Serie 10 (CSE)

Diskussion des Blattes: Fr., 9.6.2023

1. **a)** Seien A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar und der Kommutator $[A, B] = 0$. Dann sind sie simultan diagonalisierbar. Zeigen Sie diese Aussage unter der restriktiveren Annahme, daß die Eigenwerte von A paarweise verschieden sind. *Hinweis:* Zeigen Sie, daß die Eigenvektoren von A auch Eigenvektoren von B sind.

b) Mögen A, B simultan diagonalisierbar sein. Zeigen Sie: $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$ Hier ist die Matrixexponentialfunktion e^A als Potenzreihe $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$ definiert.

2. Betrachten Sie die "kubische Schrödingergleichung"

$$u_t = \mathbf{i}(u_{xx} + |u|^2 u), \qquad u(\cdot, 0) = u_0,$$

wobei u komplexwertig ist.

a) Zeigen Sie: die Abbildung $t \mapsto \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ ist konstant (wenn Sie $u(\cdot, t) \in H^2(\mathbb{R})$ für jedes t annehmen).

b) Sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch. Zeigen Sie für die Spektralnorm $\|\cdot\|_2$:

$$\|(\mathrm{I} - k\mathbf{i}A)^{-1}(\mathrm{I} + k\mathbf{i}A)\mathbf{u}\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2 \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^N.$$

c) Wir betrachten ein Splitting von der folgenden Form:

$$u_t = Au + Bu, \qquad Au = \mathbf{i}u_{xx}, \qquad Bu = \mathbf{i}|u|^2 u.$$

Zeigen Sie, daß die Gleichung $u_t = \mathbf{i}|u|^2 u$ geschlossen lösbar ist, d.h. ein Schritt der Länge k liefert:

$$u(x, t + k) = e^{\mathbf{i}k|u(x,t)|^2} u(x, t).$$

Bemerken Sie, daß $\|u(\cdot, t + k)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

3. (Fortsetzung "kubische Schrödingergleichung")

a) Formulieren Sie einen Schritt des Crank-Nicolson-Verfahren zur Lösung von

$$u_t = \mathbf{i}u_{xx}, \qquad u(0) = u_0$$

auf regelmäßigen Gittern (Schrittweite h). Die Ortsdiskretisierung von u_{xx} ist einfach $h^{-2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$. Betrachten Sie periodische Randbedingungen. Zeigen Sie, daß "Energieerhaltung" gilt: Falls $\mathbf{u}^0 \in \mathbb{C}^N$ und $\mathbf{u}^1 \in \mathbb{C}^N$ die Vektoren sind, die zum Startwert und einem Schritt des Crank-Nicolson-Verfahrens gehören, dann gilt[1]

$$\|\mathbf{u}^1\|_2 = \|\mathbf{u}^0\|_2.$$

b) Programmieren Sie das Strang-Splitting für die Schrödingergleichung auf dem Intervall $[-20, 80]$. Verwenden Sie periodische Randbedingungen[2]. Als Eingabeparameter geben Sie den Zeitschritt k, den Ortsschritt und die Anzahl N der Zeitschritte vor. Der Startwert sei

$$u_0(x) = e^{\mathbf{i}x} \operatorname{sech}(x/\sqrt{2}) + e^{\mathbf{i}(x-25/20)} \operatorname{sech}((x - 25)/\sqrt{2}).$$

($\operatorname{sech} x = 2/(e^x + e^{-x})$ — ist in Matlab bereits realisiert). Die Lösung (genauer: $|u(x)|$) sollte im wesentlichen aus 2 Pulsen bestehen, die mit konstanter Form nach rechts laufen. Verwenden Sie $k = h = 0.1$ und $T = 200$ (d.h. $N = 2000$). Plotten Sie $|u(x)|$ zum Anfangs- und Endzeitpunkt. Plotten Sie auch die Energie $\|\mathbf{u}\|_2$ über der Zeit.

c) Wiederholen Sie Teilaufgabe b), indem Sie das Crank-Nicolson-Verfahren durch den impliziten Euler ersetzen. Was beobachten Sie für die Energie?

[1] skaliert man die beiden Seiten mit $\sqrt{h}$, dann sieht man, daß die Spektralnorm eine "Diskretisierung" der L^2-Norm darstellt. Daß das Crank-Nicolson-Verfahren eine Art Energieerhaltung ermöglicht ist nicht ganz verwunderlich: das CN ist das einstufige Gaußverfahren und die Gaußverfahren erhalten quadratische Invarianten.

[2] tatsächlich sind die Randbedingungen für das numerische Beispiel ziemlich irrelevant—warum?

4. Betrachten Sie das (nichtlineare) parabolische RWP

$$u_t - u_{xx} + u^3 = f(x,t) \quad \text{auf } (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

Betrachten Sie FD-Verfahren[3] auf regelmäßigen Gittern (mit N inneren Knoten) der Weite h im Ort. Zur Diskretisierung von $-u_{xx}$ verwenden Sie die Tridiagonalmatrix

$$\mathbf{A} = h^{-2} * (2 * \texttt{diag}(\texttt{ones}(1,N)) - \texttt{diag}(\texttt{ones}(1,N-1),1) - \texttt{diag}(\texttt{ones}(1,N-1),-1))$$

mit $h = 1/(N+1)$.

a) Die parabolische Gleichung müßte eigentlich mit einem impliziten Verfahren gelöst werden. Einfacher sind IMEX[4] oder Varianten. Die einfachste Variante basiert auf dem impliziten Eulerverfahren:

$$\mathbf{u}^{n+1} + k\mathbf{A}\mathbf{u}^{n+1} = k\left(f(\mathbf{x},t_n) - (\mathbf{u}^n).\wedge 3\right) + \mathbf{u}^n,$$

wobei $\mathbf{u}$ der Vektor der (gesuchten) Knotenwerte in den inneren Punkte h, $2h, \ldots, 1-h$ ist und $f(\mathbf{x},t_n)$ der Vektor mit den Werten von f in den Knoten. $\mathbf{u}^n.\wedge 3$ ist die Matlab-Notation für die komponentenweise Potenzbildung des Vektors $\mathbf{u}^n$. Programmieren Sie das Verfahren mit der exakten Lösung

$$u(x,t) = e^{-t}x(1-x), \qquad f(x,t) = e^{-t}\left(2 - x(1-x) + e^{-2t}x^3(1-x)^3\right);$$

Zum Bestimmen der Konvergenzordnung (in k, z.B. maximaler Knotenfehler zum Endzeitpunkt $T = 1$ vs. k), verwenden Sie ein festes, ziemlich feines Ortsgitter (so dass Sie damit rechnen können, daß der Gesamtfehler durch die Zeitdiskretisierung gegeben ist).

b) (optional) Das obige Verfahren ist erster Ordnung. Man kann z.B. basierend auf BDF2 ein Verfahren 2. Ordnung erzeugen. Die voll nichtlineare Form von BDF2 für die ODE $y' = g(t,y) = g_1(t,y) + g_2(t,y)$ ist

$$3y^{n+1} - 4y^n + y^{n-1} = 2kg^{n+1} := 2kg(t^{n+1}, y^{n+1}).$$

Eine implizit-explizite Variante kann man mittels der "predictor-corrector"-Idee erhalten:

- löse für $\widetilde{y}^{n+1}$ das System $3\widetilde{y}^{n+1} - 4y^n + y^{n-1} = 2k\left(g_1(t^{n+1}, \widetilde{y}^{n+1}) + g_2(t^n, y^n)\right)$.
- löse für y^{n+1} das System $3y^{n+1} - 4y^n + y^{n-1} = 2k\left(g_1(t^{n+1}, y^{n+1}) + g_2(t^{n+1}, \widetilde{y}^{n+1})\right)$.

Formulieren für das parabolische Problem das Verfahren, d.h. geben Sie eine geeignete Zerlegung $g = g_1 + g_2$ an. Programmieren Sie das Verfahren. Welche Konvergenzordnung beobachten Sie?

[3] das ginge auch mit FEM im Ort....
[4] implicit-explicit