Kapitel 11

parabolische Probleme

Vorbemerkung: viele zeitabhängige Probleme werden durch parabolische Gleichungen beschrieben, z.B.

- die Wärmeleitungsgleichung $u_t - \Delta u = f$ in $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$
- die Navier-Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \mu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= f \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: die Zeitvariable t ist ausgezeichnet: die höchste Ableitungsordnung nach t ist 1 während sie nach den Ortsvariablen 2 ist.

Wir betrachten die (lineare) Wärmeleitungsgleichung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und zu gegebenem f, u_0

$$u_t - \Delta u = f \qquad \textit{auf } \Omega_T := \Omega \times (0, T), \tag{11.1a}$$

$$u(x, t) = 0 \qquad \forall\, x \in \Gamma_T := \partial\Omega \times (0, T), \qquad \text{“parabolischer Rand”} \tag{11.1b}$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \qquad \textit{auf } \Omega \tag{11.1c}$$

Bemerkung 11.1 (11.1) beschreibt z.B. die Temperaturverteilung in einem Körper Ω zum Zeitpunkt t, wobei u_0 die Anfangstemperaturverteilung ist und f die zugeführte Energie beschreibt. Die Randbedingung bedeutet, daß die Temperatur am Rand fixiert wird (“Eisbad”).

Vorbemerkungen zur Numerik:

1. das “klassische” Vorgehen ist die *Linienmethode*: man wählt eine *feste* Diskretisierung im Ort und löst das resultieren ODE-System mit einem numerischen Verfahren.
   Vorteile:
   - “time marching” speichereffizient, keine Beschränkung für den Endzeitpunkt
   - Kombination von “klassischen” Diskretisierungen (sowohl im Ort als auch in der Zeit), d.h. gut verstandene und verfügbare Bausteine

   Nachteil: feste Ortsdiskretisierung $\rightarrow$ Adaptivität im Raum?
2. *Rothemethode:* verwende Zeitdiskretisierung und löse in jedem Zeitschritt ein Ortsproblem ($\rightarrow$ Adaptivität im Ort möglich)
3. *Space-time:* diskretisiere das volle Problem (11.1). *Nachteil:* teuer. *Vorteil:* volle Adaptivät möglich

Wir betrachten hier die Linienmethode.

11.1 Variationsformulierung im Ort

Ziel: Formulierung, die für die *Linienmethode* geeignet ist und FEM als Ortsdiskretisierung verwendet.

Aus (11.1) mit $a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ ergibt sich, daß eine klassische Lösung u die Gleichung

$$\langle u_t(t,\cdot), v\rangle_{L^2} + a(u(t,\cdot), v) = \langle f(t,\cdot), v\rangle_{L^2} \qquad forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{11.2}$$

erfüllt. Dies ist bereits sinnvoll, wenn für jedes feste t gilt: $u(t,\cdot) \in H_0^1(\Omega)$. Wir werden deshalb (zunächst) mit folgendem Lösungsbegriff für (11.1) arbeiten:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Finde } u \in C^1([0,T], H_0^1(\Omega)), \textit{ sodass} & \\ \langle u'(t), v\rangle_{L^2} + a(u(t), v) = \langle f(t), v\rangle_{L^2} & \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0 \ (\textit{in } H_0^1(\Omega)) & \end{array}\right\} \tag{11.3}$$

Dabei wird gefordert

- $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$
- $u_0 \in H_0^1(\Omega)$

Bemerkung 11.2 (Ableitungsbegriff) Sei $u : (0,T) \to (\mathcal{X}; \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ eine Funktion wobei $t \in (0,T)$. Ein Element $u'(t) \in \mathcal{X}$ heißt Ableitung von u an der Stelle t, falls

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t) \right\|_{\mathcal{X}} = 0.$$

Bemerkung 11.3 Die Formulierung (11.3) ist nicht die schwächstmögliche (Zeitableitungen sind hier "klassisch"[1]), aber bequem, um ODE-Theorie einzusetzen. Eine Verallgemeinerung der Formulierung wird in der Vorlesung PDE betrachtet. Insbesondere kann der Lösungsbegriff so erweitert werden, dass auch $u_0 \in L^2(\Omega)$ sinnvoll behandelt werden kann.

Übung 11.4 Sei $u \in C^1((0,T); H_0^1(\Omega))$. Dann ist $u \in C^1((0,T); L^2(\Omega))$

Übung 11.5 Für $u \in C^1((0,T); H_0^1(\Omega))$ gilt:

- $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2}^2$ ist stetig differenzierbar und
- $\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_{L^2}$

Satz 11.6 *(Energieungleichung) Es gelte für ein $\gamma > 0$*

- $\gamma\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \le a(v,v) \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$
- *u löst (11.3)*

Dann gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le e^{-\gamma t}\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s)\|_{L^2(\Omega)} ds$$

Beweis:
1. Schritt: Wir nehmen zunächst an, dass $\|u(s)\|_{L^2} > 0$ für alle $0 < s < t$ ist. Dann gilt:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 \overset{\textit{Übung 11.5}}{=} \langle u'(t), u(t)\rangle_{L^2} \qquad und$$
$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2} = \frac{d}{dt}\sqrt{\|u(t)\|_{L^2}^2} = \frac{1}{2\sqrt{\|u(t)\|_{L^2}^2}}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = \frac{\langle u'(t), u(t)\rangle_{L^2}}{\|u(t)\|_{L^2}}$$

[1] es ist auch möglich, $u \in L^1_{loc}(0,T;\mathcal{X})$ distributionell zu differenzieren

Mit einer Testfunktion $v = u(s)$ für festes s folgt aus (11.3)

$$\begin{aligned}\langle f(s), u(s)\rangle_{L^2} = \langle f(s), v\rangle_{L^2} &\overset{(11.3)}{=} \langle u'(s), v\rangle_{L^2} + a(u(s), v) = \\ = \underbrace{\langle u'(s), u(s)\rangle_{L^2}}_{\|u(s)\|_{L^2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}\Big|_{t=s}} &+ a(u(s), u(s))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a(u(s), u(s)) + \|u(s)\|_{L^2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}\Big|_{t=s} \overset{\substack{Cauchy-\\Schwarz}}{\leq} \|f(s)\|_{L^2}\|u(s)\|_{L^2}$$

Da $a(u(s), u(s)) \geq \gamma\|u(s)\|^2_{H^1} \geq \gamma\|u(s)\|^2_{L^2}$

$$\Rightarrow \gamma\|u(s)\|_{L^2} + \frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}\Big|_{t=s} \leq \|f(s)\|_{L^2} \qquad \forall\ 0 \leq s \leq t$$

Ein integrierender Faktor für die linke Seite ist $e^{\gamma t}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t}\|u(t)\|_{L^2}\right)\Big|_{t=s} = e^{\gamma s}\left(\gamma\|u(s)\|_{L^2} + \frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}\Big|_{t=s}\right) \leq e^{\gamma s}\|f(s)\|_{L^2}$$

Durch Integration von 0 bis t ergibt sich

$$e^{\gamma t}\|u(t)\|_{L^2} - e^{\gamma 0}\|u(0)\|_{L^2} \leq \int_0^t e^{\gamma s}\|f(s)\|_{L^2}ds$$

$$\Rightarrow \|u(t)\|_{L^2} \leq e^{-\gamma t}\|u_0\|_{L^2} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s)\|_{L^2}ds$$

2.Schritt: Wir betrachten den Fall $\|u(s)\|_{L^2} \geq 0$ auf $[0, T]$. Aus (11.3) ergibt sich mit $v = u(s)$

$$\underbrace{a(u(s), u(s))}_{\geq\gamma\|u\|^2_{H^1}\geq\gamma\|u\|^2_{L^2}} + \underbrace{\langle u'(s), u(s)\rangle_{L^2}}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2}\Big|_{t=s}} = \langle f(s), u(s)\rangle_{L^2} \overset{\substack{Cauchy-\\Schwarz}}{\leq} \|f(s)\|_{L^2}\|u(s)\|_{L^2}$$

Um das Problem zu umgehen, dass $\|u(s)\|_{L^2} = 0$ sein kann, weil man ja durch $\|u(s)\|_{L^2}$ dividieren will, definiert man für ein $\varepsilon > 0$ die Funktion $h_\varepsilon(t) := \sqrt{\|u(t)\|^2_{L^2} + \varepsilon^2}$. Dann ist

- $\frac{d}{dt}h_\varepsilon(t)\Big|_{t=s} = \frac{d}{dt}\sqrt{h^2_\varepsilon(t)}\Big|_{t=s} = \frac{1}{2h_\varepsilon(s)}\frac{d}{dt}h^2_\varepsilon(t)\Big|_{t=s} = \frac{1}{h_\varepsilon(s)}\langle u'(t), u(t)\rangle_{L^2}\Big|_{t=s}$
- $\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2}\Big|_{t=s} = \frac{d}{dt}h^2_\varepsilon(t)\Big|_{t=s} = 2h_\varepsilon(s)\frac{d}{dt}h_\varepsilon(t)\Big|_{t=s}$

Also folgt:

$$\gamma h^2_\varepsilon(s) + h_\varepsilon(s)\frac{d}{dt}h_\varepsilon(t)\Big|_{t=s} \leq \|f(s)\|_{L^2}\underbrace{\|u(s)\|_{L^2}}_{\leq h_\varepsilon(s)} + \gamma\varepsilon^2$$

Da $\frac{\varepsilon^2}{h_\varepsilon(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\|u\|^2_{L^2}+\varepsilon^2}} \leq \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2}} = \varepsilon$, ergibt sich bei Division der Ungleichung durch $h_\varepsilon(s)$

$$\gamma h_\varepsilon(s) + \frac{d}{dt}h_\varepsilon(t)\Big|_{t=s} \leq \|f(s)\|_{L^2} + \gamma\frac{\varepsilon^2}{h_\varepsilon(s)} \leq \|f(s)\|_{L^2} + \gamma\varepsilon$$

Wie im 1. Schritt ergibt sich durch Multiplikation mit $e^{\gamma s}$ und Integration

$$e^{\gamma s}h_\varepsilon(t) - h_\varepsilon(0) \leq \int_0^t e^{\gamma s}\left[\|f(s)\|_{L^2} + \gamma\varepsilon\right]ds$$

$$\Rightarrow h_\varepsilon(t) \leq e^{-\gamma t}h_\varepsilon(0) + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\left[\|f(s)\|_{L^2} + \gamma\varepsilon\right]ds \qquad \forall\ \varepsilon > 0$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. $\square$

Übung 11.7 Satz 11.6 liefert die Eindeutigkeit der Lösung von (11.3).

Bemerkung 11.8 Für $f \equiv 0$ ist die Wärmeleitungsleichung *dissipativ* (in $L^2(\Omega)$), d.h. $\|u(t)\|_{L^2} \leq e^{-\gamma t}\|u(0)\|_{L^2}$. Dann folgt für 2 verschiedene Anfangsbedingungen u_0, $\tilde{u}_0$, dass die Lösungen $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ die Bedingung $\|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{L^2} \leq e^{-\gamma t}\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^2}$ erfüllen. Gute numerische Verfahren sollten dieses qualitative Verhalten widerspiegeln.

Bemerkung 11.9 (Evolutionsoperator) Für $f = 0$ kann man den Evolutionsoperator

$$E(t) : u_0 \mapsto u(t)$$

definieren. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist er ein *Halbgruppe*:

- $E(t+s) = E(t) \circ E(s), \qquad t,\, s \geq 0$
- $E(0) = \mathrm{Id}$

$E(t)$ kann explizit mittels der Eigenfunktionen des Dirichlet-Laplaceoperators dargestellt werden: Seien (φ_n, λ_n) die Eigenpaare von

$$-\Delta\varphi_n = \lambda_n\varphi_n \quad \text{auf } \Omega, \qquad \varphi_n|_{\partial\Omega} = 0$$

und sei $(\varphi_n)_n$ eine ONB von $L^2(\Omega)$ (und Orthogonalbasis von $H_0^1(\Omega)$). Dann ist

$$E(t)u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\langle u_0, \varphi_n\rangle_{L^2}\varphi_n \tag{11.4}$$

Bemerkung 11.10 (Duhamelprinzip) für $f \neq 0$ (hinreichend glatt) gilt für die Lösung u

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)f(s)\,ds. \tag{11.5}$$

(Die Konvergenz der Reihen ist in $H_0^1(\Omega)$ zu verstehen, falls $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ und $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.

11.2 Semidiskretisierung im Ort („Linienmethode“)

Ziel: Approximotion von (11.3) durch ein (endliches) System von ODEs. Sei $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ mit $\dim(V_h) = N < \infty$ und Basis $\{\varphi_i \mid i = 1, \ldots, N\}$. Sei $u_{0,h} \in V_h$ eine Approximation an u_0. Dann ist die *semidiskrete Approximation* u_h an die Lösung u gegeben durch

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Finde } u_h \in C^1([0,T]; V_h) \textit{ sodass} & \\ (11.6a) \quad \langle u_h'(t), v\rangle_{L^2} + a(u_h(t), v) = \langle f(t), v\rangle_{L^2} & \forall\, v \in V_h \\ (11.6b) \quad u_h(0) = u_{0,h} & \end{array}\right\} \tag{11.6}$$

(11.6) stellt ein ODE-System dar. Definiert man die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und die Massematrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ durch

$$\mathbf{A}_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \qquad \mathbf{M}_{ij} = \langle \varphi_j, \varphi_i\rangle_{L^2}, \quad i,j = 1, \ldots, N \tag{11.7}$$

und $\mathbf{F}(t)$ durch

$$\mathbf{F}_i(t) = \langle f(t), \varphi_i\rangle_{L^2} \tag{11.8}$$

so ergibt sich aus dem Ansatz $u_h(t) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{u}_i(t)\varphi_i$, dass (11.6) äquivalent ist zum ODE-System

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{M}\mathbf{u}'(t) + \mathbf{A}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) & t > 0 \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, & \end{array}\right\} \tag{11.9}$$

wobei $u_{0,h} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{u}_{0,i}\, \varphi_i$ die Darstellung in der Basis $\{\varphi_i \mid i = 1, \ldots, N\}$ von $u_{0,h} \in V_h$ ist.[2]

Übung 11.11 Die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{M}$ sind SPD. Überdies gilt für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ mit $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \varphi_i$, $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{w}_i \varphi_i$, dass $\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{w} = \langle w, v \rangle_{L^2}$ und $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{w} = a(w, v)$.

Bemerkung 11.12 Aus Übung 11.11 folgt, dass (11.9) äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{u}(0) &= u_0 \end{aligned}$$

D.h. die Existenz und Eindeutigkeit von (11.6) ist gegeben.

Analog zu Satz 11.6 gilt

Lemma 11.13 *Seien $r \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ und $w \in C^1([0,T]; V_h)$ und erfüllen*

$$\langle w', v \rangle_{L^2} + a(w, v) = \langle r(t), v \rangle_{L^2} \text{ für alle } v \in V_h.$$

Dann gilt:

$$\|w(t)\|_{L^2} \leq e^{-\gamma t} \|w(0)\|_{L^2} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|r(s)\|_{L^2} ds$$

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zu jenem von Satz 11.6. □

Bemerkung 11.14 Analog zur Evolution E können wir die semidiskrete Evolution E_h definieren, welche für festes t $u_{0,h} \in V_h$ auf die Lösung $y_h(t) =: E_h u_{0,h}$ von (11.9) mit $f \equiv 0$ abbildet. Lemma 11.13 besagt, $\|E_h(t) v_h\|_{L^2} \leq \|v_h\|_{L^2}$ für alle $v_h \in V_h$. Weiters kann durch E_h durch die diskreten Eigenfunktionen und Eigenwerte geschrieben werden (Übung). Es das diskrete Duhamelprinzip:

$$u_h(t) = E_h(t) u_{0,h} + \int_0^t E_h(t-s) \Pi^{L^2} f(s)\, ds$$

mit der L^2-Projektion $\Pi^{L^2} : L^2(\Omega) \to V_h$. ■

Im folgenden wollen wir $\|u(t) - u_N(t)\|_{L^2}$ abschätzen, indem wir $\|u(t) - P_h u(t)\|_{L^2}$ abschätzen. P_N bezeichnet dabei wieder den Ritzprojektor $P_h : H_0^1(\Omega) \to V_h$. Dieser ist für alle $v \in V_h$ durch $a(w, v) = a(P_h w, v)$ definiert. Wir wissen bereits, dass P_h linear und beschränkt ist. Die Beschränktheit folgt aus der Existenz einer Konstante $C > 0$, sodass $\|P_h w\|_{H^1} \leq C \|w\|_{H^1}$ für alle $w \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

---

[2] Um die Äquivalenz von (11.6) mit (11.9) zu sehen, schreiben wir $u_h(t) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{u}_i(t) \varphi_i$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
&u_h \text{ löst (11.6a)} \\
&\Leftrightarrow \left\langle \sum_{j=1}^{N} \mathbf{u}_j'(t) \varphi_j, \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \varphi_i \right\rangle_{L^2} + a\left(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{u}_j(t) \varphi_j, \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \varphi_i \right) = \left\langle f(t), \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \varphi_i \right\rangle_{L^2} \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \\
&\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{N} \mathbf{u}_j'(t) \mathbf{v}_i \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle_{L^2} + \sum_{i,j=1}^{N} \mathbf{u}_j(t) \mathbf{v}_i\, a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \langle f(t), \varphi_i \rangle_{L^2} \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^N \\
&\Leftrightarrow \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}^T \mathbf{F}(t) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \\
&\Leftrightarrow \mathbf{M} \mathbf{u}'(t) + \mathbf{A} \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)
\end{aligned}$$

Satz 11.15 *Sei $u \in C^1([0,T]; H_0^1(\Omega))$ eine Lösung von (11.3) und u_h eine Lösung von (11.6). Dann gilt*

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2} \leq \|u(t) - P_h u(t)\|_{L^2} + \|u_h(0) - P_h u(0)\|_{L^2} e^{-\gamma t} \quad + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|u'(s) - P_h u'(s)\|_{L^2} ds$$

Beweis: Wird $u_h(t) - u(t) = \underbrace{u_h(t) - P_h u(t)}_{=:\theta(t)} + \underbrace{P_h u(t) - u(t)}_{=:\varrho(t)}$ geschrieben, dann ist

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} \leq \|\theta(t)\|_{L^2} + \|\varrho(t)\|_{L^2}.$$

1. Schritt: Aus der Linearität und der Beschränktheit von P_h und $u \in C^1([0,T]; H_0^1(\Omega))$ folgt, dass $(P_h u)' = P_h u'$, weil

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{k\to 0}} \left\| \frac{1}{k} \left(P_h u(t+k) - P_h u(t)\right) - P_h u'(t) \right\|_{H^1} \overset{P_N \text{ linear}}{=} \\
&= \overline{\lim_{k\to 0}} \left\| P_h \left(\frac{u(t+k) - u(t)}{k} - u'(t) \right) \right\|_{H^1} \overset{P_h \text{ beschränkt}}{=} \\
&\leq \overline{\lim_{k\to 0}} \, C \left\| \frac{u(t+k) - u(t)}{k} - u'(t) \right\|_{H^1} = 0 \qquad \textit{nach Definition von } u'.
\end{aligned}$$

2. Schritt: Aus dem 1. Schritt folgt $\theta \in C^1([0,T]; V_h)$. Weiters ist für jedes $v \in V_h$

$$\begin{aligned}
&\langle \theta'(t), v\rangle_{L^2} + a(\theta(t), v) = \langle u_h', v\rangle_{L^2} + a(u_h, v) - \langle P_h u', v\rangle_{L^2} - a(P_h u, v) = \\
&\overset{(11.6)}{=} \langle f(t), v\rangle_{L^2} - \langle P_h u', v\rangle_{L^2} - a(P_h u, v) = \\
&\overset{\substack{Def.\\ v.P_h}}{=} \langle f(t), v\rangle_{L^2} - \langle P_h u', v\rangle_{L^2} - a(u, v) = \\
&\overset{(11.3)}{=} \langle u', v\rangle_{L^2} - \langle P_h u', v\rangle_{L^2} = \langle u' - P_h u'(t), v\rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

3. Schritt: Aus Lemma 11.13 folgt für θ

$$\|\theta\|_{L^2} \leq e^{-\gamma t} \underbrace{\|\theta(0)\|_{L^2}}_{=\|u_h(0) - P_h u(0)\|_{L^2}} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|u'(s) - P_h u'(s)\|_{L^2} ds.$$

□

Bemerkung 11.16 Satz 11.15 zeigt, dass $\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2}$ durch den Fehler $\|u(t) - P_h u(t)\|_{L^2} + 2$ *Terme* abgeschätzt werden kann, die eine Fehlerakkumulation für die Zeiten $0 \leq s < t$ darstellen. Man spricht vom „Gedächtnis“ von parabolischen Gleichungen. ■

Regularitätsannahmen an u erlauben Abschätzungen, die explizit in h sind.

Korollar 11.17 *Sei $V_h = S_0^1(\mathcal{T})$, wobei $\mathcal{T}$ eine formreguläre, reguläre Triangulierung sei. Erfülle die Lösung u von (11.3) die Regularitätsvoraussetzung $u \in C^3(\bar{\Omega} \times [0,T])$. Sei $u_{0,h} \in V_h$ entweder $u_{0,h} = P_h u_0$ oder $u_{0,h} = I u_0$, wobei $I u_0$ den stückweisen linearen Interpolanten bezeichne. Dann gilt:*

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \max_{0\leq s\leq t} \left(|u(\cdot, s)|_{H^2(\Omega)} + |u_t(\cdot, s)|_{H^2(\Omega)} \right).$$

Ist Ω sogar konvex, dann ist

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \max_{0\leq s\leq t} \left(|u(\cdot, s)|_{H^2(\Omega)} + |u_t(\cdot, s)|_{H^2(\Omega)} \right).$$

Beweis: Es gilt für jedes $v \in H^2(\Omega)$ (für $d \in \{1, 2, 3\}$)

- $\|v - P_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v - P_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|v - Iv\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch|v|_{C^2(\bar{\Omega})}$
- falls Ω konvex ist, gilt sogar mittels Aubin-Nitsche $\|v - P_h v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2|v|_{C^2(\bar{\Omega})}$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 11.15 □

Übung 11.18 Sei $\theta \in C^1([0,T]; V_h)$ und gelte für alle $v \in V_h$ und für ein $r \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$, dass $\langle \theta', v\rangle_{L^2(\Omega)} + a(\theta, v) = \langle r(t), v\rangle_{L^2(\Omega)}$. Zeigen Sie:

$$|\theta(t)|^2_{H^1(\Omega)} \leq |\theta(0)|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^t \|r(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds$$

Hinweis: Betrachte $v = \theta'$.

Zeigen Sie, dass

$$|u(t) - u_h(t)|^2_{H^1} \leq 2\ |u(t) - P_h u(t)|^2_{H^1} + 2\ |u_{0,N} - P_h u_0|^2_{H^1} + 2\int_0^t \|u'(s) - P_h u'(s)\|^2_{L^2} ds$$

11.3 Volldiskrete Verfahren

Die Semidiskretisierung führt auf das ODE-System

$$\mathbf{M}\mathbf{u}' + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \tag{11.10}$$

wobei $\mathbf{M}$ und $\mathbf{A}$ SPD sind.

Frage: Richtige Wahl der Zeitdiskretisierung?

Antwort: Verfahren für steife Differentialgleichungen, also A- oder sogar L-stabile Verfahren

Um die richtige Wahl der Zeitdiskretisierung zu motivieren, sollten wir verstehen, wie sich die Lösungen von (11.10) verhalten. Wir versuchen deshalb, (11.10) in ein entkoppeltes ODE-System umzuwandeln.

Satz 11.19 *Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ SPD. Dann gelten für das verallgemeinerte Eigenwertproblem*

$$\text{Finde } (\mathbf{v}, \lambda) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \times \mathbb{C}, \text{ sodass } \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{M}\mathbf{v} \tag{11.11}$$

folgende Aussagen:

(i) Der Eigenwert λ erfülle $\lambda > 0$.

(ii) Es gibt N Eigenpaare $(\mathbf{v}_i, \lambda_i)$, $i = 1, \ldots, N$, die orthogonal bzgl. $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{A}}$ und $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{M}}$ sind, d.h.

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)_{\mathbf{M}} &= \langle \mathbf{M}\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle_2 = 0 \qquad \forall i \neq j \\ (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)_{\mathbf{A}} &= \langle \mathbf{A}\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle_2 = 0 \qquad \forall i \neq j \end{aligned}$$

(iii) Die Matrix $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ diagonalisiert $\mathbf{M}$ und $\mathbf{A}$ simultan, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} &= \textit{Diagonalmatrix} \\ \mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V} &= \textit{Diagonalmatrix} \end{aligned}$$

(iv) Falls die $\mathbf{v}_i$ so normiert werden, dass $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)_{\mathbf{M}} = \delta_{ij}$, dann gilt

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathrm{Id}, \quad \mathbf{V}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Beweis: Übung. *Hinweis:* Betrachte das EWP $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ □

Definiert man nun $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}$, $\widetilde{\mathbf{F}} = \mathbf{V}^T\mathbf{F}$, $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}_0$, dann ist (11.10) äquivalent zu

$$\widetilde{\mathbf{u}}' + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{u}} = \widetilde{\mathbf{F}}, \quad \widetilde{\mathbf{u}}(0) = \tilde{\mathbf{u}}_0 \tag{11.12}$$

(11.12) stellt ein im Sinne der Vorlesung "Numerik von Differentialgleichungen" steifes ODE-System dar, falls einige EW $\lambda_i > 0$ groß sind. Das ist bei parabolischen Problemen der Fall, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 11.20 *Sei $\mathcal{T}$ eine formreguläre, reguläre Triangulierung. Seien die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}$ und die Massematrix $\mathbf{M}$ durch (11.7) definiert, wobei $\{\varphi_i \mid i = 1, \ldots, N\}$ die Basis aus Hutfunktionen von $V_h = S_0^1(\mathcal{T})$ ist. Sei $h_{min} = \min\limits_{K\in\mathcal{T}} h_K$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von der Formregularität von $\mathcal{T}$ abhängt, sodaß*

$$C^{-1}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \le |u|^2_{H^1(\Omega)} \le \frac{C}{h^2_{min}}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\ u \in S_0^1(\mathcal{T})$$

Insbesondere folgt für die EW λ_i von (11.11)

$$C^{-1} \le \min_{i=1,\ldots,N} \lambda_i \le \max_{i=1,\ldots,N} \lambda_i \le \frac{C}{h^2_{min}} \tag{11.13}$$

Beweis: siehe Übungen. Insbesondere ist die obere Abschätzung $O(h^{-2}_{min})$ scharf. □

11.3.1 das implizite Eulerverfahren

Mittels der VO "Numerik von Differentialgleichungen" zeigt Satz 11.20, dass wir ein *implizites* Verfahren zum Lösen von (11.8) verwenden sollten. Das einfachste Verfahren ist das *implizite Eulerverfahren*:

$$\left\langle \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)} + a(u_h^{n+1}, v) = \langle f(t_{n+1}), v\rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\ v \in V_h, \tag{11.14}$$

wobei $k > 0$ der Zeitschritt, $t_n = nk$ und $u_h^n \approx u_h(t_n)$ ist. In Matrixschreibweise ist (11.14)

$$\frac{1}{k}\mathbf{M}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + \mathbf{A}\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{F}^{n+1} \tag{11.15}$$

d.h., in jedem Schritt muss das LGS

$$(\mathbf{M} + k\mathbf{A})\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{u}^n + k\mathbf{F}^{n+1}$$

gelöst werden.

Bemerkung 11.21 Es bietet sich an, $\mathbf{M} + k\mathbf{A}$ einmal zu zerlegen (Choleskyzerlegung), und dann in jedem Zeitschritt eine Vorwärts- und Rückwärtssubstitution zu machen. ■

Satz 11.22 *Sei $u \in C^1([0,T]; H_0^1(\Omega))$ Lösung von (11.3) und erfülle die Regularitätsvoraussetzung $u \in C^2([0,T]; L^2(\Omega))$. Sei $k_0 > 0$ fest gewählt. Sei λ_{min} der kleinste EW[3] des verallgemeinerten EWP*

$$\lambda\mathbf{M}x = \mathbf{A}x,$$

[3] für die Wärmleitungsgleichung ist $\lambda_{min} = O(1)$, d.h. "harmlos"

wobei $\mathbf{M}$ *und* $\mathbf{A}$ *die Massematrix und die Steifigkeitsmatrix der Ortsdiskretisierung sind. Dann gilt: Es existiert* $b > 0$*, welches nur von* k_0 *und* λ_{min} *abhängt, so dass für jeden Zeitschritt* $k \in (0, k_0]$ *gilt:*

$$\|u_h^n - u(t_n)\|_{L^2} \leq \|u(t_n) - P_h u(t_n)\|_{L^2} + e^{-bt_n}\|u_{0,h} - P_h u_0\|_{L^2}$$
$$+ \int_0^{t_n} e^{-b(t_n - t)} \left[\|u'(t) - P_h u'(t)\|_{L^2} + k\ \|u''(t)\|_{L^2}\right] dt, \tag{11.16}$$

$$\|u_h^n - u(t_n)\|_{L^2}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \|u_h^{j+1} - u_h^j\|_{L^2}^2 + k|u_h^{j+1} - u(t_{j+1})|_{H^1}^2 \leq C\Big[\|u_{0,h} - P_h u\|_{L^2}^2 \tag{11.17}$$
$$+ \int_0^{t_n} \|u' - P_h u'\|_{L^2}^2 + k^2\|u''\|_{L^2}^2\, dt + \|u(t_n) - P_h u(t_n)\|_{L^2}^2 + k\sum_{j=0}^{n-1} |u(t_j) - P_h u(t_j)|_{H^1}^2\Big]$$

Beweis: *Beweis von (11.16):* Das Vorgehen ist das klassische Vorgehen für ESV für ODEs:

1. Rekurrenzformel für den Fehler
2. Auflösen der Rekurrenz mittels diskreten Gronwall-Lemmas

1. Schritt:

$$u_h^n - u(t_n) = \underbrace{u_h^n - P_h u(t_n)}_{=:\theta^n} + \underbrace{P_h u(t_n) - u(t_n)}_{=:\varrho^n}$$

2. Schritt: (Rekurrenzrelation für θ^n)

$$\tfrac{1}{k}\langle u_h^{n+1} - u_h^n, v\rangle_{L^2} + a(u_h^{n+1}, v) = \langle f(t_{n+1}), v\rangle_{L^2} \quad \forall\ v \in V_h$$
$$\langle u'(t_{n+1}), v\rangle_{L^2} + a(u(t_{n+1}), v) = \langle f(t_{n+1}), v\rangle_{L^2} \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$$

Für die Differenzbildung dieser beiden Gleichungen ist es geschickt, $u'(t_{n+1})$) mittels Taylor umzuschreiben:

$$u(t_n) \overset{Taylor}{=} u(t_{n+1}) + \underbrace{(t_n - t_{n+1})}_{=-k} u'(t_{n+1}) + \int_{t_{n+1}}^{t_n} (t - t_{n+1}) u''(t) dt$$

$$\Rightarrow u'(t_{n+1}) = \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{k} - \frac{1}{k}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n+1}) u''(t) dt =$$

$$= \frac{P_h u(t_{n+1}) - P_h u(t_n)}{k} + \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{k} - \frac{P_h u(t_{n+1}) - P_h u(t_n)}{k} - \frac{1}{k}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n+1}) u''(t) dt =$$

$$= \frac{P_h u(t_{n+1}) - P_h u(t_n)}{k} + \underbrace{\frac{1}{k}\int_{t_n}^{t_{n+1}} u'(t) - P_h u'(t) dt}_{=:w_1^{n+1}} - \underbrace{\frac{1}{k}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n+1}) u''(t) dt}_{=:w_2^{n+1}}$$

Es gilt:

$$a(u(t_{n+1}), v) = a(P_h u(t_{n+1}), v) \quad \forall v \in V_h \tag{11.18}$$

$$\frac{1}{k}\langle u_h^{n+1} - u_h^n, v\rangle_{L^2} + a(u_h^{n+1}, v) = \langle f(t_{n+1}), v\rangle_{L^2} \quad \forall v \in V_h \tag{11.19}$$

$$\frac{1}{k}\langle P_h u(t_{n+1}) - P_h u(t_n), v\rangle_{L^2(\Omega)} + a(P_h u(t_{n+1}), v) = \langle f(t_{n+1}), v\rangle_{L^2} - \langle w_1^{n+1}, v\rangle_{L^2} - \langle w_2^{n+1}, v\rangle_{L^2} \quad \forall v \in V_h \tag{11.20}$$

Differenzenbildung von (11.19) und (11.20) führt auf

$$\frac{1}{k}\langle \theta^{n+1} - \theta^n, v\rangle_{L^2} + a(\theta^{n+1}, v) = \langle w_1^{n+1}, v\rangle_{L^2} + \langle w_2^{n+1}, v\rangle_{L^2} \qquad \forall\ v \in V_h. \tag{11.21}$$

Mit $v = \theta^{n+1}$ ergibt sich

$$\boxed{\|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + k \underbrace{a(\theta^{n+1}, \theta^{n+1})}_{=|\theta^{n+1}|_{H^1}^2 \geq \lambda_{min}\|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2} = \langle \theta^n, \theta^{n+1}\rangle_{L^2} + k\langle w_1^{n+1}, v\rangle_{L^2} + k\langle w_2^{n+1}, v\rangle_{L^2}. \qquad (11.22)}$$

Aus (11.22) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (1 + k\lambda_{min})\|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 \overset{\substack{Cauchy-\\Schwarz}}{\leq} \\
&\qquad \leq \|\theta^n\|_{L^2}\|\theta^{n+1}\|_{L^2} + k\|w_1^{n+1}\|_{L^2}\|\theta^{n+1}\|_{L^2} + k\|w_2^{n+1}\|_{L^2}\|\theta^{n+1}\|_{L^2} \\
&\Rightarrow (1 + k\lambda_{min})\|\theta^{n+1}\|_{L^2} \leq \|\theta^n\|_{L^2} + k\|w_1^{n+1}\|_{L^2} + k\|w_2^{n+1}\|_{L^2}
\end{aligned}$$

3. Schritt: (Auflösen der Rekurrenz)

$$\|\theta^{n+1}\|_{L^2} \leq \frac{1}{1 + k\lambda_{min}}\|\theta^n\|_{L^2} + \frac{k}{1 + k\lambda_{min}}\left(\|w_1^{n+1}\|_{L^2} + \|w_2^{n+1}\|_{L^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|\theta^n\|_{L^2} &\leq (1 + \lambda_{min}k)^{-n}\|\theta^0\|_{L^2} + \frac{k}{1 + \lambda_{min}k}\sum_{j=1}^{n}(1 + k\lambda_{min})^{-(n-j)}\left(\|w_1^j\|_{L^2} + \|w_2^j\|_{L^2}\right) = \\
&= (1 + \lambda_{min}k)^{-n}\|\theta^0\|_{L^2} + k\sum_{j=1}^{n}(1 + \lambda_{min}k)^{-(n-(j-1))}\left(\|w_1^j\|_{L^2} + \|w_2^j\|_{L^2}\right).
\end{aligned}$$

Mit $t_n = nk$ und $t_{n-(j-1)} = k(n - (j - 1))$ ergibt sich, dass man

$$\begin{aligned}
(1 + \lambda_{min}k)^{-n} &= (1 + \lambda_{min}k)^{-t_n\lambda_{min}/(\lambda_{min}k)} \\
(1 + \lambda_{min}k)^{-(n-(j-1))} &= (1 + \lambda_{min}k)^{-t_{n-j+1}\lambda_{min}/(\lambda_{min}k)}
\end{aligned}$$

abschätzen muss. Elementare Überlegungen[4] zeigen, dass die Funktion

$$x \mapsto (1 + x)^{-1/x}$$

monoton wachsend ist. Aus $k \leq k_0$ folgt somit, dass $\lambda_{min}k \leq \lambda_{min}k_0$ ist, d.h.

$$\begin{aligned}
(1 + \lambda_{min}k)^{-n} &= (1 + \lambda_{min}k_0)^{-t_n\lambda_{min}/(\lambda_{min}k_0)} \leq e^{-bt_n} \\
(1 + \lambda_{min}k)^{-(n-(j-1))} &= (1 + \lambda_{min}k_0)^{-t_{n-j+1}\lambda_{min}/(\lambda_{min}k_0)} \leq e^{-b(t_n - t_{j-1})},
\end{aligned}$$

wobei $b > 0$ durch die Beziehung $(1 + \lambda_{min}k_0)^{-\lambda_{min}/(\lambda_{min}k_0)} = e^{-b}$ definiert ist. Damit erhalten wir

$$\|\theta^n\|_{L^2} \leq e^{-bt_n}\|\theta^0\|_{L^2} + k\sum_{j=1}^{n} e^{-b(t_n - t_{j-1})}\left(\|w_1^j\|_{L^2} + \|w_2^j\|_{L^2}\right)$$

Wegen

$$\|w_1^j\|_{L^2} \leq \frac{1}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u'(t) - P_h u'(t)\|_{L^2} dt, \qquad \|w_2^j\|_{L^2} \leq \frac{k}{k}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u''(t)\|_{L^2} dt,$$

folgt damit

$$\begin{aligned}
\|\theta^n\|_{L^2} &\leq e^{-bt_n}\|\theta^0\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{n} e^{-b(t_n - t_{j-1})}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u'(t) - P_h u'(t)\|_{L^2} + k\|u''(t)\|_{L^2} dt \leq \\
&\leq e^{-bt_n}\|\theta^0\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{t_n} e^{-b(t_n - t)}\|u'(t) - P_h u'(t)\|_{L^2} + k\|u''(t)\|_{L^2} dt
\end{aligned}$$

[4] $g(x) := \ln\left((1 + x)^{-1/x}\right) = -\frac{1}{x}\ln(1 + x)$; $g'(x) = \frac{\ln(1+x) - 1 + 1/(1+x)}{x^2} \geq 0$ da $\frac{d}{dx}(\ln(1 + x) - 1 + 1/(1 + x)) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$ und $\lim_{x\to 0}(\ln(1 + x) - 1 + 1/(1 + x)) = 0$

$$
\begin{aligned}
\theta = 0 \text{ (expliziter Euler):} \quad & \mathbf{M}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + k\mathbf{A}\mathbf{u}^n = k\mathbf{F}(t_n) \\
\theta = 1 \text{ (impliziter Euler):} \quad & \mathbf{M}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + k\mathbf{A}\mathbf{u}^{n+1} = k\mathbf{F}(t_{n+1}) \\
\theta = 1/2 \text{ (Crank-Nicolson):} \quad & \mathbf{M}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) + \frac{k}{2}(\mathbf{A}\mathbf{u}^n + \mathbf{A}\mathbf{u}^{n+1}) = k\mathbf{F}(t_{n+\frac{1}{2}})
\end{aligned}
$$

Abbildung 11.1: Matrixform des θ-Schemas für die Wärmeleitungsgleichung

Beweis von (11.17): Ausgangspunkt ist (11.22).

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\langle \theta^{n+1} - \theta^n, \theta^{n+1} \rangle_{L^2}}_{\overset{\text{Taschenspielertrick}}{=} \frac{1}{2}(\|\theta^{n+1}\|^2 - \|\theta^n\|^2 + \|\theta^{n+1} - \theta^n\|^2)} + k|\theta^{n+1}|_{H^1}^2 &= k\langle w_1^{n+1}, \theta^{n+1} \rangle_{L^2} + k\langle w_2^{n+1}, \theta^{n+1} \rangle_{L^2} \\
&\leq k \left(\|w_1^{n+1}\|_{L^2} + \|w_2^{n+1}\|_{L^2} \right) \|\theta^{n+1}\|_{L^2} \\
&\leq kC_P |\theta^{n+1}|_{H^1} \left(\|w_1^{n+1}\|_{L^2} + \|w_2^{n+1}\|_{L^2} \right).
\end{aligned}
$$

Damit:

$$
\begin{aligned}
\|\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\theta^n\|_{L^2}^2 + \|\theta^{n+1} - \theta^n\|_{L^2}^2 + 2k|\theta^{n+1}|_{H^1}^2 &\leq 2kC_p |\theta^{n+1}|_{H^1} \left(\|w_1^{n+1}\|_{L^2} + \|w_2^{n+1}\|_{L^2} \right) \\
&\leq k|\theta^{n+1}|_{H^1}^2 + \frac{k}{C_P^2} \left(\|w_1^{n+1}\|_{L^2} + \|w_2^{n+1}\|_{L^2} \right)^2
\end{aligned}
$$

Subtraktion von $k|\theta^{n+1}|_{H^1}$ auf beiden Seiten und anschließende Summation liefert

$$
\|\theta^n\|_{L^2}^2 - \|\theta^0\|_{L^2}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \|\theta^{j+1} - \theta^j\|_{L^2}^2 + k|\theta^{j+1}|_{H^1}^2 \leq \frac{k}{C_P^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\|w_1^{j+1}\|_{L^2} + \|w_2^{j+1}\|_{L^2} \right)^2
$$

Es ist

$$
k \sum_{J=0}^{n-1} \|w_1^{j+1}\|_{L^2}^2 + \|w_2^{j+1}\|_{L^2}^2 \leq \int_0^{t_n} \|u' - P_h u'\|_{L^2}^2 + k^2 \|u''\|_{L^2}^2 \, dt
$$

so daß sich ergibt

$$
\|\theta^n\|_{L^2}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \|\theta^{j+1} - \theta^j\|_{L^2}^2 + k|\theta^{j+1}|_{H^1}^2 \leq \|\theta^0\|_{L^2}^2 + \int_0^{t_n} \|u' - P_h u'\|_{L^2}^2 + k^2 \|u''\|_{L^2}^2 \, dt
$$

Setzt man $\rho^j := P_h u(t_j) - u(t_j)$, so folgt

$$
\|\rho^n\|_{L^2}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\|\rho^{j+1} - \rho^j\|_{L^2}^2}_{\leq k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u' - P_h u'\|_{L^2}^2} + k|\rho^{j+1}|_{H^1}^2 \leq \|\rho^n\|_{L^2}^2 + k \int_0^{t_n} \|u' - P_h u'\|_{L^2}^2 + k \sum_{j=0}^{n-1} |u(t_j) - P_h u(t_j)|_{H^1}^2
$$

und damit mittels $u_h^{j+1} - u(t_{j+1}) = \theta^{j+1} + \rho^{j+1}$ und der Dreiecksungleichung die Behauptung. □

Korollar 11.23 *Sei $u \in C^3([0,T] \times \bar{\Omega})$. Dann gilt:*

(i) $\|u_h^n - u(t_n)\|_{L^2} \leq C[h + k]$

(ii) falls Ω konvex ist, dann ist $\|u_h^n - u(t_n)\|_{L^2} \leq C[h^2 + k]$

Beweis: Der Beweis verbleibt als Übung. □

$0 \le \theta < 1/2$	Verfahren *nicht* A-stabil	Ordnung 1
$\theta = 1/2$	Verfahren A-stabil	Ordnung 2
$1/2 < \theta \le 1$	Verfahren A-stabil (sogar L-stabil)	Ordnung 1

Abbildung 11.2: Stabilität und Konvergenzordnung des θ-Schemas.

11.3.2 das θ-Schema

Das implizite Eulerverfahren ist ein Spezialfall des sog. θ-Schemas, welches für die ODE $y' = f(t, y)$ so definiert ist:

$$y^{i+1} = y^i + kf(t_i + \theta(t_{i+1} - t_i), y_i + \theta(y_{i+1} - y_i)).$$

Für $\theta = 0$ ergibt sich das explizite Eulerverfahren, für $\theta = 1$ das implizite Eulerverfahren. Für $\theta = 1/2$ das Crank-Nicolson-Verfahren[5]–siehe Fig. 11.2. Aussagen analog zu Satz 11.22 gelten auch für das θ-Schema, z.B. kann man analog zu (11.17) in Satz 11.22 kann man folgende Stabilitätsaussage zeigen:

Übung 11.24 Seien die u_h^n mit dem θ-Schema und $\theta \in (1/2, 1]$ bestimmt. Setze $u_h^{n+\theta} := u_h^n + \theta(u_h^{n+1} - u_h^n)$ und $t_{j+\theta} := t_j + \theta(t_{j+1} - t_j)$. Dann gilt:

$$\|u_h^n\|_{L^2}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} k|u_h^{j+\theta}|_{H^1}^2 + (2\theta - 1)\|u_h^{j+1} - u_h^j\|_{L^2}^2 \le \|u_h^0\|_{L^2}^2 + C\sum_{j=0}^{n-1} k\|f(t_{j+\theta})\|_{L^2}^2.$$

(Hinweis: betrachte (11.21) mit $v = \theta^{n+\theta} = u_h(t_{n+\theta}) - P_h u(t_{n+\theta})$.)

Bemerkung 11.25 Man kann die Konvergenzaussage (11.17) aus Satz 11.22 auch auf Übung 11.24 stützen. ■

Mit geeigneter Regularität der Lösung erhält man für das Crank-Nicolson-Verfahren bessere Ordnung in k:

Satz 11.26 (CN ist Ordnung 2) *Seien die u_h^n definiert durch*

$$\frac{1}{k}\langle u_h^{n+1} - u_h^n, v\rangle_{L^2} + a\left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{2}, v\right) = \langle f(t_n + k/2), v\rangle_{L^2} \qquad \forall v \in V_h.$$

Dann gilt:

$$\|u_h^n - u(t_n)\|_{L^2} \le \|u_{0,h} - P_h u_0\|_{L^2} + \|u(t_n) - P_h u(t_n)\|_{L^2} + \int_0^{t_n} \|u' - P_h u'\|_{L^2} + Ck^2\|u'''\|_{L^2}\, dt$$

Beweis: Analog zu Satz 11.22, (11.16). Verwene $v = (\theta^{n+1} + \theta^n)/2$ in (11.21). □

11.3.3 Stabilität des θ-Schemas—die CFL-Bedingung

Für $0 \le \theta < 1/2$ ist das θ-Schema nur bedingt stabil, d.h. es gibt eine Schrittweitenbeschränkung ("CFL"-Bedingung[6]), die in der Praxis sehr restriktiv ist. Um dies zu sehen, betrachten wir einen Schritt des Verfahrens. Es hat die Form

$$u_h^{n+1} = Pu_h^n + kF^n$$

für einen linearen Operator $P : V_h \to V_h$. Man erhält also (wir lassen die Wahl der Norm offen...)

$$\|u_h^{n+1}\| \le \|P\|\|u_h^n\| + k\|F^n\|$$

[5] John Crank, Phyllis Nicolson. Im vorliegenden Fall einer linearen PDE stimmt das CN-Verfahren mit der impliziten Mittelpunktsregel (= 1-stufiges Gaußverfahren) überein.

[6] Richard Courant, Kurt Friedrichs, Hans Lewy

Name	$\mathbf{P}$	$\sigma(\mathbf{P})$	$\varrho(\mathbf{P})$	stabil?
$\mathbf{P}_{expl}$	$\mathbf{I} - k\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$	$\{1 - k\lambda \mid \lambda \in \sigma\}$	$\lvert 1 - k\lambda_{max}\rvert$	falls $k \leq \frac{2}{\lambda_{max}}$
$\mathbf{P}_{impl}$	$(\mathbf{M} + k\mathbf{A})^{-1}\mathbf{M}$	$\left\{\frac{1}{1+k\lambda} \mid \lambda \in \sigma\right\}$	$\frac{1}{\lvert 1+k\lambda_{min}\rvert} \leq 1$	für alle $k > 0$
$\mathbf{P}_{CN}$	$\left(\mathbf{M} + \frac{k}{2}\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{M} - \frac{k}{2}\mathbf{A}\right)$	$\left\{\frac{1-k/2\lambda}{1+k/2\lambda} \mid \lambda \in \sigma\right\}$	≤ 1	für alle $k > 0$

Abbildung 11.3: Analyse von $\mathbf{P}$ in $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{u}^n + \cdots$. $\sigma = \{\lambda : \exists \mathbf{x} \neq 0 \text{ mit } \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{x}\}$

Gronwall liefert dann

$$\|u_h^N\| \leq \|P\|^N \|u_h^0\| + \cdots$$

Mit $t_N = Nk = T =$ Endzeitpunkt ergibt sich

$$\|u_h^N\| \leq \|P\|^{T/k} \|u_h^0\| + \cdots$$

Dies zeigt, daß $\|P\| \leq 1 + Ck$ sein sollte, denn dann ist

$$\|P\|^{T/k} \leq (1 + Ck)^{T/k} = (1 + Ck)^{TC/(Ck)} \leq e^{CT}$$

gleichmäßig in k.[7]

Um die Analyse von $\|P\|$ einfach zu halten, untersuchen wir $\|P\|$ auf dem Matrixlevel. Die Iteration ist dann in "expliziter" Form $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{u}^n + \cdots$, wobei die zughörige Matrix $\mathbf{P}$ (siehe Fig. 11.1 für die Iterationsvorschrift) in Fig. 11.3 gegeben ist.

Weil für jede Matrixnorm gilt $\|\mathbf{P}\| \leq \rho(\mathbf{P})$ mit dem Spektralradius $\rho(\mathbf{P}) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(\mathbf{P})\}$, sehen wir, daß die Bedingung $\rho(\mathbf{P}) \leq 1 + Ck$ eine sinnvolle Stabilitätsbedingung ist. Tatsächlich wird man fordern:

$$\rho(\mathbf{P}) \leq 1. \tag{11.23}$$

Diese Bedingung wird in Fig. 11.3 ausgeführt. Wir erinnern an Satz 11.20, welcher $\lambda_{max} \sim C/h^2$ liefert. Damit kann die Bedingung (11.23) für das θ-Schema umgerechnet werden in eine Beziehung zwischen der Ortsschrittweite h und der Zeitschrittweite k. Für das explizite Eulerverfahren ergibt sich

$$\frac{k}{h^2} = O(1) \qquad \text{d.h.} \qquad k \leq Ck^2$$

Der Fall des impliziten Eulerverfahrens und des CN-Verfahrens ist in Fig. 11.3 ausgeführt. Die Stabilität von allgemeineren RK-Verfahren wird später behandelt.

Übung 11.27 Auch für $\theta \in (0, 1/2)$ muß man $k \leq Ch^2$ für Stabilität fordern.

Numerisches Beispiel

Wir wählen nun den Anfangswert für die 1D Wärmeleitungsgleichung $u_0 = 1$ und $f \equiv 0$ und betrachten die graphisch dargestellten Ergebnisse aus Abbildung 11.4. In den oberen beiden Graphiken ist zu sehen, wie sich das explizite Eulerverfahren zu zwei verschiedenen Schrittweiten knapp über bzw. knapp unter der Stabilitätsschranke verhält.

Links ist $k = \frac{2.001}{\lambda_{max}} \geq \frac{2}{\lambda_{max}}$ gewählt. Die Lösung oszilliert sehr stark (die größten Werte liegen im Bereich 10^7) und geben in keinster Weise das tatsächliche Lösungsverhalten wieder. In der rechten Graphik ist $k = \frac{1.999}{\lambda_{max}} \leq \frac{2}{\lambda_{max}}$ gewählt und die numerische und die exakte Lösung sind ziemlich ähnlich.

[7] andernfalls: $\|P\| \geq 1 + \delta$ für ein $\delta > 0$ unabhängig von k liefert $\|P\|^{T/k} \geq (1 + \delta)^{T/k} \to \infty$ für $k \to 0$.

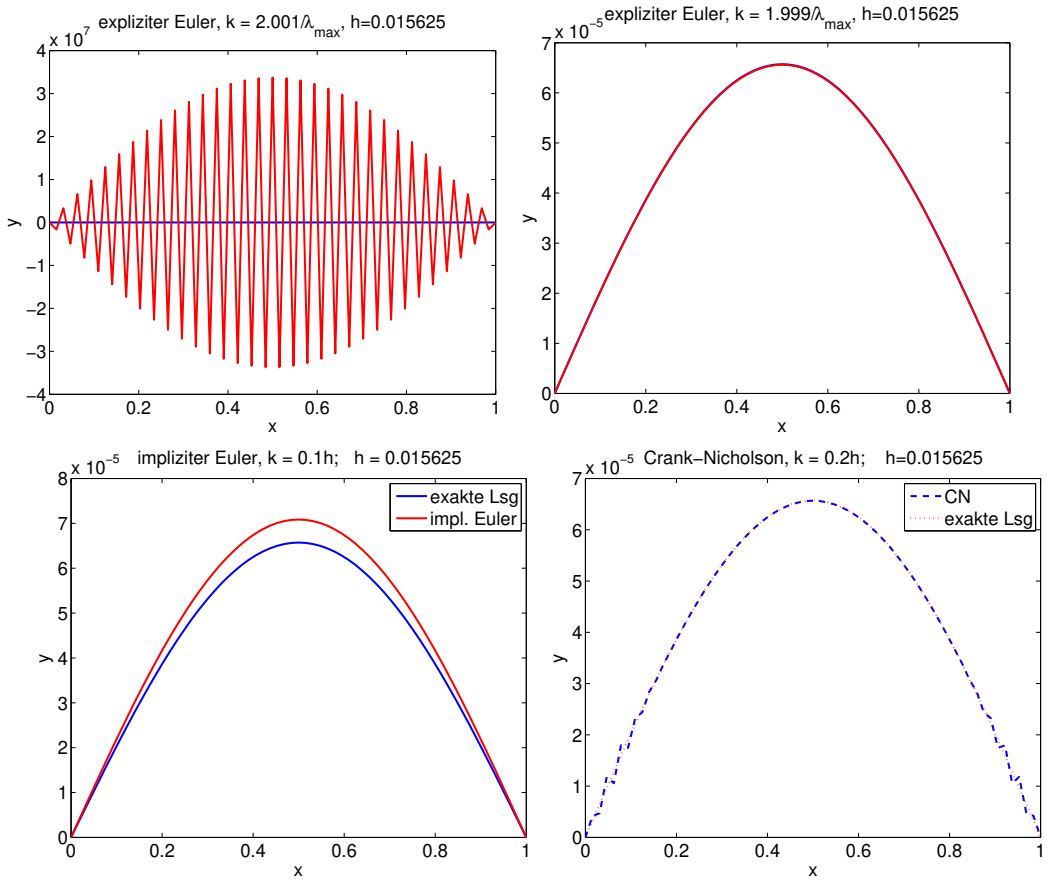

Abbildung 11.4: Vergleich zwischen exakter und numerischer Lösung

In der unteren linken Graphik von Abbildung 11.4 ist die Wärmeleitungsgleichung mit dem implizitem Eulerverfahren und in der rechten unteren Graphik mit dem Crank-Nicolson-Verfahren gelöst worden. Hier ist die numerische Lösung in beiden Fällen eine gute Approximation an die exakte Lösung.

Zum Abschluss betrachten wir noch das Konvergenzverhalten für $u(x,t) = e^{-t}x(1-x)$. In der linken Graphik von Abbildung 11.5 wird das explizite Eulerverfahren betrachtet. Wieder mit den zwei Zeitschrittweiten $k = \frac{2.001}{\lambda_{max}}$ und $k = \frac{1.999}{\lambda_{max}}$ knapp über bzw. knapp unter der Stabilitätsschranke. Der Fehler für die Lösung zur Wahl von $k = \frac{1.999}{\lambda_{max}}$ verhält sich wie $\mathcal{O}(h)$. Liegt k aber nur knapp über $\frac{2}{\lambda_{max}}$ konvergiert das explizite Eulerverfahren nicht mehr.

Bemerkung 11.28 In der Praxis will man aus Kostengründen möglichst große Zeitschritte machen. (Jeder Zeitschritt bedeutet ja das Lösen eines LGS!) Beim expliziten Eulerverfahren müßte man dann λ_{max} möglichst genau kennen, um das maximal zulässige k zu bestimmen. Das Beispiel zeigt, daß man k keinesfalls zu groß wählen darf. Man spricht deshalb auch von "hit or miss": also entweder hat man Glück und bestimmt k so, dass das Verfahren konvergiert, oder man liegt knapp daneben und das Verfahren konvergiert nicht. ∎

In der rechten Graphik von Abbildung 11.5 ist zu sehen, dass sich das implizite ebenso wie das explizite Eulerverfahren wie $\mathcal{O}(h)$ verhält. Das Crank-Nicolson-Verfahren hat Konvergenzordnung 2. Das waren auch unsere Erwartungen, denn der Fehler des expl. sowie des implizite Eulerverfahrens ist $\mathcal{O}(k+h^2)$ und jener des Crank-Nicolson-Verfahrens ist $\mathcal{O}(k^2+h^2)$.

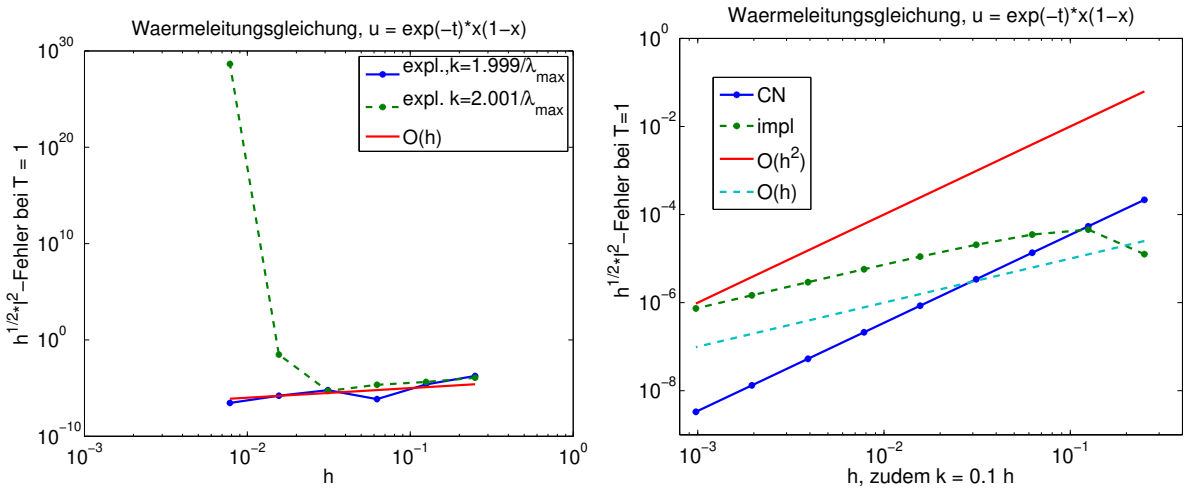

Abbildung 11.5: Konvergenzbetrachtung

11.4 Bemerkungen zum Lösungsbegriff

bisher: $u \in C^1((0,T); H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T], H_0^1(\Omega))$

Beob.:

- dies fordert $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ ("kompatible Anfangsbedingungen")
- $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ ist unnatürlich vom Standpunkt der Anwendungen und der mathematischen Struktur (vgl. die Lösungsformeln in Bem. 11.9 und 11.10).

Notation: $(\varphi_n, \lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1 \times \mathbb{R}$ Eigenpaare des Dirichletlaplaceoperators, $(\varphi_n)_n$ ONB von $L^2(\Omega)$. Für $v \in L^2(\Omega)$ mit Darstellung $v = \sum_n v_n \varphi_n$ ist

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_n |v_n|^2, \\
|v|^2_{H^1(\Omega)} &= \sum_n \lambda_n |v_n|^2 \\
\|v\|^2_{H^{-1}} &:= \sup_{w\in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle v, w\rangle_{L^2}}{|w|_{H^1}} = \sup_{(w_n)_n} \frac{\sum_n v_n w_n}{\sqrt{\sum_n \lambda_n |w_n|^2}} = \sqrt{\sum_n |v_n|^2 \lambda_n^{-1}}
\end{aligned}$$

Diese Beobachtungen realisieren folgende Isomorphismen:

$$\begin{aligned}
L^2(\Omega) &\simeq \ell^2, \\
H_0^1(\Omega) &\simeq \{(v_n)_n \mid \sum_n \lambda_n |v_n|^2 < \infty\}, \\
H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^* &\simeq \{(v_n)_n \mid \sum_n \lambda_n^{-1} |v_n|^2 < \infty\}.
\end{aligned}$$

Wir erinnern an Lösungsoperator $E(t)u_0 = \sum_n e^{-\lambda_n t} \langle u_0, \varphi_n\rangle_{L^2} \varphi_n$ aus Bem. 11.9 für das Anfangswertproblem $u_t - \Delta u = 0$, $u(0) = u_0$. Man rechnet direkt nach, daß

Lemma 11.29 *Für $u_0 \in L^2(\Omega)$ gilt*

$$t \mapsto E(t)u_0 \in C^\infty((0,T); H_0^1(\Omega)), \tag{11.24}$$

$$t \mapsto E(t)u_0 \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega)), \tag{11.25}$$

$$t \mapsto \partial_t(E(t)u_0) \in L^2((0,T); H^{-1}(\Omega)), \tag{11.26}$$

$$t \mapsto E(t)u_0 \in C([0,T]; L^2(\Omega)). \tag{11.27}$$

Die Normen in (11.25)–(11.27) können durch $C\|u_0\|_{L^2}$ abgeschätzt werden.

Beweis: Wir illustrieren (11.26):

$$\begin{aligned}
\partial_t E(t)u_0 &= \sum_n -\lambda_n e^{-\lambda_n t} \langle u_0, \varphi_n\rangle_{L^2} \varphi_n, \\
\Longrightarrow \quad \int_0^T \|\partial_t E(t)u_0\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\, dt &= \int_0^T \sum_n \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} \frac{|\langle u_0, \varphi_n\rangle_{L^2}|^2}{\lambda_n}\, dt \le \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

□

Motivation: Lemma 11.29 zeigt:

- $u_0 \in L^2(\Omega)$ ist sinnvoll
- man kann $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ erhoffen
- man kann $u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$ und $u' \in L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))$ erwarten

Tatsächlich ist bei richtiger (d.h. distributioneller) Interpretation[8]von ∂_t eine gute Formulierung der Wärmeleitungsgleichung (vgl. Abschnitt 11.5.4, wo dies genauer ausgeführt wird):

Finde $u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$ mit $u' \in L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))$, sodaß

$$\int_0^T \varphi(t) \left[\langle u'(t), v \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} + a(u(t), v) \right] dt = \int_0^T \varphi(t) \langle f(t), v \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T), \tag{11.28a}$$

$$u(0) = u_0 \in L^2(\Omega) \tag{11.28b}$$

wobei $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $f \in L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))$ gegeben sind. Die Forderung (11.28b) ist sinnvoll, denn es gilt: $u \in L^2((0,T); H_0^1)$ mit $u' \in L^2((0,T); H^{-1})$ impliziert $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ (vgl. Satz 11.48).

Variiert man φ in (11.28), erhält man die Formulierung der Wärmeleitungsgleichung, die man oft in den Lehrbüchern findet: Finde $u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$ mit $u' \in L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))$, sodaß

$$\langle u'(t), v \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad \text{für fast alle } t \in (0,T), \tag{11.29a}$$

$$u(0) = u_0 \in L^2(\Omega) \tag{11.29b}$$

[8]siehe folgendes Kapitel. Für eine separablen Hilberträume X und eine bochnerintegrierbare Funktion $u \in L^1((0,T); X)$ ist die distributionelle Ableitung die lineare Abbildung $C_0^\infty(0,T) \to X$ geg. durch $\varphi \mapsto -\int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt$, wobei das Integral ein Bochnerintegral ist. Mit einer stetigen Einbettung $\iota_{X \to Y} : X \subset Y$ sagen wir $u' \in L^1((0,T); Y)$, falls es ein $v \in L^1((0,T); Y)$ gibt mit $-\iota_{X \to Y} \int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt = \int_0^T v(t)\varphi(t)\,dt$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$. Man schreibt dann kurz: $u' = v$.

11.5 Variationelle Formulierungen parabolischer AWPs

11.5.1 Das Bochnerintegral

Sei X ein Banachraum und $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Ziel: Sinnvolle Definition von $\int_a^b f(t)\,dt$ für eine Funktion $f : (a,b) \to X$

Definition 11.30 (einfache Funktion) *Seien $A_1, \dots, A_n \subset (a,b)$ (Lebesgue-)meßbar, $f_1, \dots, f_n \in X$. Dann heißt*

$$t \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i \chi_{A_i}(t)$$

eine einfache Funktion.

Definition 11.31 (Bochner-meßbar) *Eine Funktion $f : (a,b) \to X$ heißt* bochnermeßbar, *falls es eine Folge $(f_n)_n$ von einfachen Funktionen gibt mit*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \qquad \textit{fast überall.} \tag{11.30}$$

Definition 11.32 (Bochner-Integral) *Sei $f : (a,b) \to X$ und $(f_n)_n$ eine Folge* einfacher Funktionen *mit (11.30). Sei* zusätzlich

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|f(t) - f_n(t)\|_X \, dt = 0. \tag{11.31}$$

Dann heißt f Bochner-integrierbar *und*

$$\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

das Bochner-Integral von f. Hier ist das Integral einer einfachen Funktion in natürlicher Weise definiert.

Übung 11.33 Zeigen Sie, daß das Bochnerintegral der Funktion f wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Folge $(f_n)_n$ deren punktweiser Limes f ist (solange nur die Bedingungen (11.30) und (11.31) gelten). ∎

Satz 11.34 *$f : (a,b) \to X$ ist Bochner-integrierbar $\Longleftrightarrow$ f ist Bochner-meßbar und $t \mapsto \|f(t)\|_X$ ist integrierbar. Es gilt dann*

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\|_X \le \int_a^b \|f(t)\|_X \, dt \tag{11.32}$$

Beweis: "$\Longrightarrow$": z.z. ist $\int_a^b \|f(t)\|_X \, dt < \infty$.

Sei $(f_n)_n$ eine Folge einfacher Funktionen mit

$$f_n(t) \to f(t) \quad \text{fast überall} \qquad \text{und} \lim_{n\to\infty} \int_a^b \|f(t) - f_n(t)\|_X \, dt = 0.$$

Da $\|f_n(t)\|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f(t)\|_X$ f.ü. ist $t \mapsto \|f(t)\|_X$ als punktweiser Limes meßbarer Funktionen meßbar. Weiters folgt aus

$$\|f(t)\|_X \le \|f(t) - f_n(t)\|_X + \|f_n(t)\|_X,$$

daß $t \mapsto \|f(t)\|_X$ integrierbar ist.

"$\Longleftarrow$": Sei $(f_n)_n$ eine Folge einfacher Funktionen mit $f_n \to f$ f.ü. Definiere zu gegebenem $\varepsilon > 0$ die Folge $(\widetilde{f}_n)_n$ durch

$$\widetilde{f}_n(t) := \begin{cases} f_n(t) & \text{falls } \|f_n(t)\|_X \le (1+\varepsilon)\|f(t)\|_X \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{f}_n$ eine einfache Funktion: zum einen sind $t \mapsto \|f_n(t)\|_X$ und $t \mapsto \|f(t)\|_X$ meßbar, so daß die Menge $\{t \in (a,b) \mid \|f_n(t)\|_X - (1+\varepsilon)\|f(t)\|_X \le 0\}$ meßbar ist; weiters ist f_n ist eine einfache Funktion.

Für die Funktion $\widehat{f}_n(t) := \|\widetilde{f}_n(t) - f(t)\|_X$ gilt:

$$0 \le \widehat{f}(t) \le (2+\varepsilon)\|f(t)\|_X \tag{11.33}$$

$$\|\widetilde{f}_n(t) - f(t)\|_X \le \begin{cases} \|f(t) - f_n(t)\|_X & \text{falls } \|f_n(t)\| \le (1+\varepsilon)\|f(t)\|_X \\ \|f(t)\|_X & \text{falls } \|f_n(t)\| > (1+\varepsilon)\|f(t)\|_X \end{cases} \tag{11.34}$$

Die Beobachtung (11.34) zusammen mit $\|f_n(t)\|_X \to \|f(t)\|_X$ f.ü. impliziert damit

$$\|\widetilde{f}_n(t) - f(t)\|_X \to 0 \quad \text{f.ü.}$$

(11.33) zeigt, daß wir Lebesgue dominated convergence anwenden dürfen, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|\widetilde{f}_n(t) - f(t)\|_X \, dt = 0,$$

d.h. f ist Bochner-integrierbar.

Es bleibt, die Abschätzung (11.32) zu zeigen. Weil die Funktionen $\widetilde{f}_n$ einfache Funktionen sind, ergibt sich aus der Dreiecksungleichung

$$\left\| \int_a^b \widetilde{f}_n(t)\, dt \right\|_X \le \int_a^b \|\widetilde{f}_n(t)\|_X \, dt \le (1+\varepsilon) \int_a^b \|f(t)\|_X \, dt$$

und damit

$$\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\|_X = \left\| \lim_{n\to\infty} \int_a^b \widetilde{f}_n(t)\, dt \right\|_X \le (1+\varepsilon) \int_a^b \|f(t)\|_X \, dt.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die Behauptung. □

Analog zu den "klassischen" L^p-Räumen kann man die Räume $L^p(a,b;X)$ von Bochner-integrierbaren Funktionen definieren, wobei man natürlich Funktionen f, g miteinander identifiziert, für die gilt $f(t) = g(t)$ f.ü. Die Norm ist entsprechend definiert als

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1,\infty), \qquad \|f\|_{L^\infty(a,b;X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(a,b)} \|f(t)\|_X. \tag{11.35}$$

Satz 11.35 *Die Räume $L^p(a,b;X)$ sind Banachräume. Ist X ein Hilbertraum, so ist $L^2(a,b;X)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} = \int_a^b (u(t), v(t))_X \, dt.$$

Der Raum $L^1(a,b;X)$ ist genau der Raum der Bochner-integrierbaren Funktionen.

Satz 11.36 *Sei $f \in L^1(a,b;X)$. Dann gilt:*

$$\langle g, \int_a^b f(t)\, dt \rangle_{X'\times X} = \int_a^b \langle g, f(t)\rangle_{X'\times X} \qquad \forall g \in X'. \tag{11.36}$$

Beweis: *1. Schritt:* Wir arbeiten mit einem Dichtheitsargument. Sei f eine einfache Funktion. Dann gilt (11.36).

2. Schritt: Sei $g \in X'$. Dann definieren die linke und die rechte Seite (11.36) jeweils ein stetiges lineares Funktional auf $L^1(a,b;X)$: (wir zeigen hier nicht die Meßbarkeit der auftretenden Funktionen)

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \langle g, f(t)\rangle_{X'\times X} \, dt \right| &\le \int_a^b |\langle g, f(t)\rangle_{X'\times X}| \, dt \le \int_a^b \|g\|_{X'} \|f(t)\|_X \, dt = \|g\|_{X'} \|f\|_{L^1(a,b;X)} \\ \left| \langle g, \int_a^b f(t)\, dt \rangle_{X'\times X} \right| &\le \|g\|_{X'} \left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\|_X \le \|g\|_{X'} \int_a^b \|f(t)\|_X \, dt = \|g\|_{X'} \|f\|_{L^1(a,b;X)}. \end{aligned}$$

Die stetigen linearen Funktionale der linken und rechten Seite von (11.36) stimmen auf der dichten Teilmenge der einfachen Funktionen überein. Damit stimmen sie auf $L^1(a,b;X)$ überein. □

11.5.2 Die Räume $H^1(a,b;X)$ und $W(a,b;X;Y)$

Die Räume $H^1(a,b;X)$

Definition 11.37 (glatte Funktionen) *Wir schreiben $C_0^\infty((a,b);X)$ für den Raum der (klassisch) unendlich oft differenzierbaren X-wertigen Funktionen. Wir schreiben $C^\infty([a,b];X) := \{u|_{(a,b)} \,|\, u \in C^\infty(\mathbb{R};X)\}$. Für den Fall $X = \mathbb{R}$ schreiben auch kurz $C_0^\infty(a,b) := C_0^\infty((a,b);\mathbb{R})$ und $C^\infty([a,b]) := C^\infty([a,b];\mathbb{R})$.*

Sei $u \in L^1(a,b;X)$. Die *distributionelle* Ableitung von u ist die lineare Abbildung $C_0^\infty(a,b) \to X$ gegeben durch[9]

$$C_0^\infty(a,b) \ni \varphi \mapsto -\int_a^b u(t)\varphi'(t)\,dt. \tag{11.37}$$

Läßt sich diese lineare Abbildung durch eine Funktion $v \in L^1_{loc}(a,b;X)$ darstellen, d.h.

$$-\int_a^b u(t)\varphi'(t)\,dt = \int_a^b v(t)\varphi(t)\,dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b)$$

so nennen wir diese Funktion die *schwache Ableitung* von u. Damit diese Sprechweise sinnvoll ist, müssen wir wissen, daß die schwache Ableitung eindeutig ist. Hier tritt die Separabilität von X auf. Wir formulieren das Resultat etwas allgemeiner:

Lemma 11.38 *Sei X separabel und $u \in L^1(a,b;X')$. D.g.:*

$$\int_a^b u(t)\varphi(t)\,dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b) \qquad \Longrightarrow \qquad u = 0 \quad \text{f.ü.}$$

Beweis: Sei $x \in X$ beliebig. D.g.:

$$0 = \langle x, \int_a^b u(t)\varphi(t)\,dt\rangle_{X\times X'} = \int_a^b \varphi(t)\langle x, u(t)\rangle_{X\times X'}\,dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b).$$

Damit folgt $\langle x, u(t)\rangle_{X\times X'} = 0$ f.ü. D.h.: für jedes $x \in X$ existiert eine Nullmenge $N(x) \subset (a,b)$ so daß

$$\langle x, u(t)\rangle_{X\times X'} = 0 \qquad \forall t \in (a,b)\setminus N(x).$$

Sei $(x_n)_n$ eine dichte Teilmenge von X. Dann ist $N := \cup_n N(x_n)$ eine Nullmenge und

$$\langle x_n, u(t)\rangle_{X\times X'} = 0 \qquad \forall t \in (a,b)\setminus N \quad \forall n.$$

Damit ist $u(t) = 0$ auf $(a,b)\setminus N$. □

Im Fall, daß X ein separabler Hilbertraum ist, können wir damit definieren

Definition 11.39 *Sei X ein separabler Hilbertraum. Der Raum $H^1(a,b;X) := \{u \in L^2(a,b;X) \,|\, u' \in L^2(a,b;X)\}$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt*

$$(u,v) \mapsto \int_a^b \langle u(t), v(t)\rangle_X + \langle u'(t), v'(t)\rangle_X\,dt.$$

Die Räume $W(a,b;X;Y)$

Nicht jede Funktion $u \in L^2(a,b;X)$ hat eine distributionelle Ableitung, die als ein X-wertiges Bochnerintegral darstellbar ist. Für unsere Zwecke relevant ist der Fall, daß die distributionelle Ableitung trotzdem noch als ein Bochnerintegral darstellbar ist, wenn auch in einem größeren Raum $Y \supset X$ (d.h. in einer schwächeren Topologie).

Wir nehmen nun an:[10]

$$X,\, Y \text{ separable Hilberträume, } X \subset Y \text{ dicht.} \tag{11.38}$$

[9] die Integrale sind natürlich Bochnerintegrale

[10] Die Dichtheitsannahme kann für die Def. von $W(a,b;X;Y)$ abgeschwächt werden

Übung 11.40 Gelte (11.38). Sei $u \in L^1(a,b;X)$ (also Bochner-integrierbar als X-wertige Funktion). Dann ist $u \in L^1(a,b;Y)$ und mit der Einbettung $i_{X\to Y} : X \to Y$

$$i_{X\to Y} \int_a^b u(t)\,dt = \int_a^b i_{X\to Y} u(t)\,dt.$$

(Hier ist natürlich das linke Integral ein Bochnerintegral in X und das rechte eines in Y). ∎

Definition 11.41 *Gelte (11.38). Sei $u \in L^1(a,b;X)$. Eine Funktion $v \in L^1(a,b;Y)$ heißt schwache Ableitung von u, falls*

$$-\int_a^b u(t)\varphi'(t)\,dt = \int_a^b v(t)\varphi(t)\,dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b).$$

Hier ist die Gleichheit im Raum Y zu verstehen. Genauer gesagt ist diese Gleichheit so zu verstehen (vgl. Übung 11.40):

$$-i_{X\to Y} \int_a^b u(t)\varphi'(t)\,dt \overset{\text{Übung 11.40}}{=} -\int_a^b i_{X\to Y} u(t)\varphi'(t)\,dt = \int_a^b v(t)\varphi(t)\,dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b).$$

Weil die schwache Ableitung eindeutig ist (vgl. Lemma 11.38), schreiben wir u'.

Definition 11.42 ($W(a,b)$) *Gelte (11.38). Dann ist $W(a,b;X;Y) = \{u \in L^2(a,b;X) \mid u' \in L^2(a,b;Y)\}$ Dieser Raum ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$(u,v) \mapsto \int_a^b \langle u(t), v(t)\rangle_X + \langle u'(t), v'(t)\rangle_Y\,dt.$$

Wir bemerken, daß $Y = X$ zulässig ist. Dann fallen $W(a,b;X;Y)$ und $H^1(a,b;X)$ zusammen.

Wie im Fall der Sobolevräume ist es sehr bequem, wenn man weiß, daß der Raum der glatten Funktionen dicht in $W(a,b;X;Y)$ liegt. Tatsächlich gilt (vgl. [14, Chap. 1, Thm. 2.1])

Satz 11.43 *Gelte (11.38). Dann ist der Raum Raum $C^\infty([a,b];X)$ dicht im Raum $W(a,b;X;Y)$. M.a.W.: Mit der Einbettung $i_{X\to X}$ existiert für jedes $u \in W(a,b;X;Y)$ eine Folge $(u_n)_n \subset C^\infty([a,b];X)$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{L^2(a,b;X)} + \|u' - i_{X\to Y} u_n'\|_{L^2(a,b;Y)} = 0.$$

11.5.3 Evolutionstripel—Gelfand Dreier

Wir betrachten im folgenden Hilberträume V, H mit

$$V \text{ und } H \text{ sind separabel}, \qquad V \subset H \text{ ist dicht}. \tag{11.39}$$

Im folgenden wird der Dualraum V' eine wichtige Rolle spielen. Wegen $V \subset H$ ist $H' \subset V'$. Im Kontext von Evolutionstripeln ist üblich, den Raum H' mit H zu identifizieren. Damit ergibt sich $V \subset H \subset V'$. Etwas formal sauberer mit den Injektionen $i : V \to H$ und $i' : H \to V'$ ist die Aussage wie folgt:

Satz 11.44 *Sei H Hilbertraum und V ein reflexiver Raum. Sei $i : V \to H$ linear, stetig und injektiv und sei $i(V) \subset H$ dicht. Dann wird durch*

$$\langle i'h, v\rangle_{V'\times V} = (h, i(v))_H \tag{11.40}$$

eine lineare, stetige und injektive Abbildung $u' : H \to V'$ mit $\|j'\| \le \|i\|$ definiert. Weiters ist $i'(H) \subset V'$ dicht.

Beweis: Die Forderung (11.40) definiert den linearen Operator $i' : H \to V'$; er ist linear und stetig.

Der Operator i' ist injektiv: $i'h = 0$ impliziert $(h, i(v))_H = 0$ für alle $v \in V$. Weil $i(V) \subset H$ dicht ist, folgt $h = 0$ (in H).

Die Dichtheit von $i'(H)$ folgt mit Hahn-Banach. Sei $v'' \in V''$ mit $\langle v'', i'h\rangle_{V''\times V'} = 0$ für alle $h \in H$. Wir müssen zeigen: $v'' = 0$. Weil V reflexiv ist, gibt es also ein $v \in V$ so daß $\langle v, i'h\rangle_{V\times V'} = 0$ für alle $h \in H$. D.h.

$$0 = \langle v, i'h\rangle_{V\times V'} = (h, i(v))_H \qquad \forall h \in H.$$

Damit $i(v) = 0$ und aus der Injektivität von i folgt $v = 0$ und damit $v'' = 0$. □

Korollar 11.45 *Unter den Voraussetzungen von Satz 11.44 ist die Abbildung $I : V \to V'$ definiert durch $I = i' \circ i$ linear, stetig und injektiv. Weiters ist $I(V) \subset V'$ dicht, und I ist symmetrisch im folgenden Sinn:*

$$\langle Iv, w\rangle_{V'\times V} = \langle v, Iw\rangle_{V\times V'} = (iv, iw)_H \qquad \forall v, w \in V.$$

Beweis: Übung. □

Man faßt die obigen Resultate auch kurz wie folgt zusammen:

$$V \xrightarrow{i} H \xrightarrow{i'} V', \qquad \text{beide Einbettungen stetig und dicht.} \tag{11.41}$$

Definition 11.46 (Evolutionstripel, Gelfand-Dreier) *Unter den Voraussetzungen von Satz 11.44 heißt (11.41) ein* Evolutionstripel *oder* Gelfand-Dreier.

Das "Standard-setting" von Evolutionsproblemen ist, daß $u \in L^2(a, b; V)$ und die[11] schwache Ableitung $u' \in L^2(a, b; V')$, d.h. der Raum $W(a, b; V; V')$.

Übung 11.47 Seien V, H separable Hilberträume und $V \to H \to V'$ ein Evolutionstripel. Seien $u \in L^1(a, b; V)$ und $w \in L^1(a, b; V')$. Dann ist w schwache Ableitung von u genau dann wenn

$$\int_a^b (iu(t), i(v))_H \varphi'(t)\, dt = -\int_a^b \langle w(t), v\rangle_{V'\times V} \varphi(t)\, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(a, b) \quad \forall v \in V.$$

Hinweis: Satz 11.36, Korollar 11.45. ■

Für Hilberträume V, H ist wie oben erwähnt der Raum $W(a, b; V; V')$ ein Hilbertraum. Für die Anwendbarkeit von Evolutionstripeln auf parabolische Probleme ist die Aussage entscheidend, daß $u \in W(a, b; V; V')$ eine stetige Funktion mit Werten in H ist: $u \in C([a, b]; H)$; dies wird uns erlauben, die Anfangsbedingungen in sinnvoller Weise zu formulieren. Weiters gilt die Formel der partiellen Integration:

Satz 11.48 (partielle Integration) *Seien V, H separable Hilberträume und $V \to H \to V'$ ein Evolutionstripel. D.g.:*

(i) $W(a, b; V; V') \subset C([a, b]; H)$ und

$$\|iu\|_{C([a,b];H)} \le C \left[\|u\|_{L^2(a,b;V)} + \|u'\|_{L^2(a,b;V')}\right].$$

(ii) Für u, $v \in W(a, b; V; V')$ ist für alle s, $t \in [a, b]$:

$$\langle (i(u(t)), i(v(t)))_H - i(u(s)), i(v(s)))_H = \int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau)\rangle_{V'\times V} + \langle u(\tau), v'(\tau)\rangle_{V\times V'}\, d\tau$$

[11] Wir erinnern daran, daß wir Separabilität von V und H benötigen, um die Eindeutigkeit der schwachen Ableitung zu gewährleisten—das müßten wir noch fordern, um von *der* schwachen Ableitung sprechen zu dürfen

Beweis: *ad (i):* Im Prinzip geht man so vor wie bei den 1D Einbettungen Sobolevräumen $H^1(0,1) \subset C([0,1])$ durch Ausnutzen der Dichtheit von $C^\infty([0,1])$ in $H^1(0,1)$. Zur Erinnerung: man approximiert $u \in H^1(0,1)$ durch glatte Funktionen $u_n \in C^\infty([a,b])$ und zeigt, daß diese eine Cauchyfolge in $C([0,1])$ bilden. Wir werden uns deshalb entscheidend auf die Dichtheitsaussage Satz 11.43 stützen.

Wir illustrieren das Vorgehen für (i). Sei $u \in C^\infty([a,b];V)$. Dann existiert für jedes t die klassische Ableitung $u'(t) \in V$. Zur Motivation bemerken wir, daß für eine Funktion $v \in C^1(a,b;H)$ wir folgendes erwarten:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2 = (v(t), v'(t))_H = \langle v(t), v'(t)\rangle_{V\times V'}, \qquad \text{falls zusätzlich } v(t) \in V.$$

Wir wollen diese Aussage nun mittels der Einbettungen i und i' formal hinschreiben.

Für $u \in C^\infty([a,b];V)$ ist $u' \in C^\infty([a,b];V)$. Die Stetigkeit von $i : V \to H$ zeigt für die klassischen Ableitungen $(iu)' = iu'$. Damit kann man einfach zeigen:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(iu(t), iu(t))_H = (iu'(t), iu(t))_H = \langle i'(iu'(t)), u(t)\rangle_{V'\times V} = \langle Iu'(t), u(t)\rangle_{V'\times V} \tag{11.42}$$

Wir schließen für beliebige s, $t \in [a,b]$

$$\|iu(t)\|_H^2 = \|iu(s)\|_H^2 + \int_s^t \langle Iu'(\tau), u(\tau)\rangle_{V'\times V} \le \|iu(s)\|_H^2 + \sqrt{|s-t|}\|Iu'\|_{L^2(a,b;V')}\|u\|_{L^2(a,b;V)} \tag{11.43}$$

Sei nun $u \in W(a,b;V;V')$. Wegen der Dichtheit von $C^\infty([a,b];V)$ in $W(a,b;V;V')$ gibt es eine Folge $(u_n)_n \subset C^\infty([a,b];V)$ mit

$$\int_a^b \|u(t) - u_n(t)\|_V^2 + \|u'(t) - Iu_n'(t)\|_{V'}^2\, dt \to 0 \qquad n \to \infty. \tag{11.44}$$

Insbesondere konvergiert $u_n \to u$ (in V und damit auch in H) fast überall. Aus (11.43) folgt

$$\|iu_n(t) - iu_m(t)\|_H^2 \le \|iu_n(s) - iu_m(s)\|_H^2 + \sqrt{|s-t|}\|I(u_n' - u_m')\|_{L^2(a,b;V')}\|u_n - u_m\|_{L^2(a,b;V)} \tag{11.45}$$

Wir wählen nun s so, daß $u_n(s) \to u(s)$. Damit sehen wir, daß die Folge $(iu_n)_n$ eine Cauchyfolge in $C([a,b];H)$ ist. Sei dieser Limes $v \in C([a,b];H)$. Weil die Folge $(u_n)_n$ punktweise fast überall in $V \subset H$ gegen u konvergiert, muß also $v(t) = u(t)$ f.ü. gelten.

ad (ii): Man approximiert u und v durch zwei Folgen $(u_n)_n$, $(v_n)_n \subset C^\infty([a,b];V)$. Für feste n, m gilt dann die klassische partielle Integration (vgl. das Vorgehen in (11.42))

$$(iu_n(t), iv_m(t))_H - (iu_n(s), iv_m(s))_H = \int_s^t \langle Iu_n'(\tau), v_m(\tau)\rangle_{V'\times V} + \langle Iv_m'(\tau), u_n(\tau)\rangle_{V'\times V}.$$

Es ist dann $iu_n \to iu$, $Iu_n' \to u'$ punktweise f.ü. und analog für v. Die gewünschte Aussage ergibt sich nun, indem man zuerst $n \to \infty$ und anschließend $m \to \infty$. □

Bemerkung 11.49 Der Beweis von (i) zeigt, wie die Aussage $u \in C([a,b];H)$ (und die punktweisen Ausdrücke $iu(t)$, $iu(s)$) zu interpretieren sind: Für die Funktion $u \in W(a,b;V;V') \subset L^2(a,b;V)$ ist natürlich $iu \in L^2(a,b;H)$ und in dieser Äquivalenzklasse gibt es einen Vertreter, der sogar in $C([a,b];H)$ ist. ■

11.5.4 Die Wärmeleitungsgleichung als Evolutionsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung als Prototyp eines parabolischen AWPs ist

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \times (0,T) && (11.46a)\\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) && (11.46b)\\ u(0,\cdot) &= u_0(\cdot) && (11.46c) \end{aligned}$$

Für eine Lösungstheorie müssen die Ableitungen geeignet schwach interpretiert werden. Sei u eine klassische Lösung von (11.46a). Durch Multiplikation mit einer Testfunktion $v \in H_0^1(\Omega)$ und partieller Integration ergibt sich mit der Bilinearform $a(z,w) = \int_\Omega \nabla z \cdot \nabla w$

$$(u'(t), v)_{L^2(\Omega)} + a(u(t), v) = (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{11.47}$$

Um die Randbedingungen $u(t,\cdot) = 0$ auf $\partial\Omega$ zu erfüllen, wird man $u : (0,T) \to H_0^1(\Omega)$ suchen. Konkret werden werden wir $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ suchen.

Bis jetzt waren die Differentiationen nach der Ortsvariablen schwach interpretiert, nicht aber die Ableitungen nach t. Wir setzen $V = H_0^1(\Omega)$ und $H = L^2(\Omega)$. Wir hatten uns schon festgelegt, $u \in L^2(0,T;V)$ suchen. Für die Zeitableitung u' sehen wir in (11.47), daß es auch genügen würde, wenn $u'(t) \in V'$. Dies suggeriert, daß $u' \in L^2(0,T;V')$ eine vernünftige Bedingung sein wird.

Bis jetzt war die Zeitableitung in (11.47) klassisch. Eine distributionelle Interpretation ergibt sich durch Multiplikation mit $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ und partieller Integration:

$$-\int_0^T (u(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi'(t)\,dt + \int_0^T a(u(t), v)\varphi(t)\,dt = \int_0^T (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t)\,dt \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Verlangt man nun $u \in L^2(0,T;V)$ mit $u' \in L^2(0,T;V')$, so ergibt sich wegen $(u(t),v)_{L^2(\Omega)} = (iu(t), iv)_H$, daß

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi'(t)\,dt &= -\int_0^T (iu(t), iv)_H \varphi'(t)\,dt \overset{\text{Üb. } 11.47}{=} -\int_0^T \langle Iu(t), v\rangle_{V'\times V} \varphi'(t)\,dt \\ &\overset{\text{Satz } 11.36}{=} -\langle v, \int_0^T Iu(t)\varphi'(t)\,dt\rangle_{V\times V'} \overset{u' \in L^2(0,T;V')}{=} \langle v, \int_0^T u'(t)\varphi(t)\,dt\rangle_{V\times V'} \end{aligned}$$

Damit ist die Wärmeleitungsgleichung so zu verstehen: Finde $u \in L^2(0,T;V)$ mit $u' \in L^2(0,T;V')$, so daß

$$\int_0^T \langle Iu'(t), v\rangle_{V'\times V} \varphi(t)\,dt + \int_0^T a(u(t), v)\varphi(t)\,dt = \int_0^T (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t)\,dt \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Wir bemerken, daß diese Aussage (äquivalent) punktweise in der Zeit verstanden werden kann: Finde $u \in L^2(0,T;V)$ mit $u' \in L^2(0,T;V')$ so daß[12]

$$\langle u'(t), v\rangle_{V'\times V} + a(u(t), v) = (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{fast überall.}$$

Die Anfangsbedingung (11.46c) ist bis jetzt nicht berücksichtigt worden (die Testfunktionen φ verschwinden bei $t = 0$!). Daß dies möglich ist, ergibt sich aus Satz 11.48: $u \in L^2(0,T;V)$ mit $u' \in L^2(0,T;V')$ impliziert $u \in C([0,T];H)$. D.h. die Anfangsdaten u_0 dürfen wir aus $H = L^2(\Omega)$ wählen. Damit ist das klassische Formulierung: Finde $u \in L^2(0,T;V)$ mit $u' \in L^2(0,T;V')$ so daß

$$\langle u'(t), v\rangle_{V'\times V} + a(u(t), v) = (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{fast überall,} \tag{11.48a}$$

$$u(0) = u_0 \in H. \tag{11.48b}$$

Äquivalent hierzu ist wie oben besprochen die (in der Zeit) distributionelle Sichtweise: Finde $u \in L^2(0,T;V)$ mit $u' \in L^2(0,T;V')$ so daß

$$-\int_0^T (iu(t), iv)_H \varphi'(t)\,dt + \int_0^T a(u(t), v)\varphi(t)\,dt = \int_0^T (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t)\,dt \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T), \tag{11.49a}$$

$$u(0) = u_0 \in H. \tag{11.49b}$$

Die Existenztheorie für diese parabolischen Probleme wird in der VO partielle Differentialgleichungen mit dem Galerkinverfahren entwickelt. Wir zeigen hier einen alternativen Zugang, der mit der inf-sup Bedingung arbeitet. Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall $u_0 = 0$. Wir definieren die Räume

$$X := \{u \in L^2(0,T;V) \,|\, u' \in L^2(0,T;V') \quad \text{und } u(0) = 0\}, \qquad Y := L^2(0,T;V). \tag{11.50}$$

[12] vergl. auch den Beweis von Lemma 11.38

Man kann sich überlegen, daß (11.49) äquivalent ist zu: Finde $u \in X$, so daß

$$\int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle_{V'\times V} + a(u(t), v(t))\, dt = \int_0^T \langle f(t), v(t)\rangle_{V'\times V}\, dt \quad \forall v \in Y; \tag{11.51}$$

hier haben wir zugleich den Schritt gemacht, daß wir den allgemeineren Fall $f \in L^2(0,T;V')$ formuliert haben. Bevor wir uns mit der Lösbarkeit von (11.51) beschäftigen, fassen wir die Äquivalenzen zusammen:

Satz 11.50 *Die Formulierungen (11.48) und (11.49) sind äquivalent. Für $u_0 = 0$ sind diese Formulierungen mit (11.51) äquivalent.*

Für die Lösbarkeitstheorie müssen wir eine inf-sup-Bedingung zeigen:

Satz 11.51 *Die Bilinearform $B : X \times Y \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$(u, v) \mapsto B(u, v) := \int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle_{V'\times V} + a(u(t), v(t))\, dt$$

erfüllt:

$$\inf_{u\in X} \sup_{v\in Y} \frac{B(u,v)}{\|u\|_X \|v\|_Y} \geq \gamma > 0 \tag{11.52}$$

$$\forall 0 \neq v \in Y \quad \exists u \in X: \quad B(u,v) \neq 0. \tag{11.53}$$

Beweis: *ad (11.52):* Sei $\mathbf{A} : V \to V'$ der Operator, der durch die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ definiert ist:

$$\langle \mathbf{A}u, v\rangle_{V'\times V} = a(u,v) \qquad \forall u, v \in V.$$

Nach Lax-Milgram ist $\mathbf{A}$ stetig invertierbar. Insbesondere ist

$$\|z\|_{V'} \leq C\|\mathbf{A}^{-1}z\|_V \qquad \forall z \in V'.$$

Weiters impliziert die positive Definitheit von a eine positive Definitheit von $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\langle \mathbf{A}^{-1}z, z\rangle_{V\times V'} = \langle \mathbf{A}^{-1}z, \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}z\rangle_{V\times V'} = a(\mathbf{A}^{-1}z, \mathbf{A}^{-1}z) \geq \alpha\|\mathbf{A}^{-1}z\|_V^2 \geq \alpha'\|z\|_{V'}^2 \qquad \forall z \in V'. \tag{11.54}$$

Zu gegebenem $u \in X$ machen wir den Ansatz $v(t) = \mathbf{A}^{-1}u'(t) + \mu u(t)$ mit einem Parameter $\mu > 0$, den wir noch wählen werden. Einsetzen ergibt:

$$b(u,v) \quad = \quad \int_0^T \langle u'(t), \mathbf{A}^{-1}u'(t) + \mu u(t)\rangle_{V'\times V} + a(u(t), \mathbf{A}^{-1}u'(t) + \mu u(t))\, dt$$

Wir bemerken, daß (11.42) (dort ist es für glatte V-wertige Funktionen gemacht) uns liefert:

$$\int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle_{V'\times V}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\|iu(t)\|_H^2\, dt = \frac{1}{2}\|iu(T)\|_H^2.$$

Damit

$$b(u,v) \quad = \quad \underbrace{\int_0^T \langle u'(t), \mathbf{A}^{-1}u'(t)\rangle_{V'\times V}\, dt}_{\geq C\|u'\|^2_{L^2(0,T;V')}} + \mu \underbrace{\frac{1}{2}\|iu(T)\|_H^2}_{\geq 0} + \mu \underbrace{\int_0^T a(u(t), u(t))\, dt}_{\geq C\|u\|^2_{L^2(0,T;V)}} + \mu \underbrace{\int_0^T a(u(t), \mathbf{A}^{-1}u'(t))\, dt}_{\leq C\|u\|_{L^2(0,T;V)}\|u'\|_{L^2(0,T;V')}}$$

Wählt man μ hinreichend groß, so ergibt sich

$$\begin{aligned} b(u,v) &\geq C\left[\|u\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|^2_{L^2(0,T;V')}\right] = C\|u\|_X^2, \\ \|v\|_Y &\leq \mu\|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|_{L^2(0,T;V')} \leq (1+\mu)\|u\|_X. \end{aligned}$$

ad (11.53): Sei $v \in Y$ mit

$$b(u,v) = 0 \qquad \forall u \in X. \tag{11.55}$$

Wir müssen zeigen: $v = 0$.

1. Schritt: Wir behaupten, daß die distributionelle Ableitung von $v \in L^2(0,T;V)$ in $L^2(0,T;V')$ ist. Wir geben v' explizit an, indem wir die Funktion

$$z(t) := \mathbf{A}v(t) \qquad t \in (0,T)$$

definieren. Dann ist $z \in L^2(0,T;V')$, weil $v \in L^2(0,T;V)$. Daß z die Ableitung v' ist, ergibt sich aus folgender Rechnung für beliebiges $w \in V$ und Funktionen $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$:

$$\begin{aligned}
\langle w, \int_0^T z(t)\varphi(t)\,dt\rangle_{V\times V'} &\overset{\text{Satz 11.36}}{=} \int_0^T \langle w, z(t)\rangle_{V\times V'}\varphi(t)\,dt = \int_0^T \langle w, \mathbf{A}v(t)\rangle_{V\times V'}\varphi(t)\,dt \\
&= \int_0^T a(v(t), w\varphi(t))\,dt \overset{b(\cdot,v)=0}{=} -\int_0^T \langle Iw\varphi'(t), v(t)\rangle_{V'\times V}\,dt \\
&\overset{Cor.\ 11.45}{=} -\langle w, \int_0^T Iv(t)\varphi'(t)\,dt\rangle_{V\times V'}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_0^T z(t)\varphi(t)\,dt = -\int_0^T Iv(t)\varphi'(t)\,dt,$$

was genau bedeutet, daß z die schwache Ableitung von v ist.

2. Schritt: Weil $v \in L^2(0,T;V)$ mit $v' \in L^2(0,T;V')$ können wir die Formel der partiellen Integration aus Satz 11.48 zum Einsatz bringen. Es gilt für beliebiges $u \in X$:

$$\begin{aligned}
(iu(T), iv(T))_H - (iu(0), iv(0))_H &= \int_0^T \langle u'(t), v(t)\rangle_{V'\times V} + \langle v'(t), u(t)\rangle_{V'\times V}\,dt \qquad (11.56)\\
&\overset{b(\cdot,v)=0}{=} \int_0^T -a(u(t), v(t)) + \langle v'(t), u(t)\rangle_{V'\times V}\,dt
\end{aligned}$$

Wählt man in (11.56) die Funktion u von der Form $u(t) = w\varphi(t)$ mit $w \in V$ und $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ so ergibt sich

$$\int_0^T \left[-\langle v'(t), w\rangle_{V'\times V} + a(v(t), w)\right]\varphi(t)\,dt = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

Durch Variation von $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ ergibt sich

$$-\langle v'(t), w\rangle_{V'\times V} + a(v(t), w) = 0 \quad \text{f.ü..} \tag{11.57}$$

Anders ausgedrückt (vgl. den Beweis von Lemma 11.38):

$$v'(t) = \mathbf{A}v(t) \quad \text{f.ü..} \tag{11.58}$$

Wählt man nun in (11.56) $u(t) = tw$ mit $w \in V$ beliebig, so ergibt sich

$$T(iw, iv(T))_H = \int_0^T t\,\underbrace{\left(-a(w, v(t)) + \langle v'(t), w\rangle_{V'\times V}\right)}_{\overset{(11.57)}{=} 0}\,dt = 0 \qquad \forall w \in V. \tag{11.59}$$

Damit ergibt sich $v(T) = 0$. Zusammen ergibt sich

$$v'(t) = \mathbf{A}v(t) \quad \text{f.ü.} \qquad \text{und} \qquad v(T) = 0 \quad \text{in } H. \tag{11.60}$$

3. Schritt: Aus (11.60) schließen wir nun $v \equiv 0$: Aus (11.58) erhalten wir

$$0 = \int_0^T -a(u(t), v(t)) + \langle v'(t), u(t)\rangle_{V'\times V}\,dt, \qquad \forall u \in L^2(0,T;V).$$

Wählt man $u = v$ und nutzt $v(T) = 0$ sowie die Formel der partiellen Integration, so ergibt sich

$$-\|iv(0)\|_H^2 = \int_0^T a(v(t), v(t))\, dt \geq 0,$$

woraus sich $v = 0$ ergibt. □

Korollar 11.52 *Das Variationsproblem (11.51) hat für jedes $f \in L^2(0, T; V')$ eine eindeutige Lösung.*

Beweis: Folgt aus Satz 11.51 und Satz 7.1. □

Bemerkung 11.53 Man kann auch für inhomogene Anfangsbedingungen arbeiten. Man wählt als Testraum

$$\widetilde{Y} := Y \times H$$

und als Bilinearform $\widetilde{B}$ und rechte Seite $\widetilde{l}$

$$\widetilde{B}(u, (v, w)) := B(u, v) + (u(0), w)_H, \qquad \widetilde{l}((v, w)) := l(v) + (u_0, w)_H$$

11.6 nichtglatte Anfangsdaten

Ziel: Eine Konvergenztheorie für *realistische* Startwerte u_0, d.h. $u_0 \in L^2$. Die Konvergenztheorie soll auf dem Abschätzen der Fehler durch Semidiskretisierung aufbauen:

$$\|u(t_n) - u_h^n\| \le \|u(t_n) - u_h(t_n)\| + \|u_h(t_n) - u_h^k\|$$

Wir werden in Abschnitt 11.6.3 den Fehler $\|u(t_n) - u_h(t_n)\|_{L^2}$ kontrollieren und in Abschnitt 11.6.4 den Fehler $\|u_h(t_n) - u_h^n\|_{L^2}$.

Problem bei $\|u(t_n) - u_h(t_n)\|$: Die Lösungstheorie zeigt, daß mit $V = H_0^1(\Omega)$ und $H = L^2(\Omega)$ das "natürliche" setting ist: $u \in L^2(0,T;V)$ und $u' \in L^2(0,T;V')$ und $u \in C([0,T];H)$. Wir können eigentlich *nicht* erwarten, daß u (oft) differenzierbar ist *mit Werten in* V. Das war allerdings unser Startpunkt für die Analyse des Semidiskretisierungsfehlers $u - u_h$ in Satz 9.3:

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2} \le \|u_0 - P_h u_0\|_{L^2} e^{-\gamma t} + \|u(t) - P_h u(t)\|_{L^2} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|u'(s) - P_h u'(s)\|_{L^2}\, ds;$$

für sinnvolle Abschätzungen benötigt man, daß $u_0 \in V$ (und nicht in H!) und daß $u' \in L^1((0,T);L^2(\Omega))$.

Vereinfachung: Wir werden uns im vorliegenden Abschnitt auf den Speziallfall $f \equiv 0$ konzentieren, bei dem die für die Wärmleitungsgleichung typischen Phänomene besonders ausgeprägt auftreten. Qualitativ ähnliche Aussagen gelten auch für numerische Verfahren mit hinreichend glatten $f \neq 0$.

11.6.1 Glättungseigenschaft

Typisch für parabolische Probleme ist die *Glättungseigenschaft*, d.h. die oben angedeuteten Schwierigkeiten treten nur bei $t = 0$ auf. Um zu sehen, welche Regularität man erwarten kann, betrachten wir den den Lösungsoperator $E(t) : u_0 \mapsto u(t)$, welcher die folgende Form hat[13]

$$E(t)u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} (u_0, \varphi_n)_{L^2} \varphi_n.$$

Es stellt sich heraus, daß die Ableitungen der Lösung $E(t)u_0$ in geeignet *gewichteten* V-wertigen Räumen sind:

Lemma 11.54 *(i) Für jedes $u_0 \in L^2(\Omega)$ ist $t \mapsto E(t)u_0$ in $C^\infty((0,\infty);H_0^1(\Omega))$ und auch in $C^\infty((0,\infty);L^2(\Omega))$.*

(ii) für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ ist $\|\frac{d^m}{dt^m} E(t)u_0\|_{H^1(\Omega)} \le C_m t^{-1/2-m} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$.

(iii) für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ ist $\|\frac{d^m}{dt^m} E(t)u_0\|_{L^2(\Omega)} \le C_m t^{-m} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$.

(iv) $\int_0^t \|E(s)u_0\|_{H^1}^2\, ds \le C\|u_0\|_{L^2}^2$.

(v) $\int_0^t s^2 \|\frac{d}{dt} E(s)u_0\|_{H^1}^2\, ds \le C\|u_0\|_{L^2}^2$.

Beweis: Übung. Beachte, daß

$$\|z\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_n |(z, \varphi_n)_{L^2}|^2, \qquad |z|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_n \lambda_n |(z, \varphi_n)_{L^2}|^2.$$

Daraus ergibt sich z.B. für (iv)

$$\int_0^t |E(t)u_0|_{H^1(\Omega)}^2\, ds = \int_0^t \sum_n \lambda_n |(E(s)u_0, \varphi_n)_{L^2}|^2\, ds = \int_0^t \sum_n \lambda_n e^{-2\lambda_n s} |(u_0, \varphi_n)_{L^2}|^2\, ds \le C \sum_n |(u_0, \varphi_n)_{L^2}|^2$$

Für (ii), (iii) verwendet man $\sup_{x>0} xe^{-x} < \infty$. □

[13] Erinnerung: für $f \neq 0$ liefert das Duhamelsche Prinzip auch eine Lösungsformel

Bemerkung 11.55 Falls $\partial\Omega \in C^\infty$, dann sind die Eigenfunktionen φ_n auch glatt (auf $\overline{\Omega}$), und man kann zeigen: $E(t)u_0 \in C^\infty((0,\infty); H^k(\Omega))$ für jedes k. Die Singularität bei $t = 0$ bleibt jedoch erhalten.

■

Frage: ist es trotzdem möglich, daß $t \mapsto E(t)u_0 \in C^m([0,T]; V)$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$?
Antwort: kompatible Anfangswerte u_0

Lemma 11.56 *Definiere für $m \in \mathbb{N}_0$ den Raum*

$$\widehat{H}^m(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \sum_n \lambda_n^m |(u, \varphi_n)_{L^2}|^2 < \infty\}, \qquad \|u\|^2_{\widehat{H}^m(\Omega)} := \sum_n \lambda_n^m |(u, \varphi_n)_{L^2}|^2 \tag{11.61}$$

Dann gilt:

(i) Für $u_0 \in L^2$ gilt $E(t)u_0 \in \widehat{H}^m(\Omega)$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ und $t > 0$.

(ii) Falls $u_0 \in \widehat{H}^m(\Omega)$, dann gilt für $\ell \geq 0$ und $0 \leq m \leq q$

$$\|\frac{d^\ell}{dt^\ell} E(t)u_0\|_{\widehat{H}^q(\Omega)} \leq Ct^{-(q-m)/2-\ell} \|u_0\|_{\widehat{H}^m(\Omega)}, \qquad t > 0.$$

Beweis: Übung. Man bemerkt, daß $\sup_{x>0} x^{q-m+2\ell} e^{-2x} < \infty$. □

Bemerkung 11.57

- für $m = 0$ ist $\widehat{H}^0(\Omega) = L^2(\Omega)$
- für $m = 1$ ist $\widehat{H}^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)$
- für $m > 1$ ist $\widehat{H}^m(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ nicht einfach zu beschreiben. Für glatte $\partial\Omega$ gilt

  $$\widehat{H}^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) \mid (\Delta^j u)|_{\partial\Omega} = 0 \quad 0 \leq j < m/2\}.$$

  Insbesondere ist auf dem Raum $\widehat{H}^m(\Omega)$ die Norm $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{\widehat{H}^m(\Omega)}$ (vgl. [19, Lemma 3.1]).
- für $m = 2$ ist $\widehat{H}^m(\Omega) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Man sieht, daß die Forderung $u_0 \in \widehat{H}^m(\Omega)$ eine unnatürliche *Kompatibilitäts*bedingung auf $\partial\Omega$ darstellt.

■

Offensichtlich sind für $u_0 = 0$ *alle* Kompatibilitätsbedingungen erfüllt ($\rightarrow$ "versteckte" Regularität). Mit dem Duhamelschen Prinzip können wir deshalb folgende Regularitätsaussage erhalten:

Lemma 11.58 *Sei $u_0 = 0$ und $f \in L^2((0,T); L^2(\Omega))$. Dann erfüllt die Lösung $u(t) = \int_0^t E(t-s)f(s)\,ds$:*

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq Ct \int_0^t \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds, \qquad t \in (0,T], \tag{11.62}$$

$$\|u(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C \int_0^t \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds, \qquad t \in (0,T], \tag{11.63}$$

$$\int_{s=0}^t \|u'(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds \leq C \int_0^t \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds. \tag{11.64}$$

Beweis: Übung. Schreiben Sie $f_n(s) = (f(s), \varphi_n)_{L^2}$. Starten Sie von $u(t) = \sum_n \varphi_n \int_0^t f_n(s) e^{-\lambda_n(t-s)}, ds$. Für (11.63), (11.64) überlegen Sie sich, daß Sie schlußendlich $\sum_n \int_0^t \|f_n(s)\|^2\,ds \lambda_n \int_0^t e^{-2\lambda_n(t-s)}\,ds$ abschätzen müssen. □

Übung 11.59 Sei $u_{h,0} = 0$. Dann gilt für die semidiskrete Approximation $u_h(t) = \int_0^t E_h(t-s)f(s) = \int_0^t E_h(t-s)\Pi^{L^2} f(s)\,ds$

$$\begin{aligned}
\|u_h(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le Ct\int_0^t \|\Pi^{L^2} f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds, \qquad t\in(0,T],\\
\|u_h(t)\|^2_{H^1(\Omega)} &\le C\int_0^t \|\Pi^{L^2} f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds, \qquad t\in(0,T],\\
\int_{s=0}^t \|u_h'(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds &\le C\int_0^t \|\Pi^{L^2} f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds.
\end{aligned}$$

■

11.6.2 Reduktion auf die Analyse von ρ

Ausgangspunkt der Fehleranalyse ist die Fehlergleichung: Wie im Beweis von Satz 9.3 schreiben wir

$$e_h(t) := u_h(t) - u(t) = \underbrace{u_h(t) - P_h u(t)}_{=\theta(t)} + \underbrace{P_h u(t) - u(t)}_{=\rho(t)} \tag{11.65}$$

und erinnern uns an die Fehlergleichung, die dort bewiesen wurde:

$$(\theta'(t), v)_{L^2} + a(\theta(t), v) = -(\rho'(t), v)_{L^2} \qquad \forall v\in V_h. \tag{11.66}$$

Für eine Abschätzung von θ tritt die Schwierigkeit auf, daß $\theta(0)$ nicht definiert ist. Eine der Kernbeobachtungen von Lemma 11.54 ist, daß wir u' zwar nicht in $L^2(0,T;V)$ oder $L^2(0,T;H)$ erwarten können, daß aber Schwierigkeiten nur bei $t=0$ zu erwarten sind, d.h. man kann mit gewichteten Räumen arbeiten. So sind z.B. $\int_0^t s^2\|u'(s)\|^2_{L^2}\,ds$ und $\int_0^t s^2\|u(s)\|^2_{H^1}\,ds$ kontrollierbare Objekte. Wir verfeinern deshalb die Abschätzungen aus Satz 9.3 und Übung 9.5 dahingehend, daß wir mit gewichteten Normen arbeiten.

Lemma 11.60 *Es ist für alle $t>0$*

$$\int_0^t \|\theta(s)\|^2_{L^2}\,ds \le Ct\|\Pi^{L^2} e_h(0)\|^2_{L^2} + C\int_0^t \|\rho(s)\|^2_{L^2}\,ds, \tag{11.67}$$

$$t\|\theta(t)\|^2_{L^2} + \int_0^t s|\theta(s)|^2_{H^1}\,ds \le C\left[\int_0^t s^2\|\rho'(s)\|^2_{L^2} + \|\rho(s)\|^2_{L^2}\,ds + \sup_{s\in(0,t)} s\|\rho(s)\|^2_{L^2} + t\|\Pi^{L^2} e_h(0)\|^2_{L^2}\right] \tag{11.68}$$

Beweis: *ad (11.67):* Der "Trick" beim Beweis von (11.67) besteht in einem "parabolischen Dualitätsargument[14]". Sei $t=t_0$ fest gewählt. Betrachte die "Rückwärtsgleichung"

$$\begin{aligned}
-z_t - \Delta z &= \theta \quad \text{auf } \Omega\times(0,t_0), && (11.69)\\
z &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\times(0,t_0), && (11.70)\\
z(t_0) &= 0. && (11.71)
\end{aligned}$$

Betrachte die semidiskrete Approximation an z, d.h. die Funktion $z_h \in C^1((0,t_0);V_h)\cap C^0([0,t_0];V_h)$, welche die Gleichung

$$\begin{aligned}
-(z_h', v)_{L^2} + a(z_h, v) &= (\theta, v)_{L^2} \qquad \forall v\in V_h, \quad \text{auf } (0,t_0) && (11.72)\\
z_h(t_0) &= 0 && (11.73)
\end{aligned}$$

[14] Dualitätsargumente sind auch nur eine clevere Wahl der Testfunktion...

löst. Dann ergibt sich für $s \in (0, t_0)$

$$\begin{aligned}
\|\theta(s)\|_{L^2}^2 &= -(z_h'(s), \theta(s))_{L^2} + a(z_h(s), \theta(s)) \\
&= -\frac{d}{dt}(z_h(s), \theta(s))_{L^2} + (z_h(s), \theta'(s))_{L^2} + a(z_h(s), \theta(s)) \\
&= -\frac{d}{dt}(z_h(s), \theta(s))_{L^2} - (\rho'(s), z_h(s))_{L^2} \\
&= -\frac{d}{dt}(z_h(s), \theta(s))_{L^2} + (\rho(s), z_h'(s))_{L^2} - \frac{d}{dt}(z_h(s), \rho(s))_{L^2} \\
&= -\frac{d}{dt}(z_h(s), e_h(s))_{L^2} + (\rho(s), z_h'(s))_{L^2}.
\end{aligned}$$

Für $0 < \varepsilon < t_0$ liefert Integration und $z_h(t_0) = 0$

$$\int_\varepsilon^{t_0} \|\theta(s)\|_{L^2}^2 \le \underbrace{(z_h(\varepsilon), e_h(\varepsilon))_{L^2}}_{\to (z_h(0), e_h(0))_{L^2} \text{wg. } e_h \in C([0,T]; L^2)} + \underbrace{\int_\varepsilon^{t_0} \|\rho(s)\|_{L^2} \|z_h'(s)\|_{L^2}\, ds}_{\le \sqrt{\int_0^{t_0} \|\rho\|_{L^2}^2} \sqrt{\int_0^{t_0} \|z_h'\|_{L^2}^2}}$$

Weil $z_h(0) \in V_h$ ist also $(z_h(0), e_h(0))_{L^2} = (z_h(0), \Pi^{L^2} e_h(0))_{L^2}$. Übung 11.59 liefert

$$\int_0^{t_0} \|z_h'(s)\|_{L^2}^2\, ds + t_0^{-1} \|z_h(0)\|_{L^2}^2 \le C \int_0^{t_0} \|\theta(s)\|_{L^2}^2\, ds.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^{t_0} \|\theta(s)\|_{L^2}^2\, ds \le C \left[\sqrt{\int_0^{t_0} \|\rho(s)\|_{L^2}^2\, ds} + \sqrt{t} \|\Pi^{L^2} e_h(0)\|_{L^2} \right] \sqrt{\int_0^{t_0} \|\theta(s)\|_{L^2}^2\, ds}$$

ad (11.68): Der Beweis verläuft wie in Satz 9.3. Die Wahl $v = t\theta(t)$ in (11.66) liefert

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(t\|\theta(t)\|_{L^2}^2) + ta(\theta(t), \theta(t)) = -t(\rho'(t), \theta(t))_{L^2} + \frac{1}{2}\|\theta(t)\|_{L^2}^2$$

Integration über (ε, t) liefert

$$\frac{1}{2} t\|\theta(t)\|_{L^2}^2 + \int_\varepsilon^t s|\theta(s)|_{H^1}^2\, ds = \frac{1}{2}\varepsilon\|\theta(\varepsilon)\|_{L^2}^2 - \underbrace{\int_\varepsilon^t (s\rho'(s), \theta(s))_{L^2}\, ds}_{\le \sqrt{\int_0^t s^2 \|\rho'(s)\|_{L^2}^2\, ds} \sqrt{\int_0^t \|\theta(s)\|_2^2\, ds}} + \frac{1}{2} \int_\varepsilon^t \|\theta(s)\|_{L^2}^2\, ds$$

Es bleibt, eine Abschätzung für $\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \|\theta(\varepsilon)\|_{L^2}^2$ zu finden. Wir schreiben $\theta = u_h - P_h u = u - u_h - \rho = e_h - \rho$ und erhalten wegen $e_h \in C([0,T]; L^2(\Omega))$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon} \|\theta(\varepsilon)\|_{L^2} \le \limsup_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon} \|e_h(\varepsilon)\|_{L^2} + \limsup_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon} \|\rho(\varepsilon)\|_{L^2} = \limsup_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon} \|\rho(\varepsilon)\|_{L^2} \le \sup_{s \in (0,t)} \sqrt{s} \|\rho(s)\|_{L^2}.$$

Insgesamt ergibt sich mit der Young-Ungleichung und (11.67):

$$t\|\theta(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t s|\theta(s)|_{H^1}^2\, ds \le C \left[\int_0^t s^2 \|\rho'(s)\|_{L^2}^2 + \|\rho\|_{L^2}^2\, ds + \sup_{s \in (0,t)} s\|\rho(s)\|_{L^2}^2 + t\|\Pi^{L^2} e_h(0)\|_{L^2}^2 \right].$$

□

11.6.3 Semidiskrete Konvergenzresultate mit kompatiblen Anfangsdaten

Wie Satz 9.3 und Lemma 11.60 zeigen, muß ρ kontrolliert werden. Damit werden die Approximationseigenschaften des Ritzprojektors P_h wichtig. Die folgende Notation fixiert den Parameter r — er ergibt sich allgemein aus dem (elliptischen) Dualitätsargument ("Nitsche-Trick"):

Notation 11.61 *Sei $r \in (0,1]$ so, daß*

$$\|v - P_h v\|_{L^2} \le Ch^r \|v - P_h v\|_{H^1} \le Ch^r \|v\|_{H^1}$$

Für konvexe oder glatt berandete Gebiete gilt $r = 1$ in Notation 11.61, falls typische FEM-Räume gewählt werden und h die Gitterweite darstellt. Um später auf diesen Fall verweisen zu können, formulieren folgende Annahme, welche für typische FEM-Räume (basierend auf stückweise linearen Ansatzfunktionen) für konvexe Gebiete oder glatte berandete Gebiete erfüllt ist:

Voraussetzung 11.62 *Es gilt Notation 11.61 mit $r = 1$ und*

$$\|v - P_h v\|_{L^2} \le Ch^2 \|v\|_{\widehat{H}^2(\Omega)} \qquad \forall v \in \widehat{H}^2(\Omega).$$

Für *kompatible* Anfangsdaten $u_0 \in \widehat{H}^2(\Omega)$ erhält man die optimale Rate:

Satz 11.63 *Es gelte Voraussetzung 11.62. Sei $f \equiv 0$ und $u_0 \in \widehat{H}^2(\Omega)$. Sei zusätzlich $u_{h,0} = \Pi^{L^2} u_0$ (es geht auch $u_{h,0} = P_h u_0$). Dann ist*

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \le Ch^2 \|u_0\|_{\widehat{H}^2(\Omega)}$$

Beweis: Wir verwenden Lemma 11.60 und die Eigenschaft aus Bemerkung 11.57, daß die volle H^2-Norm äquivalent zur $\|\cdot\|_{\widehat{H}^2}$-Norm ist. Mit Annahme 11.62 und Lemma 11.56 folgt

$$\begin{aligned}
\|e_h(0)\|_{L^2} &\le Ch^2 \|u_0\|_{\widehat{H}^2(\Omega)}, \\
\int_0^t \|\rho(s)\|_{L^2}^2 \, ds &\le Ch^4 \int_0^t \|E(s)u_0\|_{\widehat{H}^2(\Omega)}^2 \, ds \le Ch^4 \int_0^t \|u_0\|_{\widehat{H}^2(\Omega)}^2 \le Ch^4 t \|u_0\|_{\widehat{H}^2(\Omega)}^2, \\
\int_0^t s^2 \|\rho'(s)\|_{L^2}^2 \, ds &\le Ch^4 \int_0^t s^2 \|\frac{d}{dt} E(s)u_0\|_{\widehat{H}^2(\Omega)}^2 \, ds \le Ch^4 \int_0^t s^2 s^{-2} \|u_0\|_{\widehat{H}^2(\Omega)}^2 \le Ch^4 t \|u_0\|_{\widehat{H}^2(\Omega)}^2, \\
\sup_{s \in (0,t)} s \|\rho(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\le Ch^4 \sup_{s \in (0,t)} s \|E(s)u_0\|_{\widehat{H}^2(\Omega)}^2 \le Ch^4 t \|u_0\|_{\widehat{H}^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

was den Beweis abschließt. □

Semidiskrete Konvergenzresultate mit inkompatiblen Anfangsdaten

Satz 11.64 *Sei r wie in Notation 11.61. Sei $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $f \equiv 0$. Sei u_h die semidiskrete Approximation mit Startwert $u_{h,0} = \Pi^{L^2} u_0$. Dann gilt:*

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2} \le Ch^r t^{-1/2} \|u_0\|_{L^2}. \tag{11.74}$$

Falls zusätzlich Voraussetzung 11.62 gilt, dann gilt sogar

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2} \le Ch^2 t^{-1} \|u_0\|_{L^2}. \tag{11.75}$$

Beweis: *ad (11.74):* Wegen $u_h(t) - u(t) = \theta(t) + \rho(t)$ und Lemma 11.60 müssen wir $\|\rho(s)\|_{L^2}$, $\|\rho'(s)\|_{L^2}$ abschätzen. Der zusätzliche Term $\Pi^{L^2} e_h(0)$ verschwindet wegen der Wahl $u_{h,0} = \Pi^{L^2} u_0$!

Für $s > 0$ ist $u(s) = E(s)u_0 \in H_0^1(\Omega)$ und nach Voraussetzung

$$\|\rho(s)\|_{L^2} \le Ch^r \|u(s)\|_{H^1}, \qquad \|\rho'(s)\|_{L^2} \le Ch^r \|u'(s)\|_{H^1}.$$

Mittels Lemma 11.54 schließen wir

$$t\|\theta(t)\|_{L^2}^2 \quad \leq \quad \int_0^t \|\rho(s)\|_{L^2}^2\,ds + \int_0^t s^2\|\rho'(s)\|_{L^2}^2\,ds + \sup_{0<s<t} s\|\rho(s)\|_{L^2}^2 \leq Ch^{2r}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

ad (11.75): Zuerst bemerken wir, daß die Aussage (11.74) mit $r = 1$ gilt. Zu dem Evolutionsoperator $E(t)$ und dem diskreten Evolutionsoperator $E_h(t)$ führen wir noch den Fehleroperator $F_h(t)$ ein:

$$F_h(t)v := E_h(t)\Pi^{L^2}v - E(t)v$$

(der Operator ist nichts anderes als $u(t) - u_h(t)$, wenn $u(0) = v$ und $u_h(0) = \Pi^{L^2}v$ gewählt wird). Unser Ziel ist,

$$\|F_h(t)v\|_{L^2} \leq Ch^2t^{-1}\|v\|_{L^2} \qquad \forall v \in L^2 \tag{11.76}$$

zu zeigen. Zuerst bemerken wir, daß mit der Dreiecksungleichung und elementaren Eigenschaften von $E(t)$ und $E_h(t)$ folgt:

$$\|F_h(t)v\|_{L^2} \leq 2\|v\|_{L^2} \tag{11.77}$$

Wir können uns also auf den Fall $h^2t^{-1} \leq 1$ beschränken. Wir nutzen die Halbgruppeneigenschaften von E und E_h aus, d.h. $E(t+s) = E(t) \circ E(s)$ und $E_h(t+s) = E_h(t) \circ E_h(s)$. Damit gilt:

$$F_h(t) = F_h(t/2)E(t/2) + E(t/2)F_h(t/2) + (F_h(t/2))^2, \tag{11.78}$$

denn

$$\begin{aligned}
&F_h(t/2)E(t/2) + E(t/2)F_h(t/2) + F_h(t/2)F_h(t/2)\\
&= (E_h(t/2)\Pi^{L^2} - E(t/2))E(t/2) + E(t/2)(E_h(t/2)\Pi^{L^2} - E(t/2)) + (E_h(t/2)\Pi^{L^2} - E(t/2))^2\\
&= E_h(t/2)\Pi^{L^2}E(t/2) - E(t) + E(t/2)E_h(t/2)\Pi^{L^2} - E(t) +\\
&\quad E_h(t/2)\Pi^{L^2}E_h(t/2)\Pi^{L^2} - E_h(t/2)\Pi^{L^2}E(t/2) - E(t/2)E_h(t/2)\Pi^{L^2} + E(t)\\
&= E_h(t/2)\Pi^{L^2}E_h(t/2)\Pi^{L^2} - E(t) = E_h(t/2)E_h(t/2)\Pi^{L^2} - E(t) = E_h(t)\Pi^{L^2} - E(t) = F_h(t).
\end{aligned}$$

Die Glättungseigenschaft liefert $E(t/2)u_0 \in \widehat{H}^2(\Omega)$. Damit liefern Satz 11.63 und Lemma 11.56

$$\|F_h(t/2)E(t/2)u_0\|_{L^2} \leq Ch^2\|E(t/2)u_0\|_{\widehat{H}^2(\Omega)} \leq Ch^2t^{-1}\|u_0\|_{L^2}$$

Nun sind E_h und F_h bzgl. des L^2-Innenproduktes selbstadjungiert (Übung!). Damit ist $\|E(t/2)F_h(t/2)\|_{L^2} = \|F_h(t/2)E(t/2)\|_{L^2}$ und damit

$$\|E(t/2)F_h(t/2)u_0\|_{L^2} \leq Ch^2t^{-1}\|u_0\|_{L^2}$$

Es bleibt, $\|(F_h(t/2))^2u_0\|_{L^2}$ abzuschätzen. Aus (11.74) mit $r = 1$ folgt

$$\|F_h(t/2)F_h(t/2)u_0\|_{L^2} \leq Cht^{-1/2}\|F_h(t/2)u_0\|_{L^2}$$

Insgesamt haben wir erhalten:

$$\|F_h(t)u_0\|_{L^2} \leq Ch^2t^{-1}\|u_0\|_{L^2} + Cht^{-1/2}\|F_h(t/2)u_0\|_{L^2}. \tag{11.79}$$

Einsetzen diese Abschätzung in sich selbst liefert

$$\|F_h(t)u_0\|_{L^2} \leq Ch^2t^{-1}\|u_0\|_{L^2} + Ch^2t^{-1}\|F_h(t/4)u_0\|_{L^2}.$$

Wir erinnern nun daran, daß nach (11.77) $\|F_h(t)\|_{L^2} \leq 2$ unabhängig von t. Somit ergibt sich die gewünschte Abschätzung $\|F_h(t)u_0\|_{L^2} \leq Ch^2t^{-1}\|u_0\|_{L^2}$. □

Übung 11.65 Zeigen Sie: Falls der Raum V_h die Approximationseigenschaften

$$\|v - P_h v\|_{L^2(\Omega)} \le Ch^{q+1}\|v\|_{H^{q+1}(\Omega)}, \quad \|v - P_h v\|_{H^1(\Omega)} \le Ch^q\|v\|_{H^{q+1}(\Omega)} \qquad \forall v \in H^{q+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

hat, dann gilt folgende Erweiterung der Sätze 11.63, 11.64:

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2} \le Ch^{q+1}\|u_0\|_{H^{q+1}(\Omega)} \qquad \forall u_0 \in \widehat{H}^{q+1}(\Omega), \tag{11.80}$$

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2} \le Ch^{q+1}t^{-(q+1)/2}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{11.81}$$

Hinweis: Für (11.80) gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 11.63 und verwenden Sie die Normäquivalenz aus Bemerkung 11.57. Für (11.81) iterieren Sie (11.79) geeignet oft. ∎

Bis jetzt war immer $f \equiv 0$ angenommen. Wir zitieren (vgl. [19, Thm. 3.6]) ein Resultat, welches mit ähnlichen Techniken gezeigt werden kann und welches zeigt, daß auch für $f \neq 0$ weg von $t = 0$ mit optimalen Raten gerechnet werden kann:

Satz 11.66 *Gelte Voraussetzung 11.62. Sei $f \in L^2((0,T); L^2(\Omega))$ und $u_{h,0} = \Pi^{L^2} u_0$. Dann ist für jedes $\ell \ge 0$, $t \ge \delta > 0$ (so daß die rechte Seite endlich ist)*

$$\|\frac{d^\ell}{dt^\ell}(u(t) - u_h(t))\|_{L^2} \le Ch^2 \left(\|u_0\|_{L^2} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2}\, ds + \sum_{j \le \ell+1} \int_{t-\delta}^t \|\frac{d^j}{dt^j} u(s)\|_{H^2(\Omega)}\, ds \right).$$

11.6.4 Zeitdiskretisierung

Der vorangehende Abschnitt hat den Fehler $u(t) - u_h(t)$ untersucht. Wir betrachten nun den Zeitdiskretisierungsfehler $u_h(t_n) - u_h^n$. Wir untersuchen wieder (modellhaft) den Fall $f \equiv 0$. Unser Ziel wird eine Abschätzung der Form

$$\|u_h(t_n) - u_h^n\|_{L^2} \le Ck^p t_n^{-p}\|u_{h,0}\|_{L^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

sein, wobei p die Ordnung des Zeitschrittverfahrens ist. (Spielarten diese Abschätzungen für hinreichend glatte $f \neq 0$ und/oder kompatible Startwerte u_0 gibt es natürlich auch ...)

Vorbetrachtung

Wir betrachten Einschrittverfahren mit folgenden Eigenschaft:

1. ("Stabilitätsfunktion" R) Angewandt auf das skalare Problem $y' = \lambda y$ ist ein Schritt des Verfahrens $y_1 = R(k\lambda)y_0$ für eine Funktion R.

2. (Koordinateninvarianz des Verfahrens) Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times N} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{V}$ diagonalisierbar mit Diagonalmatrix $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_N)$. Dann kommutiert der Basiswechsel $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{V}\mathbf{x}$ mit der Anwendung des Verfahrens auf $\mathbf{y}' = \mathbf{B}\mathbf{y}$, d.h. für $\widetilde{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{V}\mathbf{y}_1$ und $\widetilde{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{V}\mathbf{y}_0$ gilt

$$\widetilde{\mathbf{y}}_1 = \operatorname{diag}(R(kd_1), \ldots, R(kd_N))\widetilde{\mathbf{y}}_0$$

Übung 11.67 (a) Überlegen Sie sich, daß RK-Verfahren die Eigenschaft der Koordinateninvarianz haben.

(b) Die Stabilitätsfunktion R kann für RK-Verfahren explizit angegeben werden:

$$R(z) = 1 + z\mathbf{b}^\top(\mathrm{Id} - z\mathbf{A})^{-1}\mathbf{e}, \qquad \mathbf{e} = (1, 1, \ldots, 1)^\top$$

(c) Teilaufg. b) zeigt, daß für RK-Verfahren die Stabilitätsfunktion R eine rationale Funktion ist. Es ist:

- $R(z) = 1 + z$ für das explizite Eulerverfahren
- $R(z) = \frac{1}{1-z}$ für das implizite Eulerverfahren
- $R(z) = \frac{1+z/2}{1-z/2}$ für das Crank-Nicolson-Verfahren

∎

Wendet man das ODE-Verfahren auf $y' = \lambda y$ an, so ist die Lösung $y(t) = e^{\lambda t} y_0$. Ist das Verfahren der Ordnung p, so gilt nach Definition der Ordnung $|y(k) - y_1| \leq Ck^{p+1}$. Damit sieht man, daß die Funktion R folgende Asymptotik bei $z = 0$ haben sollte:

$$R(z) = e^z + O(|z|^{p+1}) \tag{11.82}$$

Hier $p = 1$ für die Eulerverfahren und $p = 2$ für das Crank-Nicolson-Verfahren.

Fehleranalyse

Im Fall $f \equiv 0$ ist das ODE-System

$$\mathbf{M}\mathbf{u}' + \mathbf{A}\mathbf{u} = 0.$$

Der Startvektor $\mathbf{u}^0$ korrespondiert mit der Funktion $u_{h,0} =: u_h^0$.

Wir fassen die Eigenwerte $\lambda_{h,n}$, $n = 1, \ldots, N$, des verallgemeinerten EWP $\lambda \mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ im Spektrum

$$\sigma_h := \{\lambda_{h,n}\,|, n = 1, \ldots, N\}$$

zusammen. Der exakte Lösungsoperator ist durch $E_h(t)$ beschrieben, d.h.

$$E_h(t) u_h^0 = \sum_{m=1}^{N} e^{-\lambda_{h,m} t} (u_h^0, \varphi_{h,m})_{L^2} \varphi_{h,m}$$

Ein Schritt des numerischen Verfahrens ist wegen unserer Annahmen gegeben durch

$$u_h^1 = \sum_{m=1}^{N} R(-\lambda_{h,m} k)(u_h^0, \varphi_{h,m})_{L^2} \varphi_{h,m}.$$

Entsprechend ergibt sich dann die Approximation u_h^n als

$$u_h^n = \sum_{m=1}^{N} (R(-\lambda_{h,m} k))^m (u_h^0, \varphi_{h,m})_{L^2} \varphi_{h,m}.$$

Es ist geschickt, die Funktion

$$F_n(z) := e^{-zn} - (R(-z))^n$$

einzuführen. Damit läßt sich der Fehler bei t_n schreiben als

$$\|u_h(t_n) - u_h^n\|_{L^2}^2 = \sum_{m=1}^{N} |F_n(k\lambda_{h,m})|^2 |(u_h^0, \varphi_{h,m})_{L^2}|^2 \leq \sup_{\lambda \in \sigma_h} |F_n(k\lambda)|^2 \|u_h^0\|_{L^2}^2$$

Wir müssen also die Funktion $F_n(k\lambda)$ kontrollieren. Weil $\lambda = \lambda_{h,m}$ groß sein kann, ist das Ziel, $F_n(k\lambda_{h,m})$ *uniform in* $\lambda_{h,m}$ und explizit in n zu kontrollieren.

Die Konsistenzforderung (11.82) liefert gute Kontrolle von $F_n(k\lambda_{h,m})$ (und festes n) für die $\lambda_{h,m}$ mit $k\lambda_{h,m}$ klein. Für die restlichen $\lambda_{h,m}$ müssen wir weitere Eigenschaften von R fordern. Eine Minimalforderung ist *Stabilität*

$$|R(-k\lambda)| \leq 1 \qquad \forall \lambda \in \sigma_h \tag{11.83}$$

Diese Bedingung ist für A-stabile Verfahren erfüllt. Es stellt sich heraus, daß es geschickt ist, $|R(\infty)| < 1$ zu fordern, genauer:

$$\sup_{\lambda \in \sigma_h} |R(-k\lambda)| = q < 1. \tag{11.84}$$

Für typische Verfahren wie den A-stabilen RK-Verfahren ist R auf $(-\infty, 0]$ definiert und dort sogar eine glatte Funktion. Wir betrachten zwei Fälle:

(I) R ist auf $(-\infty, 0]$ definiert und erfüllt $|R(z)| \leq 1$ für alle $z \in (-\infty, 0]$

(II) R ist auf $(-\infty, 0]$ definiert und $\forall z_0 > 0 \quad \exists q(z_0) < 1$ mit $|R(z)| \leq q(z_0) < 1$ für alle $z < -z_0$.

Die Bedingung (I) wird von A-stabilen RK-Verfahren wie dem Crank-Nicolson-Verfahren erfüllt (allgemeiner, z.B. den Gauß-Verfahren) Die stärke Bedingung (II) wird z.B. von L-stabilen RK-Verfahren wie dem impliziten Eulerverfahren erfüllt (allgemeiner, z.B. den Radau IIA-Verfahren).

Lemma 11.68 *Es gelte die Konsistenzbedingung (11.82).*

(i) Sei $c \in (0,1)$. Es gibt $z_0 > 0$ und $C > 0$, so daß

$$|F_n(z)| \leq Cnz^{p+1}e^{-cnz} \qquad 0 < z < z_0.$$

(ii) Gilt zusätzlich die Stabilitätsbedingung (I), so gilt

$$|F_n(z)| \leq Cz^p \qquad \forall z \in (0,\infty).$$

(iii) Gilt zusätzlich die Stabilitätsbedingung (II), so gibt es für jedes $z_0 > 0$ ein $c > 0$ und ein $C > 0$

$$|F_n(z)| \leq Ce^{-cn} \qquad \forall z \geq z_0.$$

Beweis: *ad (i):* Die Konsistenzbedingung (11.82) liefert für hinreichend kleines $\lambda_0 > 0$

$$|e^{-\lambda} - R(-\lambda)| \leq C\lambda^{p+1} \qquad 0 \leq \lambda \leq \lambda_0. \tag{11.85}$$

Elementare Betrachtungen[15] zeigen dann, daß für beliebiges $c \in (0,1)$ und geeignet verkleinertes z_0 gilt:

$$|R(-z)| \leq e^{-cz} \qquad 0 \leq z \leq z_0. \tag{11.86}$$

$$\begin{aligned} |F_n(z)| &= |e^{-zn} - (R(-z))^n| = \left|e^{-z} - R(-z)\right| \left|\sum_{j=0}^{n-1} (R(-z))^{n-1-j} e^{-jz}\right| \\ &\overset{(11.85),(11.86)}{\leq} Cz^{p+1}ne^{-c(n-1)z} \leq Cz^p, \end{aligned} \tag{11.87}$$

wobei wir im vorletzten Schritt $\max_{j\in\{0,\ldots,n-1\}} -jz - cz(n-1-j) = -cz(n-1)$ ausgenutzt haben und im letzten Schritt wieder $\sup_{x>0} xe^{-x} < \infty$ verwendet haben.

ad (ii): Sei z_0 wie in (i). Weil (11.87) die gewünschte Abschätzung für $z \in (0, z_0)$ liefert, reicht es, $z \geq z_0$ zu betrachten. Weil wegen der geforderten Stabilität $|R(\zeta)| \leq 1$ für $\zeta \in (-\infty, 0]$ gilt, erhalten wir für $z \geq z_0$

$$|F_n(z)| \leq |e^{-zn}| + |(R(-z))^n| \leq 2 \leq Cz_0^p \leq Cz^p$$

für geeignetes $C > 0$.

ad (iii): Es ist

$$|F_n(z)| = |e^{-nz} - |R(-z))^n| \leq e^{-nz} + |R(-z)|^n.$$

Für $z \geq z_0$ ist nach Voraussetzung $|R(-z)| \leq q < 1$. Damit folgt

$$|F_n(z)| \leq e^{-nz} + |R(-z)|^n \leq e^{-nz_0} + q^n,$$

was den Beweis abschließt. □

Satz 11.69 *Gelte die Konsistenzbedingung (11.82) sowie die Stabilitätsbedingung (II). Dann gilt:*

$$\|u_h(t_n) - u_h^n\|_{L^2} \leq Ck^p t_n^{-p} \|u_h^0\|_{L^2}$$

[15] $R(-z) = e^{-z} + O(p^{p+1}) = 1 - z + O(z^2)$ und $e^{-cz} = 1 - cz + O(z^2)$, so daß $R(-z) \leq e^{-cz}$ für hinreichen kleine $z > 0$

Beweis: Wir müssen zeigen:

$$\sup_{\lambda\in\sigma_h} |F_n(k\lambda)| \le Ck^p t_n^{-p} = Ck^p(kn)^{-p} = Cn^{-p}. \tag{11.88}$$

Sei z_0 wie in Lemma 11.68, (i). Für $\lambda \in \sigma_h$ mit $k\lambda \le z_0$ gilt nach Lemma 11.68, (i)

$$|F_n(k\lambda)| \le Cn(k\lambda)^{p+1}e^{-cnk\lambda} = Cn^{-p}(t_n\lambda)^{p+1}e^{-c\lambda t_n} \le Cn^{-p},$$

denn $\sup_{x>0} x^{p+1}e^{-x} < \infty$. Für $\lambda \in \sigma_h$ mit $k\lambda \ge z_0$ verwenden wir Lemma 11.68, (iii):

$$|F_n(k\lambda)| \le Ce^{-cn} \le Cn^{-p}.$$

Damit ist (11.88) gezeigt. □

Satz 11.69 verlangt $|R(\infty)| < 1$. Damit ist das Crank-Nicolson-Verfahren nicht erfaßt. Tatsächlich kann man es "retten", wenn man einige (implizite) Eulerschritte am Anfang macht.

Übung 11.70 Betrachten Sie den Fall $f \equiv 0$. Betrachten Sie folgendes Verfahren: Sie machen *zwei* Schritte des impliziten Eulerverfahrens und dann Crank-Nicolson-Schritte. Zeigen Sie:

$$\|u_h(t_n) - u_h^n\|_{L^2} \le Ck^2 t_n^{-2}\|u_h^0\|_{L^2}$$

Hinweis: Schreibt man R_0 und R_1 für die Stabilitätsfunktionen des Eulerverfahrens und des Crank-Nicolson-Verfahrens, so muß analog zu Lemma 11.68 die Abschätzung $|F_n(z)| \le Cn^{-2}$ gezeigt werden kann, wenn

$$F_n(z) := (R_0(-z))^2(R_1(-z))^{n-2} - e^{-nz}.$$

Gehen Sie wie folgt vor:

- $|R_0(-z))^2(R_1(-z))^{n-2}| \le Cn^{-2}$ für $z \ge z_0$ für geeignetes z_0 (überlegen Sie sich, wo das Maximum dieser Funktion für geg. $n \ge 2$ (groß) ist.
- Setzen Sie $F_n(z) = R_0(-z)^2((R_1(-z))^{n-2} - e^{-(n-2)z}) + ((R_0(-z))^2 - e^{-2z})e^{-(n-2)z}$
- Schätzen Sie $((R_1(-z))^{n-2} - e^{-(n-2)z}) \le Cn^{-2}$ für $z \le z_0$ ab.
- Schätzen Sie $(R_0(-z))^2 - e^{-2z} \le Cz^2$ für $z \le z_0$ ab.

Bemerkung 11.71 Die Abschätzungen in Satz 11.69 und Übung 11.70 sind nicht uniform in t_n: die Konstante wird schlecht für $t_n \to 0$. Will man also gute Abschätzungen "bis an $t = 0$" haben, so muß man mit Gitterverfeinerung in der Zeit (und ggf. im Ort) arbeiten. ■

11.7 Discontinuous Galerkin

Ziel: eine *Galerkin*-Diskretisierung in der Zeit. Der Einfachheit halber führen wir dies für die semidiskrete Gleichung durch.[16]

Ausgangspunkt: Die Funktion $u_h \in C^0([0,T]; V_h) \cap C^1((0,T); V_h)$ erfüllt

$$(u_h'(t), v)_{L^2} + a(u_h(t), v) = (f(t), v)_{L^2} \qquad \forall v \in V_h, \quad t \in (0,T), \tag{11.89a}$$

$$u_h(0) = u_{h,0} \in V_h. \tag{11.89b}$$

Sei $\mathcal{T}$ ein Gitter auf $(0,T)$ gegeben durch die Knoten $0 = t_0 < t_1 < \ldots, t_N = T$. Die Elemente K_n seien $K_n = (t_n, t_{n+1})$. Für stückweise stetige Funktionen v (mit Werten in V_h) definieren wir den *Sprung* am Knoten t_n, $n = 1, \ldots, N-1$, durch

$$[\![v]\!]_n := v(t_n+) - v(t_n-).$$

Das numerische Verfahren wird eine Funktion U im Raum

$$X_{k,h} := S^{p,0}(\mathcal{T}; V_h) = \{u \mid u|_K \in \mathcal{P}_p(K; V_h)\}, \qquad \mathcal{P}_p(K; V_h) = \{\sum_{i=0}^{p} u_{K,i} t^i \mid u_{K,i} \in V_h\}$$

erzeugen, d.h. ein stückweises (unstetiges) Polynom vom Grade p (in t) mit Werten in V_h. Zur Motivation des numerischen Verfahrens betrachten wir Testfunktionen $w \in X_{k,h}$, multiplizieren (11.89) mit w, integrieren und integrieren partiell:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} - \int_K (u_h(t), w'(t))_{L^2}\, dt + (u_h, w)_{L^2}|_{\partial K} + \int_K a(u_h(t), w(t))\, dt = \int_0^T (f(t), w(t))_{L^2}\, dt.$$

Ersetzt man die exakte Lösung u_h durch die Approximation $U \in X_{k,h}$, so ergibt sich

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} - \int_K (U(t), w'(t))_{L^2}\, dt + (U, w)_{L^2}|_{\partial K} + \int_K a(U(t), w(t))\, dt = \int_0^T (f(t), w(t))_{L^2}\, dt \qquad \forall w \in X_{k,h}. \tag{11.90}$$

Weil sowohl die Approximation U als auch die Testfunktionen w unstetig sind, stellt (11.90) kein vollständiges Gleichungsssytem für U dar: die Gleichung (11.90) zerfällt vielmehr in unabhängige Gleichungen auf den Teilintervallen $K \in \mathcal{T}$. Anders formuliert: es fehlt die Kopplung zwischen benachbarten Elemente (an jedem Knoten t_n gibt es zwei Approximationen $U(t_n-)$ und $U(t_n+)$, die nichts miteinander zu tun haben). Wir koppeln nun benachbarte Elemente, indem wir für jeden Knoten t_n einen Wert $\widehat{U}(t_n)$ wählen (konkret werden wir unten $\widehat{U}(t_n) := U(t_n-)$ wählen) und dies zum "Funktionswert" bei t_n deklarieren. D.h., wir betrachten

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} - \int_K (U(t), w'(t))_{L^2}\, dt + (\widehat{U}, w)_{L^2}|_{\partial K} + \int_K a(U(t), w(t))\, dt = \int_0^T (f(t), w(t))_{L^2}\, dt \qquad \forall w \in X_{k,h}. \tag{11.91}$$

Partielle Rückintegration führt auf

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K (U'(t), w(t))_{L^2}\, dt + (-U + \widehat{U}, w)_{L^2}|_{\partial K} + \int_K a(U(t), w(t))\, dt = \int_0^T (f(t), w(t))_{L^2}\, dt \qquad \forall w \in X_{k,h}. \tag{11.92}$$

Wir wählen nun

$$\widehat{U}(t_n) := U(t_n-).$$

[16] Wir nehmen an, daß V_h endlich-dimensional ist, obwohl die Wahl $V_h = H_0^1(\Omega)$ im Prinzip mit einigen kleineren Modifikationen möglich ist.

Diese Wahl läßt sich dadurch motivieren, daß die Wärmeleitungsgleichung nur "vorwärts in der Zeit" sinnvoll gelöst werden kann.[17] Mit dieser Wahl ergibt sich, wenn man zusätzlich $\widehat{U}(0) := u_{h,0}$ setzt,

$$\int_0^T (U'(t), w(t))_{L^2} + a(U(t), w(t))\,dt + (U(0+), w(0+))_{L^2} + \sum_{n=1}^{N-1} [\![U]\!]_n w(t_n+)$$
$$= \int_0^T (f(t), w(t))_{L^2}\,dt + (u_{h,0}, w(0+))_{L^2} \qquad \forall w \in X_{k,h}.$$

Damit ist das dG(p)-Verfahren:

$$\text{Finde } U \in X_{k,h} \text{ s.d. für alle } w \in X_{k,h} \text{ gilt: } B(U,w) = l(w), \text{ wobei} \tag{11.93}$$
$$B(U,w) := \sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K (U'(t), w(t))_{L^2} + a(U(t), w(t))\,dt + \sum_{n=1}^{N-1} ([\![U]\!]_n, w(t_n+))_{L^2} + (U(0+), w(0+))_{L^2},$$
$$l(w) := \int_0^T (f(t), w(t))_{L^2}\,dt + (u_{h,0}, w(0+))_{L^2}.$$

Die Lösbarkeit von (11.93) ergibt sich aus der Koerzivität von B:

Lemma 11.72

$$B(U,U) \geq \int_0^T a(U(t), U(t))\,dt + \frac{1}{2}\|U(T-)\|_{L^2}^2 \qquad \forall U \in X_{k,h}.$$

Beweis: Um die Sonderstellung des ersten Elementes K_0 zu eliminieren, setzen wir $U \in X_{k,h}$ durch 0 für $t < 0$ fort—damit ist $[\![U]\!]_0 = U(0+)$, und wir erhalten

$$B(U,w) = \sum_{K\in\mathcal{T}} \int_K (U'(t), w(t))_{L^2} + a(U(t), w(t))\,dt + \sum_{n=0}^{N-1} ([\![U]\!]_n, w(t_n+))_{L^2}.$$

Algebraische Umformungen zeigen

$$\begin{aligned} 2\int_{t_n}^{t_{n+1}} (U', U)_{L^2}\,dt + 2([\![U]\!]_n, U(t_n+))_{L^2} &= \|U(t_{n+1}-)\|_{L^2}^2 - \|U(t_n+)\|_{L^2}^2 + 2\|U(t_n+)\|_{L^2}^2 - 2(U(t_n-), U(t_n+))_{L^2} \\ &\geq \|U(t_{n+1}-)\|_{L^2}^2 - \|U(t_n+)\|_{L^2}^2 + \|U(t_n+)\|_{L^2}^2 - \|U(t_n-)\|_{L^2}^2 \\ &= \|U(t_{n+1}-)\|_{L^2}^2 - \|U(t_n-)\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{11.94}$$

Damit ergibt sich, weil $U(0-) = 0$ gesetzt wurde,

$$B(U,U) \geq \int_0^T a(U(t), U(t))\,dt + \frac{1}{2}\|U(T-)\|_{L^2}^2.$$

□

Übung 11.73 (i) Das dG(0)-Verfahren (d.h. $p = 0$) ist ein (modifiziertes) implizites Eulerverfahren. Es hat die Form

$$\frac{1}{k_n}(U^{n+1} - U^n, v)_{L^2} + a(U^{n+1}, v) = \frac{1}{k_n}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(t), v)_{L^2}\,dt \qquad \forall v \in V_h, \qquad U^0 := u_{h,0},$$

wobei wir die Notation $U^n = U|_{(t_{n-1},t_n)}$ verwendet haben.

[17] Im Kontext von hyperbolischen Gleichungen verwendet man für diese Wahl gern den Begriff des *upwinding*.

(ii) Das DG-Verfahren (11.93) ist ein Zeitschrittverfahren, d.h. man kann sukzessive $U|_{K_0}$, $U|_{K_1}, \ldots,$ bestimmen. Führen Sie hierzu den Sprung bei $t_0 = 0$ ein durch

$$[\![U]\!]_0 := U(t_0+) - u_{h,0}. \tag{11.95}$$

(Dies entspricht dem Einführen eines fiktiven Elementes $K_{-1} = (-\infty, 0)$ und dem Setzen $U|_{K_{-1}} := u_{h,0}$). Überlegen Sie sich, daß dann das DG-Verfahren definiert ist durch: Gegeben $U_{K_{n-1}}$, finde $U|_{K_n} \in \mathcal{P}_p(K_n; V_h)$, so daß

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (U'(t), w(t))_{L^2} + a(U(t), w(t))\, dt + ([\![U]\!]_n, w(t_n+))_{L^2} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (f(t), w(t))_{L^2}\, dt \qquad \forall w \in \mathcal{P}_p(K_n; V_h). \tag{11.96}$$

■

Um den Fehler $U - u_h$ zu analysieren, benötigen wir einen geeigneten Approximanten.

Lemma 11.74 *Sei $u \in C([0,T]; V_h)$. Dann ist der Interpolant $Iu \in X_{k,h}$ ist elementweise definiert durch folgende Bedingungen auf dem Element $K_n = (t_n, t_{n+1})$:*

$$u(t_{n+1}) = u(t_{n+1}-) \quad = \quad (Iu)(t_{n+1}-), \tag{11.97}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} t^\ell (u(t) - (Iu)(t))\, dt \quad = \quad 0, \qquad \ell = 0, \ldots, p-1. \tag{11.98}$$

Sei $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf V_h. Dann gilt für $u \in C^{p+1}([0,T]; V_h)$

$$\max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} \|u(t) - (Iu)(t)\|_*^2 \le C k_n^{2p+1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|u^{p+1}(s)\|_*^2\, ds.$$

Beweis: Die Wohldefiniertheit des Operators ergibt sich relativ einfach durch Rückführen auf den skalaren Fall: Sei $(e_i)_{i=1}^N$ eine Basis von V_h. Dann hat $u \in C([0,T]; V_h)$ die Form $u(t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) e_i$. Schreibt man analog $(Iu)(t) = \sum_{i=1}^N \widetilde{u}_i(t) e_i$ für Polynome $\widetilde{u}_i$, so ergeben sich Gleichungssysteme für die Funktion $\widetilde{u}_i$, welche eindeutig lösbar sind.

Die Fehlerabschätzung erfolgt mittels eines Skalierungsargument. Für das Referenzintervall $(0,1)$ überlegt man sich, daß der entsprechend skalierte Operator $\widehat{I}$ die Bedingung

$$\|\widehat{I}\widehat{u}\|_{C^0([0,1];(V_h, \|\cdot\|_*))} \le \Lambda \|\widehat{u}\|_{C^0([0,1];(V_h, \|\cdot\|_*))}$$

erfüllt (mit einem Λ unabhängig von $\widehat{u}$) und weiterhin Polynome vom Grad p reproduziert:

$$\widehat{I}\pi = \pi \qquad \forall \pi \in \mathcal{P}_p([0,1]; V_h).$$

Sei $T_p\widehat{u}$ das Taylorpolynom vom Grad p von $\widehat{u}$ um einen beliebigen Punkt in $[0,1]$. Dann gilt

$$\|\widehat{u} - \widehat{I}\widehat{u}\|_{C^0} = \|\widehat{u} - T_p\widehat{u} - \widehat{I}(\widehat{u} - T_p\widehat{u})\|_{C^0} \le (1+\Lambda)\|\widehat{u} - T_p\widehat{u}\|_{C^0} \le C\sqrt{\int_0^1 \|u^{(p+1)}(t)\|_*^2\, dt},$$

wobei wir im letzten Schritt die Taylorentwicklung (mit Restglied in Integralform) verwendet haben sowie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. Skalieren ergibt nun, weil $k_n = t_{n+1} - t_n$,

$$\|u - Iu\|_{C^0} \le C k_n^{p+1/2} \sqrt{\int_{K_n} \|u^{(p+1)}(t)\|_*^2\, dt}.$$

□

Wir analysieren nun das dG(p)-Verfahren. Dazu verwenden wir, daß es sich als Zeitschrittverfahren interpretieren läßt, d.h. wir leiten eine Rekurrenz für den Fehler her. Wir starten mit der Fehlergleichung

$$B(u_h - U, w) = 0 \qquad \forall w \in X_{k,h},$$

die sich aus der Konsistenz des Verfahrens (nach Konstruktion!) ergibt. (Beachte, daß man $u_h(t) = u_{h,0}$ für $t < 0$ setzt, um den Sprung bei $t_0 = 0$ richtig zu handhaben und daß die Lösung u_h stetig ist, so daß $[\![u_h]\!]_n = 0$ für alle n.) Wie in (11.96) ergibt sich eine elementweise Gleichung

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} ((U - u_h)', w)_{L^2} + a(U - u_h, w)\, dt + [\![U - u_h]\!]_n w(t_n+) = 0 \qquad \forall w \in \mathcal{P}_p(K_n; V_h); \tag{11.99}$$

hier haben auch gleich ausgenutzt, daß die exakte Lösung u_h stetig an den Knoten t_n, $n = 1, \ldots, N-1$ ist. Weiters haben wir für den Spezialfall $n = 0$ die exakte Lösung u_h als Konstante $u_{h,0}$ für $t < 0$ fortgesetzt (in Analogie zu der Forsetzung von U, damit der Sprung auch für $n = 0$ sinnvoll definiert ist). Wir zerlegen den Fehler $U - u_h$ als

$$U - u_h = (U - Iu_h) + (Iu_h - u_h) =: \theta + \rho;$$

um auch hier den Sprung bei $t_0 = 0$ richtig zu handhaben, setzen wir Iu_h mit $u_{h,0}$ für $t < 0$ fort. [18] Es ergibt sich damit

$$\theta(t_0-) = 0. \tag{11.100}$$

Nach Konstruktion von I gilt

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} t^\ell \rho(t)\, dt = 0, \qquad \ell = 0, \ldots, p-1, \qquad \rho(t_{n+1}-) = 0;$$

diese Beobachtung zusammen mit der (elementweise) Fehlergleichung (11.99) liefert

$$\begin{aligned}
&\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\theta', w)_{L^2} + a(\theta, w)\, dt + ([\![\theta]\!]_n, w(t_n+))_{L^2} = -\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\rho', w)_{L^2} + a(\rho, w)\, dt - ([\![\rho]\!]_n, w(t_n+))_{L^2} \\
&= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\rho, w')_{L^2} + a(\rho, w)\, dt - (\rho(t_{n+1}-), w(t_{n+1}-))_{L^2} + (\rho(t_n+), w(t_n+))_{L^2} - ([\![\rho]\!]_n, w(t_n+))_{L^2} \\
&= -\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(\rho, w)\, dt.
\end{aligned} \tag{11.101}$$

Wir leiten nun eine Rekursion für θ her. Die algebraischen Umformungen aus (11.94) gelten analog für θ, d.h.

$$2\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\theta', \theta)_{L^2}\, dt + 2([\![\theta]\!]_n, \theta(t_n+))_{L^2} \geq \|\theta(t_{n+1}-)\|_{L^2}^2 - \|\theta(t_n-)\|_{L^2}^2.$$

Damit ergibt sich aus (11.101) mit der Wahl $w = \theta$

$$\|\theta(t_{n+1}-)\|_{L^2}^2 + 2\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(\theta, \theta)\, dt \leq \|\theta(t_n-)\|_{L^2}^2 - 2\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(\rho, \theta)\, dt.$$

Mit Cauchy-Schwarz also

$$\|\theta(t_{n+1}-)\|_{L^2}^2 \leq \|\theta(t_{n+1}-)\|_{L^2}^2 + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(\theta, \theta)\, dt \leq \|\theta(t_n-)\|_{L^2}^2 + \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\rho(t)|_{H^1}^2\, dt$$

Diese Rekursion kann aufgelöst werden ("Gronwall-Lemma"), und man erhält

$$\|\theta(t_{n+1}-)\|_{L^2}^2 \leq \|\theta(0-)\|_{L^2}^2 + \int_0^{t_{n+1}} |\rho(t)|_{H^1}^2\, dt.$$

Weil Lemma 11.74 die Abschätzung $\|\rho\|^2_{C^0([t_n,t_{n+1}];(V_h;|\cdot|_{H^1}))} \leq Ck_n^{2p+1} \int_{K_n} |u_h^{(p+1)}(t)|_{H^1}^2\, dt$ liefert und wir $\theta(0-) = 0$ gesetzt hatten, haben wir damit folgendes Resultat bewiesen:

[18] All diese Fortsetzungen dienen lediglich dem Zweck, den Sprung $[\![\cdot]\!]_0$ korrekt zu erfassen, d.h. eine Fallunterscheidung $n = 0$ und $n > 0$ zu vermeiden.

Satz 11.75 *Für $n = 0, 1, \ldots,$ gilt*

$$\|U(t_{n+1}-) - u_h(t_{n+1})\|_{L^2}^2 \leq \int_0^{t_{n+1}} |\rho(t)|_{H^1}^2 \, dt \leq C \sum_{m=0}^{n} k_m^{2p+2} \int_{t_m}^{t_{m+1}} |u_h^{(p+1)}(t)|_{H^1}^2 \, dt.$$

Bemerkung 11.76 Satz 11.75 liefert Konvergenz für Approximationen an den Knoten t_n. Tatsächlich kann man aus diesen Abschätzungen auch Abschätzungen für $\sup_{t\in(t_n,t_{n+1})} \|U(t) - u_h(t)\|_{L^2}$ für jedes n erzeugen, [19, Thm. 12.2]. Ein Indiz dafür, daß man $\sup_{t\in(t_n,t_{n+1})} \|U(t) - u_h(t)\|_{L^2}$ kontrollieren kann, ergibt sich aus Übung 11.77, denn sie zeigt, daß man die Zeitableitungen von U kontrollieren kann. ■

Übung 11.77 Betrachten Sie für die Approximation $U \in X_{k,h}$ die Testfunktion $\widetilde{U} \in X_{k,h}$ definiert werden durch $\widetilde{U}|_{(t_n,t_{n+1})}(t) := (t - t_n)U'(t)$. Zeigen Sie für alle n:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)\|U'(t)\|_{L^2}^2 \, dt + (t_{n+1} - t_n)|U(t_{n+1})|_{H^1}^2 \leq C \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|f(t)\|_{L^2}^2 \, dt + |U(t)|_{H^1}^2 \, dt.$$