Serie 4 (CSE)

Diskussion des Blattes: Fr., 21.4.2023

1. Zeigen Sie folgende Variante des diskreten Gronwall-Lemmas (z.B. mittels Induktion): Sei $\gamma > -1$ und seien $(a_n)_{n=1}^N$, $(b_n)_{n=1}^N$ Folgen mit $(1+\gamma)a_n \leq a_{n-1} + b_n$ für $n = 1, \ldots, N$. Dann gilt:

$$a_n \leq \frac{a_0}{(1+\gamma)^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{(1+\gamma)^{n-k+1}}, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Bemerkung: Für $\gamma \in (0,1)$ wird diese Abschätzung oft mit der Ungleichung $(1+\gamma)^{-1} \leq e^{-\gamma/2}$ kombiniert.

2. Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{auf } \Omega \times (0,T), \qquad \partial_n u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T), \qquad u(0,\cdot) = u_0(\cdot). \tag{1}$$

a) Geben Sie eine schwache Formulierung von der Form

$$(u'(t), v)_{L^2} + a(u(t), v) = (f(t), v)_{L^2} \qquad \forall v \in V$$

an.

b) Zeigen Sie, daß $t \mapsto \int_\Omega u(t,\cdot)\,dx$ konstant ist.[1] Kann damit eine Abschätzung von der Form $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left[e^{-\gamma t}\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|f(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds\right]$ für ein $\gamma > 0$ gelten?

c) Geben Sie den Evolutionsoperator E mithilfe der Eigenfunktionen eines geeigneten EWPs an. Hier ist $E(t)u_0 = u(t)$, wobei u die Lösung von (1) mit $f \equiv 0$.

d) Bezeiche $\overline{v} \in \mathbb{R}$ den Mittelwert über Ω. Zeigen Sie, daß mit $E(t)(u_0 - \overline{u}_0) = E(t)u_0 - \overline{E(t)u_0}$ gilt:

$$\|E(t)(u_0 - \overline{u}_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ce^{-\gamma t}\|u_0 - \overline{u}_0\|_{L^2(\Omega)}$$

für ein $\gamma > 0$. Können Sie eine Aussage über γ machen?

3. Betrachten Sie die (inkompressiblen) Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \mathbf{u}(t,\cdot) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v})_j = \sum_i \mathbf{u}_i \partial_i \mathbf{v}_j$ ist.

a) Sei $\mathbf{u}$ eine hinreichend glatte Funktion auf Ω, die auf $\partial\Omega$ verschwindet und die $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ erfüllt. Zeigen Sie:

$$\sum_{i,j} \int_\Omega \mathbf{u}_i \partial_i \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j = 0$$

b) Unter der Annahme, daß die Lösung hinreichend glatt ist, zeigen Sie

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\gamma t}\|\mathbf{u}(0)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|\mathbf{f}(s)\|_{L^2(\Omega)}\,ds$$

für geeignetes $\gamma > 0$.

[1] D.h., Sie haben eine Erhaltungsgröße gefunden!

4. Sei $\theta \in C^1((0,T);V_h) \cap C([0,T];V_h)$ und gelte

$$(\theta', v)_{L^2(\Omega)} + a(\theta(t), v) = (r(t), v)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in V_h$$

für ein $r \in C([0,T];V_h)$. Hier ist $a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$. Zeigen Sie, daß dann

$$|\theta(t)|^2_{H^1(\Omega)} \leq |\theta(0)|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^t \|r(s)\|^2_{L^2(\Omega)}, ds$$

gilt. *Hinweis:* Gehen Sie wie im 2. Schritt des Beweises von Satz 2.1 vor, indem Sie jedoch die Testfunktion v anders wählen.