Serie 11 (TM)

Diskussion des Blattes: Fr., 16.6.2023

1. Betrachten Sie die lineare Flußfunktion $f(u) = au$. Zeigen Sie, daß der Godunovfluß auf das folgende Verfahren führt:

$$\frac{\overline{u}_i^{n+1} - \overline{u}_i^n}{k} + \frac{a^+}{h}(\overline{u}_i^n - \overline{u}_{i-1}^n) + \frac{a^-}{h}(\overline{u}_{i+1}^n - \overline{u}_i^n) = 0, \qquad a^+ = \max\{a, 0\}, \qquad a^- = \min\{a, 0\}.$$

Hinweis: Geben Sie zuerst die exakte Lösung des Riemannproblems an—es handelt sich um die Advektionsgleichung!

2. Für skalare hyperbolische Erhaltungsgleichungen sind die (Entropielösungen) monoton, d.h. für Startwerte u_0 und v_0 mit $u_0(x) \le v_0(x)$ folgt für die entsprechenden Lösungen $u(x,t) \le v(x,t)$ für $t > 0$.

Das numerische Verfahren habe die Bauart

$$\overline{u}_i^{n+1} = H(\overline{u}_{i-1}^n, \overline{u}_i^n, \overline{u}_{i+1}^n)$$

für eine Funktion H (hier muß $H(u,u,u) = u$ aus Konsistenzgründen gelten). Wir sagen, daß das Verfahren *monoton* ist, falls H monoton wachsend in jedem seiner drei Argumente ist.

a) Zeigen Sie: Falls H monoton ist, dann ist

$$\min_k \overline{u}_k^0 \le \overline{u}_i^n \le \max_k \overline{u}_k^0 \qquad \forall i, n$$

b) Geben Sie die Funktion H für das Lax-Friedrichs-Verfahren an. Zeigen Sie, daß das Lax-Friedrichs-Verfahren monoton ist, falls es die folgende "CFL-Bedingung" erfüllt:

$$\partial_a F \ge 0, \qquad \partial_b F \le 0, \qquad |\partial_a F| + |\partial_b F| \le \frac{h}{k}.$$

Hier ist $F = F(a,b)$ die Flußfunktion, die zum Lax-Friedrichs-Verfahren gehört.

3. Ziel ist es zu sehen, daß eine "Rekonstruktion" höherer Ordnung aus einer stückweise konstanten Approximation einer Funktion tatsächlich möglich ist.

Sei $p \in \mathbb{N}$ fest. Betrachten Sie die "Referenzkonfiguration" $\widehat{K} := (0, p+1) \subset \mathbb{R}$. Nehmen Sie an, daß folgende inf-sup Bedingung gilt:

$$\inf_{v \in \mathcal{P}_p} \sup_{u \in \mathcal{S}^{0,0}(\mathcal{T}_p)} \frac{\int_{\widehat{K}} uv\, dx}{\|u\|_{L^2(\widehat{K})} \|v\|_{L^2(\widehat{K})}} =: \gamma_p > 0,$$

wobei $\mathcal{T}_p$ das Gitter mit $p+1$ Elementen der Länge 1 ist auf $\widehat{K}$ und $\mathcal{S}^{0,0}(\mathcal{T}_p)$ der Raum der stückweise konstanten Funktionen auf diesem Gitter.

Definieren Sie das Gitter $\mathcal{T} = \{K_i \,|\, i = 1, \ldots, p+1\}$ mit $p+1$ Elementen der Länge h auf dem Intervall $I = (0, (p+1)h)$. Sei f eine hinreichend glatte Funktion und definieren Sie $\pi f \in \mathcal{P}_p$ durch die Bedingungen

$$\int_{K_i} f - \pi f\, dx = 0, \qquad i = 1, \ldots, p+1.$$

Zeigen Sie, daß $\|f - \pi f\|_{L^2(0,(p+1)h)} \le Ch^{p+1} \|f^{(p+1)}\|_{L^2(I)}$ für ein $C > 0$, welches nicht von h abhängt. Können Sie auch Abschätzungen für $\|f - \pi f\|_{L^\infty(I)}$ erzielen?