# Übungsblatt 2

Diskussion des Blattes: Do., 20.10.2022

**1.** Betrachten Sie das Setting von Aufg. 1.2. Sei $V_N \subset V$ endlich-dimensionaler Teilraum. Zeigen Sie: Der Ritzprojektor $P : V \to V_N$ gegeben durch die Bedingung $\langle \mathbf{B}(Pu), v\rangle_{V'\times V} = \langle \mathbf{B}(u), v\rangle_{V'\times V}$ für alle $v \in V_N$ ist wohldefiniert, erfüllt die Projektionseigenschaft $P^2 = P$ und ist lipschitzstetig, d.h. es existiert $C > 0$ (unabhängig von $V_N$), so daß

$$\|Pu - Pv\|_V \leq C\|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

Zeigen Sie weiters das Analogon zum Céa-Lemma: es gibt $C' > 0$ (unabhängig von $V_N$) mit

$$\|u - Pu\|_V \leq C' \min_{v\in V_N} \|u - v\|_V \quad \forall u \in V.$$

**2.** (Variationsungleichungen) Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung von Satz 2.12 des Skriptes: Sei $V$ Vektorraum, $B : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform mit $B(u, u) > 0$ für alle $0 \neq u \in V$. Sei $l : V \to \mathbb{R}$ eine Linearform. Definiere

$$J : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \qquad u \mapsto J(u) := \frac{1}{2}B(u, u) - l(u)$$

Sei $\mathcal{U} \subset V$ eine abgeschlossene, konvexe (nichtleere) Menge. Dann gilt: $u \in \mathcal{U}$ ist genau dann ein Minimierer von $J$, falls

$$B(u, v - u) \geq l(v - u) \qquad \forall v \in \mathcal{U}.$$

**3.** (Strang Lemma) Sei $V$ ein normierter Raum und $V_N \subset V$ abgeschlossener Unterraum. Sei $B$ stetige Bilinearform (mit Stetigkeitskonstante $M \geq 1$) und $l \in V'$. Sei $B_N : V_N \times V_N \to \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform mit

$$\alpha_N\|u\|_V^2 \leq B_N(u, u) \qquad \forall u \in V_N$$

für ein $\alpha_N > 0$. Sei $l_N \in V_N'$ eine stetige Linearform auf $V_N$. Es gelte

$$B(u, v) = l(v) \qquad \forall v \in V, \qquad B_N(u_N, v) = l_N(v) \qquad \forall v \in V_N.$$

Zeigen Sie:

$$\|u-u_N\|_V \leq \inf_{v\in V_N} \left[\left(1 + \frac{M}{\alpha}\right)\|u - v\|_V + \frac{1}{\alpha}\left(\sup_{w\in V_N} \frac{|B(v, w) - B_N(v, w)|}{\|w\|_V} + \sup_{w\in V_N} \frac{|l(w) - l_N(w)|}{\|w\|_V}\right)\right].$$

*Hinweis:* starten Sie mit einer Abschätzung für $\|u_N - v\|_V$.

*Bemerkung:* In der Praxis werden Bilinearformen und Linearformen z.B. mit Quadratur ausgewertet. Die Abschätzung erlaubt Ihnen dann, den Quadraturfehler zu berücksichtigen.

**4.** **a)** Sei $\Omega = (0, 1)$ und $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$. Betrachten Sie den Raum $X := \{u \in C(\overline{\Omega}) \,|\, u|_{[x_i,x_{i+1}]}) \in C^1([x_i, x_{i+1}]), i = 0, \ldots, N - 1\}$. Zeigen Sie: $X \subset H^1(\Omega)$. Was würde passieren, wenn Sie die Bedingung $u \in C(\overline{\Omega})$ fallenlassen?

**b)** Sei $\Omega_1 = (-1, 0) \times (0, 1)$, $\Omega_2 = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$ und gelte $u|_{\overline{\Omega_i}} \in C^1(\overline{\Omega_i})$, $i \in \{1, 2\}$. Zeigen Sie: $u \in H^1(\Omega)$. Was passiert, wenn man die Forderung der Stetigkeit über die Kante $\{(0, y) \,|\, y \in (0, 1)\}$ fallen läßt?