Serie 4 (TM)

Diskussion des Blattes: Fr., 21.4.2023

1. In der VO haben wir für die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega \times (0,T), \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \qquad u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$$

eine Lösungsformel $u(t) = E(t)u_0$ angegeben.

a) Zeigen Sie: für $t > 0$ und $u_0 \in L^2(\Omega)$ gilt, daß die Funktion

$$t \mapsto E(t)u_0$$

in $C^1((0,\infty); H_0^1(\Omega))$ ist.
Bemerkung: das Argument zeigt dann sogar $C^\infty((0,\infty); H_0^1(\Omega))$—die Wärmeleitungsgleichung ist *glättend*.

b) Korrespondierend zur Glättungseigenschaft[1] ist die Instabilität der "Rückwärtswärmeleitungsgleichung". Zeigen Sie: Sei $t > 0$ fest und $u(t) = E(t)u_0$. Für beliebige ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ kann man ein $v \in H_0^1(\Omega)$ mit $\|v\|_{H^1(\Omega)} \le \varepsilon_1$ finden, so daß $u(t) + v = E(t)\widetilde{u}_0$ für ein $\widetilde{u}_0$ mit $\|\widetilde{u}_0 - u_0\|_{L^2(\Omega)} > \varepsilon_2$.
Bemerkung: Diese Aussage korrespondiert mit der Beobachtung, daß es bei irreversiblen physikalischen Prozessen typischerweise unmöglich ist, zu einem späteren Zeitpunkt die "Anfangskonfiguration" in sinnvoller Weise zu ermitteln.

2. Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega \times (0,T), \qquad \partial_n u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \qquad u(0,\cdot) = u_0(\cdot). \tag{1}$$

a) Geben Sie eine schwache Formulierung von der Form

$$(u'(t), v)_{L^2} + a(u(t), v) = (f(t), v)_{L^2} \qquad \forall v \in V$$

an.

b) Zeigen Sie, daß $t \mapsto \int_\Omega u(t,\cdot)\,dx$ konstant ist.[2] Kann damit eine Abschätzung von der Form $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \le C\left[e^{-\gamma t}\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds\right]$ für ein $\gamma > 0$ gelten?

c) Geben Sie den Evolutionsoperator E mithilfe der Eigenfunktionen eines geeigneten EWPs an. Hier ist $E(t)u_0 = u(t)$, wobei u die Lösung von (1) mit $f \equiv 0$.

d) Bezeiche $\overline{v} \in \mathbb{R}$ den Mittelwert über Ω. Zeigen Sie, daß mit $E(t)(u_0 - \overline{u}_0) = E(t)u_0 - \overline{E(t)u_0}$ gilt:

$$\|E(t)(u_0 - \overline{u}_0)\|_{L^2(\Omega)} \le Ce^{-\gamma t}\|u_0 - \overline{u}_0\|_{L^2(\Omega)}$$

für ein $\gamma > 0$. Können Sie eine Aussage über γ machen?

3. Betrachten Sie die (inkompressiblen) Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad && \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0 \quad && \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \mathbf{u}(t,\cdot) &= 0 \quad && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v})_j = \sum_i \mathbf{u}_i \partial_i \mathbf{v}_j$ ist.

a) Sei $\mathbf{u}$ eine hinreichend glatte Funktion auf Ω, die auf $\partial\Omega$ verschwindet und die $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ erfüllt. Zeigen Sie:

$$\sum_{i,j} \int_\Omega \mathbf{u}_i \partial_i \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j = 0$$

[1] vornehm: die Abbildung $u_0 \mapsto E(t)u_0$ als Abbildung $L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ ist kompakt
[2] D.h., Sie haben eine Erhaltungsgröße gefunden!

b) Unter der Annahme, daß die Lösung hinreichend glatt ist, zeigen Sie

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\gamma t}\|\mathbf{u}(0)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds$$

für geeignetes $\gamma > 0$.

4. Geben Sie den (semidiskreten) Evolutionsoperator $E_h(t)$ für die Wärmeleitungsgleichung mittels der diskreten Eigenfunktionen an. Zeigen Sie die Duhamelformel:

$$u_h(t) = E_h(t)u_{0,h} + \int_0^t E_h(t-s)\Pi^{L^2} f(s)\,ds.$$