ii) folgt aus (i). Für (i) verwenden wir $\eta_{n+1}^2 \leq \gamma^2 \eta_n^2 + C\|u_{n+1} - u_n\|_E^2$ aus Lemma 6.32 und $\|u_{n+1} - u_n\|_E \to 0$ für $n \to \infty$ aus Lemma 6.33, denn es gilt allgemein, falls $(e_n)_n$ eine Folge nichtnegativer Zahlen ist, $(\varepsilon_n)_n$ eine Nullfolge, $\gamma \in (0,1)$ und $e_{n+1} \leq \gamma e_n + \varepsilon_n$, daß dann $(e_n)_n$ eine Nullfolge ist:

$$e_n \leq \gamma e_{n-1} + \varepsilon_{n-1} \leq \gamma^2 e_{n-2} + \gamma \varepsilon_{n-2} + \varepsilon_{n-1} \leq \cdots \leq \gamma^n e_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma^j \varepsilon_{n-1-j}$$

Weil $(\varepsilon_n)_n$ eine Nullfolge ist, gibt es für gegebenes $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Damit für $n \geq n_0 + 1$

$$e_n \leq \gamma^n e_0 + \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1-n_0} \gamma^j |\varepsilon_{n-1-j}|}_{\leq \frac{1}{1-\gamma}\varepsilon} + \underbrace{\sum_{j=n-n_0}^{n-1} \gamma^j |\varepsilon_{n-1-j}|}_{\to 0 \text{für } n \to \infty \text{ und festes } n_0}$$

□

Tatächlich konvergiert die Folge $(\eta_n)_n$ sogar mit einer Rate:

Lemma 6.35 *Aus (A1), (A2), (A3), (A4) folgt für die Folge $(u_n)_n$, die mit Alg. 3 erzeugt wird, daß es ein $C > 0$ und ein $q \in (0,1)$ gibt, so daß*

$$\eta_{k+n} \leq C q^k \eta_n \qquad \forall n, k \in \mathbb{N}_0$$

Beweis: *1. Schritt:* Wir behaupten: $\sum_{k=n+1}^{\infty} \eta_k^2 \leq C\eta_n^2$. Um das zu sehen, berechnen wir (streng genommen müssen die Summen bis ∞ durch Summen bis N ersetzt werden, um sicherzustellen, daß alle auftretenden Terme endlich sind)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} \eta_k^2 &\overset{\text{L. 6.32}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\gamma^2 \eta_{k-1}^2 + C\|u_k - u_{k-1}\|_E^2\right) \\
&\overset{\text{(A4)}}{=} \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma^2 \eta_{k-1}^2 + C\|u - u_n\|_E^2 \\
&\overset{\text{(A3)}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma^2 \eta_{k-1}^2 + C\eta_n^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma^2 \eta_k^2 + (C + \gamma^2)\eta_n^2,
\end{aligned}$$

woraus wie auf

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \eta_k^2 \leq \frac{C + \gamma^2}{1 - \gamma^2} \eta_n^2$$

schließen.

2. Schritt: Sei $(x_n)_n$, $x_n \geq 0$, eine Folge mit $\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \leq C_1 x_n$ für alle n. Dann existieren $C > 0$, $q \in (0,1)$ mit

$$\forall k, n \in \mathbb{N}_0 \quad : \quad x_{n+k} \leq C q^k q_n.$$

Um das zu sehen, bemerken wir:

$$\left(1 + \frac{1}{C_1}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k + x_n = \sum_{k=n}^{\infty} x_k.$$

Damit folgt

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \le \underbrace{\frac{C_1}{1+C_1}}_{=:q\in(0,1)} \sum_{k=n}^{\infty} x_k$$

Induktiv schließen wir

$$x_{k+n} \le \sum_{m=k+n}^{\infty} x_m \le q^k \sum_{m=n}^{\infty} x_m = q^k \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} x_m + x_n \right) \le q^k (C_1+1) x_n.$$

□

Damit konvergiert der Fehlerschätzer (und damit auch der Fehler) linear. Die Konvergenz ist sogar optimal in einem geeigneten Sinn.

Definition 6.36 *$u \in H^1(\Omega;\Gamma_D)$ heißt mit Rate $s \ge 0$ approximierbar, falls*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}_0} \inf_{\substack{\mathcal{T}:\,|\mathcal{T}|=|\mathcal{T}_0|+N,\\ \mathcal{T} \text{ ist Verfeinerung von } \mathcal{T}_0}} N^s \eta_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}, u_{\mathcal{T}}) < \infty.$$

Hier ist $u_{\mathcal{T}}$ die Galerkinapproximation auf dem Gitter $\mathcal{T}$, und $\eta_{\mathcal{T}}$ bezeichnet den Fehlerschätzer, der zum Gitter $\mathcal{T}$ gehört.

Satz 6.37 *Sei u mit Rate s approximierbar. Für $\theta \in (0,1)$ hinreichend klein liefert Alg. 3 eine Folge $(\mathcal{T}_n)_n$ von Gittern so daß*

$$\eta_n(\mathcal{T}_n, u_n) \le C|\mathcal{T}_n|^{-s}$$