Serie 7 (CSE)

Diskussion des Blattes: Fr., 12.5.2023

1. Sei ein implizites s-stufiges RK-Verfahren durch die Stützstellen c_i, $i = 1, \dots, s$ sowie die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ und den Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^s$ charakterisiert. (Implizite RK-Verfahren wurden in Aufg. 6.3 beschrieben.)

a) Zeigen Sie, daß die Stabilitätsfunktion R gegeben ist durch

$$R(z) = 1 + z\mathbf{b}^\top (I - z\mathbf{A})^{-1}\mathbf{e}, \qquad \mathbf{e} = (1, 1 \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^s.$$

Zur Erinnerung: Die Stabilitätsfunktion R ist wie folgt definiert: Ein Schritt der Länge k des RK-Verfahrens angewandt auf $y' = \lambda y$ hat die Form $y^1 = R(\lambda k) y^0$.

b) Sei $\mathbf{A}$ invertierbar. Zeigen Sie, daß R beschränkt bleibt, wenn $z \to \infty$.
Bemerkung: Man nennt A-stabile Verfahren mit $R(\infty) = 0$ auch L-stabil. Das implizite Eulerverfahren und allgemeiner die Radau IIA-Verfahren sind L-stabil. Die Gaußverfahren (z.B. das CN-Verfahren) sind A-stabil aber nicht L-stabil.

2. Wir betrachten ODEs

$$y' = f(t, y)$$

Implizite RK-Verfahren wurden in Aufg. 6.3 beschrieben. Dort wurde ein (nichtlineares) Gleichungssystem für die Stufen k_i formuliert. Zeigen Sie, daß das RK-Verfahren alternativ auch durch folgendes Vorgehen formuliert werden kann:

1. Definiere die Stufen Y_j, $j = 1, \dots, s$, als Lösung des (nichtlinearen) Gleichungssystems

$$Y_i = y^0 + k \sum_{j=1}^{s} \mathbf{A}_{ij} F_j, \qquad F_j = f(t_0 + c_j k, Y_j), \qquad i = 1, \dots, s.$$

2. Die Approximation y^1 ist dann $y^1 = y^0 + k \sum_{j=1}^{s} b_j F_j$.

3. Eine Alternative zu RK-Verfahren sind BDF-Verfahren für die ODE $y' = f(t, y)$. Als Mehrschrittverfahren bieten sie den Vorteil, Verfahren höherer Ordnung zu liefern, ohne die Größe des zu lösenden Gleichungssystems aufzublasen. Das BDF2 ist definiert durch folgende Rekursion (wenn y_i und y_{i-1} gegeben sind):

$$3y_{i+1} - 4y_i + y_{i-1} = 2kf_{i+1}.$$

Hier ist $f_{i+1} = f(t_{i+1}, y_{i+1})$.

a) Formulieren Sie das BDF2-Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung mit FEM als Ortsdiskretisierung.

b) Programmieren Sie das BDF2-Verfahren für das Problem aus Aufg. 5.4. Untersuchen Sie die Konvergenzordnung der Zeitdiskretisierung, indem Sie genau wie in Aufg. 5.4 den L^2-artigen Fehler bei $T = 1$ betrachten. Wählen Sie Zeitschritte $k = 2^{-n}$, $n = 3, \dots, n_{max} - 2$ mit $n_{max} = 10$. Wählen Sie als Ortsdiskretisierung fix $h = 2^{-n_{max}}$.
Das BDF2-Verfahren benötigt noch einen zweiten Startwert bei $t_1 = k$. Bestimmen Sie diesen durch *einen* Schritt des impliziten Eulerverfahrens. Welche Konvergenzrate (Fehler gegen k) beobachten Sie? Alternativ bestimmen Sie diesen durch *einen* Schritt des expliziten Eulerverfahrens. Welche Konvergenzrate beobachten Sie?

c) Wiederholen Sie b) für das BDF3-Verfahren, welches wie folgt gegeben ist:

$$11y_{i+1} - 18y_i + 9y_{i-1} - 2y_{i-2} = 6kf_{i+1}.$$

Die Bestimmung der benötigten Startwerte bei $t_1 = k$ und $t_2 = 2k$ kann mittels des Crank-Nicolson-Verfahrens erfolgen. Alternativ kann man das implizite Eulerverfahren verwenden. Was beobachten Sie?

4. Formulieren Sie explizit das dG(1)-Verfahren. Man kann das dG(1)-Verfahren auch auf "klassische" (z.B. skalare) ODEs anwenden. Formulieren Sie dieses für die ODE $y' = \lambda y$. Was ist die Stabilitätsfunktion R von dG(1)?