Serie 9 (CSE)

Diskussion des Blattes: Fr., 2.6.2023

1. Betrachten Sie das (verallgemeinerte) Lax-Wendroff Schema für die Advektionsgleichung $u_t + u_x = 0$:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2}\lambda\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) + \frac{1}{2}\lambda^2 c\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right), \qquad \lambda = \frac{k}{h},$$

wobei der Parameter $c \geq 1$.

a) Nehmen Sie $\lambda < 1$ und $c > 1$ an sowie

$$(\lambda c \leq 1) \quad \text{oder} \quad \big(\lambda c \geq 1 \quad \text{zusammen mit} \quad \lambda^2 c < 1\big).$$

Zeigen Sie, daß das Verfahren die Dissipationsordnung 2 hat. (In der VO wurde gezeigt, daß im Fall $c = 1$ die Dissipationsordnung lediglich 4 ist).

b) Was ist die Dissipationsordnung des Lax-Friedrichs-Verfahrens?

2. Betrachten Sie die Verfahren aus Aufg. 1 für die Modellgleichung auf $[-1, 1]$ mit periodische Randbedingungen und $a = 1$. Die Anfangsbedingung u_0 sei nicht glatt: $u_0(x) = 1$ für $|x| \leq 1/2$ und $u_0(x) = 0$ sonst. Programmieren Sie 1) d as Upwindverfahren, 2) das Lax-Friedrichs-Verfahren 3) das Lax-Wendroff-Verfahren für $c = 1$ und 4) das Lax-Wendroff-Verfahren für $c = 2$. Plotten Sie die numerische Lösung für $t = 0.5$. Was beobachten Sie? Wie fügt sich Ihre Beobachtung in Ihre Dissipationsanalyse der Verfahren ein?

3. Die Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \qquad u(\cdot, t)|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u(\cdot, 0) = u_0(\cdot), \qquad u_t(\cdot, 0) = u_1(\cdot) \tag{1}$$

ist ein wichtiger Vertreter von hyperbolischen Gleichungen. Wir betrachten hier eine FEM-Diskretisierung im Ort (quasi-uniforme Gitter mit Schrittweite h)[1]. Das semidiskrete System ist dann

$$\mathbf{M}\mathbf{u}_{tt} + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Das *leap frog Verfahren* ergibt sich dann zu

$$\mathbf{M}\frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{k^2} + \mathbf{A}\mathbf{u}^n = \mathbf{f}^n.$$

Für die (Stabilitäts-)Analyse ist es bequemer, die Variablensubstition $\mathbf{u}^n = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{z}^n$ zu machen und das System

$$\frac{\mathbf{z}^{n+1} - 2\mathbf{z}^n + \mathbf{z}^{n-1}}{k^2} + \mathbf{K}\mathbf{z}^n = \widetilde{\mathbf{f}}^n, \qquad \mathbf{K} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2}$$

zu betrachten. Die Matrix $\mathbf{K}$ ist SPD. Für die Stabilitätsanalyse reicht es, denn Fall $\widetilde{\mathbf{f}} = 0$ zu betrachten.

a) Betrachten Sie das kontinuierliche Problem (1) mit $f = 0$. Zeigen Sie (für hinreichend glatte u) Energieerhaltung mit Energie

$$E(t) := \|u_t(\cdot, t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(\cdot, t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

b) Definieren Sie die diskrete Energie

$$E^{n+1/2} := \langle(\mathbf{I} - \frac{k^2}{4}\mathbf{K})\frac{\mathbf{z}^{n+1} - \mathbf{z}^n}{k}, \frac{\mathbf{z}^{n+1} - \mathbf{z}^n}{k}\rangle + \langle\mathbf{K}\frac{\mathbf{z}^{n+1} + \mathbf{z}^n}{2}, \frac{\mathbf{z}^{n+1} + \mathbf{z}^n}{2}\rangle$$

Zeigen Sie, daß die diskrete Energie erhalten bleibt. *Hinweis:* Zeigen Sie $E^{n+1/2} - E^{n-1/2} = 0$ indem Sie

$$\frac{\mathbf{z}^{n+1} - 2\mathbf{z}^n + \mathbf{z}^{n-1}}{k^2} = -\mathbf{K}\mathbf{z}^n$$

nutzen.

[1] Das ist nicht essentiell: eine Finite-Differenzen-Diskretisierung wäre analog möglich.

c) Zeigen Sie, daß $\mathbf{I} - \frac{k^2}{4}\mathbf{K}$ positiv definit ist, wenn

$$k \leq Ch$$

gilt, wobei C nur von der Formregularität des Gitters abhängt. *Bemerkung:* Die Energieerhaltung ist eine sehr starke Aussage über die Stabilität des Verfahrens, denn es liefert Kontrolle über $\mathbf{Z}^n := (\mathbf{z}^n, \mathbf{z}^{n-1})$.

d) Das leap frog Verfahren ist zweiter Ordnung. Man kann Verfahren der Ordnung $2s$ mittels folgender Vorschrift erzeugen:

$$\frac{\mathbf{z}^{n+1} - 2\mathbf{z}^n + \mathbf{z}^{n-1}}{k^2} = 2\sum_{i=1}^{s} \frac{k^{2(i-1)}}{(2i)!}(-\mathbf{K})^i \mathbf{z}^n.$$

Zeigen Sie im Fall $s = 2$, daß das Verfahren tatsächlich die Konsistenzordnung (lediglich in der Zeit) $2s$ hat.[2]

[2] Auch diese Verfahren haben eine diskrete Energieerhaltung:

$$\widetilde{E}^{n+1/2} := \langle \mathbf{B}\frac{\mathbf{z}^{n+1} - \mathbf{z}^n}{k}, \frac{\mathbf{z}^{n+1} - \mathbf{z}^n}{k}\rangle + \langle \mathbf{D}\frac{\mathbf{z}^{n+1} + \mathbf{z}^n}{2}, \frac{\mathbf{z}^{n+1} + \mathbf{z}^n}{2}\rangle, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{I} - \frac{k^2}{4}\sum_{i=1}^{s}\frac{k^{2(i-1)}}{(2i)!}(-\mathbf{K})^i, \qquad \mathbf{D} = \sum_{i=1}^{s}\frac{k^{2(i-1)}}{(2i)!}(-\mathbf{K})^i.$$