Serie 3 (CSE)

Diskussion des Blattes: Fr., 31.3.2023

1. Betrachten Sie wieder das Laplace-Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Wir haben gesehen, daß bei *glatten* Eigenfunktionen und $S_0^{1,1}$-Diskretisierung eine Konvergenz $O(h^2)$ erzielt werden kann. Wir betrachten nun die Konvergenz für das Einheitsquadrat S und das L-Gebiet $L = (0,1)^2 \setminus [0,1/2]^2$. Um das Programmieren einfach zu halten, vervollständigen Sie die in MATLAB vorgefertigte Routine (siehe homepage), indem Sie Ihre Extrapolationsformel (siehe Teilaufg. a)) einfügen.

Bemerkung: Strikt genommen wird im Programm nicht eine FEM-Diskretisierung sondern eine Finite-Differenzen-Diskretisierung verwendet, aber die Unterschiede sind relativ klein.

a) Überlegen Sie sich, wie Sie einen genaueren Wert für den kleinsten Eigenwert aus einer Folge von Approximationen auf verschiedenen Gittern extrapolieren können.

b) Verwenden Sie Ihren extrapolierten Wert $\lambda_{extrapol}$ als "exakten" Wert und schätzen Sie die erhaltene Konvergenzrate, indem Sie den Fehler $|\lambda_{extrapol} - \lambda_h|$ an ein Gesetz der Form $|\lambda_{extrapol} - \lambda_h| = Ch^\alpha$ fitten.

c) (optional) Welche Konvergenzrate würden Sie bei Einsatz von $S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ für die beiden Geometrien erwarten?

2. Es soll der kleinste Eigenwert λ_{min} und der zugehörige Eigenvektor e des Eigenwertproblems $Ax = \lambda x$ für die SPD-Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mittels des Gradientenverfahrens bestimmt werden. Dabei wird x^{n+1} aus x^n bestimmt als der Minimierer von

$$R(x) = \frac{x^\top A x}{\|x\|_{\ell^2}^2} \qquad \text{über } \operatorname{span}\{x^n, \nabla R(x^n)\}.$$

a) Bestimmen Sie $\nabla R(x)$ und zeigen Sie, wie der Minimierer x^{n+1} mittels eine 2×2-Eigenwertproblems gefunden werden kann.

b) Programmieren Sie Ihr Verfahren (z.B. in MATLAB) für die Tridiagonalmatrizen

$$A = N^2\,(2 * \texttt{diag}(\texttt{ones}(N,1)) - \texttt{diag}(\texttt{ones}(N-1,1) - \texttt{diag}(\texttt{ones}(N-1,1),1)))$$

für $N = 10, 100, 500$. Sie dürfen `eig` für das entstehende 2×2-EWP verwenden. Plotten Sie semilogarithmisch den Fehler (indem Sie mittels `eig` den exakten kleinsten Eigenwert bestimmen) gegen die Iterationszahl m. Wie verhält sich die Konvergenzgeschwindigkeit in Abhängigkeit von N?

c) Das vorkonditionierte Gradientenverfahren ergibt sich dadurch, daß man x^{n+1} durch Minimierung über $\operatorname{span}\{x^n, B^{-1}\nabla R(x^n)\}$ bestimmt, wobei die SPD-Matrix B als Vorkonditionierer bezeichnet wird. Wiederholen Sie Ihre Berechnungen mit der (extremem) Wahl $B = A$. Was beobachten Sie?

3. **a)** (Krylovraumverfahren) Die Vektoriteration (oder auch die inverse Iteration) für eine Matrix $\mathbf{Z}$ erzeugt eine Folge $(\mathbf{u}_\ell)_\ell$ mit $\mathbf{u}_\ell = c_\ell \mathbf{Z}^\ell \mathbf{u}_0$ und $c_\ell \in \mathbb{R}$ geeignet. Es bietet sich an, die Approximationen $\mathbf{u}_j$, $j = 0, \ldots, \ell-1$ zu nutzen. Definieren Sie die *Krylovräume*

$$\mathcal{K}_\ell := \operatorname{span}\{\mathbf{u}_0, \mathbf{Z}\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{Z}^{\ell-1}\mathbf{u}_0\}.$$

Wählen Sie die Approximation $\lambda^{(\ell)}$ an den (größten) Eigenwert von $\mathbf{Z}$ als

$$\lambda^{(\ell)} := \max_{\mathbf{u}\in\mathcal{K}_\ell\setminus\{0\}} R(\mathbf{u}), \qquad R(\mathbf{u}) := \frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{Z}\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_{\ell^2}^2}.$$

Zeigen Sie, daß sich $\lambda^{(\ell)}$ als Lösung eines geeigneten Eigenwertproblems bestimmen läßt. Warum ist $\lambda^{(\ell)}$ eine bessere Approximation an den größten Eigenwert als die Vektoriteration liefern würde?

b) Betrachten Sie für SPD-Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}$ das Eigenwertproblem

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{M}\mathbf{u}$$

Sei $\mathbf{u}_\ell$ eine Approximation an den Eigenvektor und $R(\mathbf{u}_\ell)$ der entsprechende Rayleighquotient. Sei $\sigma(\mathbf{A}, \mathbf{M})$ das Spektrum des Eigenwertproblems. Zeigen Sie, daß für den Fehler gilt:

$$\min_{\mu \in \sigma(\mathbf{A},\mathbf{M})} |\mu - R(\mathbf{u}_\ell)| \leq \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{u}_\ell)\|_{\mathbf{M}^{-1}}}{\|\mathbf{u}_\ell\|_{\mathbf{M}}} \qquad \mathbf{r}(\mathbf{u}_\ell) := \mathbf{A}\mathbf{u}_\ell - R(\mathbf{u}_\ell)\mathbf{M}\mathbf{u}_\ell.$$

Hier ist für eine SPD-Matrix $\mathbf{Z}$ die Norm $\|\cdot\|_{\mathbf{Z}}$ definiert durch $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Z}}^2 = (\mathbf{Z}\mathbf{x}, \mathbf{x})_{\ell^2}$. *Hinweis:* Schreiben Sie $\mathbf{u}_\ell = \sum_i \alpha_i \mathbf{e}_i$ mit den Eigenvektoren $\mathbf{e}_i$, und betrachten Sie $(\mathbf{r}, \mathbf{u}_\ell^+)_{\ell^2}$, wobei $\mathbf{u}_\ell^+ = \sum_i \operatorname{sign}(\lambda_i - R(\mathbf{u}_\ell))\alpha_i \mathbf{e}_i$.