Kapitel 10

Eigenwertprobleme

Ausgangspunkt: zahlreiche technische und naturwissenschaftliche Probleme führen auf Eigenwertproblem, z.B. in der Strukturmechanik ("Eigenfrequenzen eines elastischen Körpers"), Quantenmechanik,...

Ziel: numerische Approximation der Eigenwerte und Eigenfunktionen

Modellproblem: Finde Funktion u und $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß

$$-\Delta u = \lambda u, \quad \text{auf } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{10.1}$$

Bemerkung 10.1 Das EWP (10.1) hat physikalische Bedeutung: Die Eigenwerte λ in (10.1) sind tatsächlich positiv, und die Werte $\sqrt{\lambda}$ entsprechen den Eigenfrequenzen einer eingespannten Membran. ∎

Das Problem (10.1) werden wir variationell verstehen:

$$\text{Finde } (u,\lambda) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \text{ s.d.} \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega uv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{10.2}$$

Beispiel 10.2 Sei $\Omega = (0,\pi)$ und betrachte

$$-u'' = \lambda u \quad \text{auf } \Omega, \qquad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Die allg. Lösung der Differentialgleichung $-u'' - \lambda u = 0$ ist $u(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$. Damit es nichttriviale Lösungen gibt, muß $\sqrt{\lambda} = n$, $n \in \mathbb{N}$ sein. Damit sind die Eigenpaare (u_n, λ_n)

$$u_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x), \qquad \lambda_n = n^2, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

Beobachtung/Nachrechnen: die Eigenfunktionen erfüllen 2 Orthogonalitätsbeziehungen:

$$\begin{aligned} (u_n, u_m)_{L^2(\Omega)} &= 0 \qquad n \neq m, \\ (u_n, u_m)_{H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega u_n' u_m' &= 0 \qquad n \neq m. \end{aligned}$$

Weiters ist $(u_n)_n$ sogar eine Orthogonalbasis von $L^2(\Omega)$ (und, wie wir später sehen werden, auch eine von $H_0^1(\Omega)$.) ∎

Wir betrachten ein etwas allgemeineres Setting im vorliegenden Kapitel:

- V, H Hilberträume (über $\mathbb{R}$)
- $V \subset H$ dicht, kompakt
- $a : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrisch, stetig, bilinear, koerziv
- $(\cdot,\cdot)_H$ = Skalarprodukt auf H
- $a(\cdot,\cdot)$ erzeugt ein Innenprodukt auf V, welches äquivalent zum Innenprodukt auf V ist.

Wir betrachten:

$$\text{Finde } (u,\lambda) \in V \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \text{ s.d.} \qquad a(u,v) = \lambda (u,v)_H \qquad \forall v \in V. \tag{10.3}$$

Für die Lösbarkeitstheorie verwenden wir die Theorie kompakter Operatoren. Sei $T : H \to V$ der Lösungsoperator für die Variationsaufgabe:

$$\text{Finde } u \in V \text{ s.d.} \qquad a(u,v) = (f,v)_H \qquad \forall v \in V, \tag{10.4}$$

d.h. $Tf \in V$ ist charakterisiert durch

$$a(Tf,v) = (f,v)_H \qquad \forall v \in V. \tag{10.5}$$

Weil $V \subset H$ können wir T auf V einschränken und als Operator auf V auffassen. Dann gilt:

Satz 10.3 *(i) $T : V \to V$ ist kompakt*

(ii) $T : V \to V$ ist selbstadjungiert bzgl. $a(\cdot,\cdot)$

(iii) "T ist positiv auf V": $a(Tf,f) > 0$ für alle $f \in V \setminus \{0\}$.

Beweis: *ad (i):* Der Operator $T : V \to V$ ist eine Verkettung der kompakten Einbettung $V \subset H$ mit dem stetigen Operator $T : H \to V$ (Lax-Milgram!):

$$T : V \hookrightarrow H \to V$$

Damit ist $T : V \to V$ kompakt als Verkettung eines stetigen und eines kompakten Operators.
ad (ii): Seien f, $v \in V$. D.g.:

$$a(Tf,v) = (f,v)_H = (v,f)_H = a(Tv,f) \overset{\text{a sym.}}{=} a(f,Tv)$$

ad (iii):

- für $f \in V \setminus \{0\}$ ist $a(Tf,f) = (f,f)_H \geq 0$.
- Weil die Einbettung $V \subset H$ injektiv ist, würde aus $\|f\|_H = 0$ folgen, daß $f = 0$ (als Element von V).

□

Das variationell formulierte EWP (10.3) ist äquivalent zu einem EWP für T:

Lemma 10.4 $(u,\lambda) \in V \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *löst (10.3)* $\Longleftrightarrow$ $(u,\lambda) \in V \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *löst*

$$Tu = \frac{1}{\lambda} u. \tag{10.6}$$

Beweis: "$\Longrightarrow$": Sei (u,λ) Lösung von (10.3). Dann gilt:

$$a(u,v) = \lambda (u,v)_H = \lambda a(Tu,v) = a(\lambda Tu,v) \qquad \forall v \in V.$$

Weil $a(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt ist, folgt

$$u = \lambda Tu.$$

"$\Longleftarrow$": Gelte (10.6). Dann folgt für alle $v \in V$

$$a(\lambda^{-1} u,v) = a(Tu,v) = (u,v)_H,$$

d.h. (10.3). □

Lemma 10.4 besagt, daß die gesuchten Eigenpaare (u,λ) von (10.3) durch die Eigenpaare $(u,1/\lambda)$ von T gegeben sind. Da T kompakt und selbstadjungiert (bzgl. $a(\cdot,\cdot)$) ist, kann die Spektraltheorie kompakter Operatoren eingesetzt werden. Es gilt:

Satz 10.5 (Spektralsatz für kompakte, selbstadj. Operatoren) *Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $A : X \to X$ kompakt und selbstadjungiert. Dann gilt:*

(i) Das Spektrum $\sigma(A) = \{\mu \in \mathbb{C} \,|\, \mu - A : X \to X$ ist nicht stetig invertierbar$\}$ ist eine abzählbare Menge mit einzig möglichem Häufungspunkt 0. Die Elemente $\mu \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ heißen Eigenwerte.

(ii) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Ist A nichtnegativ, d.h. $(Ax, x)_X \geq 0$ für alle x, dann ist $\sigma(A) \subset [0, \|A\|_X] \subset [0, \infty)$.

(iii) Für jedes $\mu \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ ist $\operatorname{Ker}(\mu - A)$ endlichdimensional. Die Zahl $\dim \operatorname{Ker}(\mu - A) \in \mathbb{N}$ heißt Vielfachheit[1] *des Eigenwertes μ. Der Raum $\operatorname{Ker}(\mu - A)$ heißt* Eigenraum *zum Eigenwert μ.*

(iv) Für $\mu_1, \mu_2 \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ mit $\mu_1 \neq \mu_2$ und $u_1 \in \operatorname{Ker}(\mu_1 - A)$ und $u_2 \in \operatorname{Ker}(\mu_2 - A)$ gilt $(u_1, u_2)_X = 0$.

(v) X hat eine ONB aus Eigenvektoren von A. Genauer: Sei die abzählbare Menge $\sigma(A) \setminus \{0\}$ als Folge $\mu_1, \mu_2, \ldots,$ geschrieben, wobei jeder Eigenwert gemäß seiner Vielfachheit ggf. mehrfach aufgeführt wird. Dann existiert eine Folge $(e_n)_n \subset X$ mit

$$(e_n, e_m)_X = \delta_{n,m}$$

und $X = \operatorname{Ker} A \oplus_X \operatorname{span}\{e_1\} \oplus_X \operatorname{span}\{e_2\} \oplus_X \cdots$.

(vi) Jedes $x \in X$ kann als "Fourierreihe" geschrieben werden:

$$x = a + \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)_X e_n,$$

wobei $a \in \operatorname{Ker} A$. Weiters ist

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (x, e_n)_X e_n$$

Beweis: Eine reelle Version dieses Satzes wird in den Übungen bewiesen. □

Eine reelle Version von Satz 10.5 kann auch durch "Komplexifizieren" aus der komplexen Version rausgeholt werden:

Übung 10.6 Sei X ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ und $A : X \to X$ ein symmetrischer Operator. Die Komplexifizierung von X ist der Raum

$$\widetilde{X} := \{x + \mathbf{i}y \,|\, x, y \in X\}.$$

Zeigen Sie: $\widetilde{X}$ ist ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, wenn man das Skalarprodukt als

$$((x + \mathbf{i}y), (x' + \mathbf{i}y'))_{\widetilde{X}} := ((x, x')_X + (y, y')_X) + \mathbf{i}\,((y, x')_X - (x, y')_X)$$

wählt. Der Raum X ist in natürlicher Weise in $\widetilde{X}$ eingebettet. Die Komplexifizierung von $\widetilde{A}$ ist entsprechend definiert durch $\widetilde{A}(x + \mathbf{i}y) := Ax + \mathbf{i}Ay$. Zeigen Sie: $\widetilde{A}$ ist selbstadjungiert. Zeigen Sie: falls A kompakt ist, dann ist $\widetilde{A}$ kompakt. ■

Einschub

Lemma 10.7 *Sei A selbstadjungiert auf dem Hilbertraum X (über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$). Sei R_A der Rayleighquotient:*

$$R_A(x) := \frac{(Ax, x)_X}{(x, x)_X}, \qquad x \in X \setminus \{0\}$$

Dann gilt:

$$\|A\|_X = \sup_x |R_A(x)|$$

Für kompakte Operatoren A wird das Supremum sogar angenommen und der Maximierer ist ein Eigenvektor. Insbesondere ist dann $\|A\|_X$ ein Eigenwert.

[1] genauer: $r_g := \dim \operatorname{Ker}(\mu - A)$ ist die *geometrische* Vielfachheit von μ. Man nennt die *kleinste* Zahl $\alpha \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{Ker}(\mu - A)^\alpha = \operatorname{Ker}(\mu - A)^{\alpha+1}$ den *Aszent* von μ. Die *algebraische* Vielfachheit des Eigenwertes μ ist dann definiert als $r_a := \dim \operatorname{Ker}(\mu - A)^\alpha$. Offensichtlich ist $r_a \geq r_g$. Im Fall von selbstadjungierten Operatoren gilt $\alpha = 1$, so daß $r_a = r_g$. Denn: wäre $\alpha \geq 2$, so gäbe es ein $x \neq 0$ mit $x \in \operatorname{Ker}(\mu - A)^\alpha$ und $x \notin \operatorname{Ker}(\mu - A)^{\alpha-1}$. Wegen $\alpha \geq 2$ können wir dann sinnvoll $(\mu - A)^{\alpha-2}x$ betrachten, und es folgt mit der Selbstadjungiertheit von $\mu - A$: $0 = ((\mu - A)^\alpha x, (\mu - A)^{\alpha-2}x)_X = ((\mu - A)^{\alpha-1}x, (\mu - A)^{\alpha-1}x)_X = \|(\mu - A)^{\alpha-1}x\|_X^2 > 0$, ein Widerspruch.

Beweis: Dass für kompakte Operatoren das Supremum von einem Eigenvektor angenommen wird, wird in den Übungen gezeigt.

Sei

$$s := \sup_x |R_A(x)| \leq \|A\|_X,$$

wobei die Aussage $s \leq \|A\|_X$ einfach zu sehen ist (hier wird die Selbstadjungiertheit nicht benötigt). Um $\|A\|_X \leq s$ zu sehen, müssen wir die Selbstadjungiertheit benutzen. Seien x, $y \in X$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 2\,|(Ax,y)_X + (Ay,x)_X| &= |(A(x+y),(x+y))_X - (A(x-y),(x-y))_X| \\ &\leq s\left(\|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2\right) = 2s\left(\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2\right). \end{aligned} \tag{10.7}$$

Wir wählen nun $y = tAx$ mit einen $t > 0$, welches wir später geeignet wählen. Dann folgt wegen der Selbstadjungiertheit von A

$$4t\|Ax\|_X^2 \leq 2s\left(\|x\|_X^2 + t^2\|Ax\|_X^2\right)$$

d.h.

$$\left(2t - st^2\right)\|Ax\|_X^2 \leq s\|x\|_X^2.$$

Für eine scharfe Abschätzung wählen wir $t > 0$ so, daß die linke Seite möglichst groß wird. Dies führt auf die Wahl $t = 1/s > 0$. Es ergibt sich also

$$\frac{1}{s}\|Ax\|_X^2 \leq s\|x\|_X^2.$$

Weil x beliebig war, ergibt sich $\|A\|_X \leq s$.

Strikt genommen haben wir im Beweis $s > 0$ angenommen. Im degenerierten Fall $s = 0$ jedoch können wir genauso vorgehen, indem wir in (10.7) s durch durch $s + \varepsilon$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ ersetzen. Dann ergibt sich $\|A\|_X \leq (s + \varepsilon)$ für beliebiges $\varepsilon > 0$. □

Korollar 10.8 *Es gibt eine Folge $(u_n, \lambda_n)_n \subset V \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $a(u_n, v) = \lambda_n (u, v)_H \quad \forall v \in V$

(ii) Die Folge $(\lambda_n)_n$ erfüllt $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ und $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Insbesondere hat jeder Eigenwert von (10.3) nur endliche Vielfachheit.

(iii) $(u_n)_n$ ist ONB in H. Insbesondere läßt sich jedes $u \in H$ darstellen als

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n)_H u_n.$$

(iv) $(\lambda_n^{-1/2} u_n)_n$ ist ONB in $(V, a(\cdot,\cdot))$ Insbesondere läßt sich jedes $u \in V$ darstellen als

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a(u, \lambda_n^{-1/2} u_n)\lambda_n^{-1/2} u_n.$$

Beweis: Wir verwenden Satz 10.5 für den kompakten Operator T und $X = (V, a(\cdot,\cdot))$.

1. Schritt: Wir behaupten $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Um dies zu sehen, sei $u \in \operatorname{Ker} T$. Dann ist

$$0 = a(0, v) = a(Tu, v) = (u, v)_H \qquad \forall v \in V.$$

Weil V dicht in H liegt, folgt also $u = 0$ (als Element von H und dann wegen der Injektivität der Einbettung $V \subset H$ auch als Element von V).

2. Schritt: Seien $(e_n, \mu_n)_n$ die (orthonormierten) Eigenpaare des Operators T wie in Satz 10.5 bestimmt. D.h.

a) $Te_n = \mu_n e_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

b) $(e_n)_n$ ist eine ONB von $(V, a(\cdot,\cdot))$.

Mit $\lambda_n := 1/\mu_n$ ergibt sich dann (vgl. Lemma 10.4):

$$a(e_n, v) = \lambda_n (e_n, v)_H \qquad \forall v \in V.$$

3. Schritt: Wir behaupten, daß die $(e_n)_n$ auch paarweise orthogonal bzgl. $(\cdot,\cdot)_H$ sind:

$$(e_n, e_m)_H = \lambda_n (e_n, \lambda_n^{-1} e_m)_H = a(e_n, \lambda_n^{-1} e_m) = \lambda_n^{-1} \delta_{n,m}$$

4. Schritt: Wir definieren die im Satz angegeben Funktionen u_n:

$$u_n := \sqrt{\lambda_n} e_n$$

Dann gilt:

- $(u_n, u_m)_H = \delta_{n,m}$
- $a(u_n, u_m) = \lambda_n \delta_{n,m}$
- $(\lambda_n^{-1/2} u_n)_n$ ist ONB von $(V, a(\cdot,\cdot))$.

Es bleibt zu zeigen, daß $(u_n)_n$ den Raum H aufspannt. Sei $\Pi_N : H \to \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_N\}$ die Orthogonalprojektion (in H). Wir behaupten:

$$\lim_{N\to\infty} \|u - \Pi_N u\|_H = 0.$$

Für jedes $u \in V$ gilt

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a(u, \lambda_n^{-1/2} u_n) \lambda_n^{-1/2} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n)_H u_n$$
$$\Pi_N u = \sum_{n=1}^{N} (u, u_n)_H u_n = \sum_{n=1}^{N} a(u, \lambda_n^{-1/2} u_n) \lambda_n^{-1/2} u_n.$$

D.h.: die Projektion $\Pi_N u$ stimmt mit der abgebrochenen (Orthogonal-)Entwicklung von u im Raum $(V, a(\cdot,\cdot))$ überein! Damit gilt

$$\lim_{N\to\infty} \|u - \Pi_N u\|_V = 0 \qquad \forall u \in V.$$

Ein Dichtheitsargument dehnt die Aussage nun auf H aus. Sei $u \in H$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $u_\varepsilon \in V$ mit $\|u - u_\varepsilon\|_H \le \varepsilon$. Dann gilt

$$\|u - \Pi_N u\|_H \le \underbrace{\|u - u_\varepsilon\|_H}_{\le \varepsilon} + \underbrace{\|\Pi_N (u - u_\varepsilon)\|_H}_{\le \|(u-u_\varepsilon)\|_H \le \varepsilon} + \underbrace{\|u_\varepsilon - \Pi_N u_\varepsilon\|_H}_{\le C\|u_\varepsilon - \Pi_N u_\varepsilon\|_V \to 0 \text{ für } N\to\infty}$$

□

finis 36.Stunde

Für selbstadjungierte, kompakte Operatoren A ist der *Rayleighquotient*

$$R_A(x) := \frac{(Ax, x)_X}{(x, x)_X}, \qquad x \in X \setminus \{0\}$$

ein wichtiges Hilfsmittel, um die Eigenwerte zu charakterisieren[2]. Für $A = T$ und $X = (V, a(\cdot,\cdot))$ entsteht

$$\frac{(x, x)_H}{a(x, x)}.$$

Wir betrachten den Kehrwert

$$R(x) := \frac{a(x, x)}{(x, x)_H} \qquad x \in V \setminus \{0\}. \tag{10.8}$$

Es gilt

[2] Für selbstadjungierte Operatoren ist der Rayleighquotient auch ein wichtiges numerisches Hilfsmittel wie z.B. bei Ritz-Verfahren.

Satz 10.9 (Minimumprinzip) *Seien die Eigenwerte λ_n der Größe nach sortiert: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ und entsprechend ihrer Vielfachheit aufgeführt. Seien die u_n die zugehörigen Eigenvektoren. Dann gilt:*

(i) $R(u_n) = \lambda_n$ *für alle* n

(ii) $\lambda_1 = \min_{u \in V} R(u)$

(iii) mit

$$\begin{aligned} V_m &:= \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_m\}, && (10.9) \\ V_m^\perp &:= \{v \in V \mid a(v,w) = 0 \quad \forall w \in V_m\} = \{v \in V \mid (v,w)_H = 0 \quad \forall w \in V_m\} && (10.10) \end{aligned}$$

folgt

$$\lambda_m = \min_{v \in V_{m-1}^\perp} R(v), \qquad m = 2, 3, \ldots. \tag{10.11}$$

Beweis: *ad (i):* ist unmittelbar.

ad (ii): Sei $v \in V$. Dann gilt wegen $a(u_n, v) = \lambda_n (u_n, v)_H$ und den Orthogonalitäten, die die Funktionen u_n erfüllen:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{n=1}^\infty (v, u_n)_H u_n = \sum_{n=1}^\infty a(v, \lambda_n^{-1/2} u_n) \lambda_n^{-1/2} u_n \\ \|v\|_H^2 &= \sum_{n=1}^\infty |(v, u_n)_H|^2 \\ a(v,v) &= \sum_{n=1}^\infty |a(v, \lambda_n^{-1/2} u_n)|^2 = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n |(v, u_n)_H|^2 \end{aligned}$$

D.h.:

$$R(v) = \frac{a(v,v)}{\|v\|_H^2} = \frac{\sum_{n=1}^\infty \lambda_n |(v, u_n)_H|^2}{\sum_{n=1}^\infty |(v, u_n)_H|^2}$$

Weil $\lambda_n \uparrow$, folgt

$$\min_{v \in V} R(v) = \lambda_1.$$

ad (iii): Sei $v \in V_{m-1}^\perp$. Dann hat v die Darstellung

$$v = \sum_{n=1}^\infty (v, u_n)_H u_n = \sum_{n=m}^\infty (v, u_n)_H u_n.$$

Damit ergibt sich

$$R(v) = \frac{a(v,v)}{\|v\|_H^2} = \frac{\sum_{n=m}^\infty \lambda_n |(v, u_n)_H|^2}{\sum_{n=m}^\infty |(v, u_n)_H|^2}$$

und aus der Monotonie $\lambda_n \uparrow$ folgt wieder

$$\min_{v \in V_{m-1}^\perp} R(v) = \lambda_m.$$

□

Der explizite Bezug auf die Eigenvektoren u_n für die Charakterisierung der Eigenwerte λ_m, $m \geq 2$ in Satz 10.9 ist oft unhandlich, da die Eigenvektoren nicht explizit bekannt sind. Man kann das umgehen:

Satz 10.10 (Minimax-Prinzip)

$$\lambda_m = \min_{\substack{E_m \subset V \\ \dim E_m = m}} \max_{v \in E_m} R(v), \qquad m = 1, 2, \ldots.$$

Beweis: "$\geq$": Sei $E_m := V_m = \text{span}\{u_1, \ldots, u_m\}$. Dann hat jedes $v \in V_m$ die Darstellung $v = \sum_{n=1}^m \alpha_n u_n$ mit $\alpha_n = (v, u_n)_H$ und

$$R(v) = \frac{\sum_{n=1}^m \lambda_n \alpha_n^2}{\sum_{n=1}^m \alpha_n^2};$$

Maximieren über alle $(\alpha_n)_{n=1}^m \in \mathbb{R}^m$ liefert als Maximum λ_m wegen der Monotonie $\lambda_n \uparrow$, d.h.

$$\max_{v \in V_m} R(v) = \lambda_m. \tag{10.12}$$

"$\leq$": Sei $E_m \subset V$ mit $\dim E_m = m$. Wähle $v \in E_m \setminus \{0\}$ so, daß

$$(v, u_n)_H = 0, \qquad n = 1, \ldots, m-1.$$

(das geht aufgrund des Dimensionsatzes der linearen Algebra, weil nur $m-1$ *lineare* Bedingungen gestellt werden). Dann ist $v \in V_{m-1}^\perp \cap E_m$ und somit nach Satz 10.9

$$\lambda_m = \min_{w \in V_{m-1}^\perp} R(w) \leq R(v) \leq \max_{w \in E_m} R(w).$$

□

10.0.1 FEM Diskretisierung

Die Diskretisierung des variationell gestellten Eigenwertproblems (10.3) erfolgt durch Wahl eines abgeschlossenen Unterraums $V_h \subset V$ und Betrachten von

$$\text{Finde } (u_h, \lambda_h) \in V_h \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \text{ s. d.} \qquad a(u_h, v) = \lambda_h (u_h, v)_H \qquad \forall v \in V_h. \tag{10.13}$$

Das (diskrete) Eigenwertproblem (10.13) ist äquivalent zu einem algebraischen (verallgemeinerten) Eigenwertproblem: Wählt man eine Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ von V_h, so ist (10.13) äquivalent zu:

$$\text{Finde } (\mathbf{u}_h, \lambda_h) \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \text{ s. d.} \qquad \mathbf{A}\mathbf{u}_h = \lambda_h \mathbf{M}\mathbf{u}_h, \qquad \mathbf{A}_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \qquad \mathbf{M}_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i)_H. \tag{10.14}$$

Bemerkung 10.11 Für moderate Problemgrößen N kann man das Matrix-Eigenwertproblem (10.14) mit Standardmethoden der numerischen linearen Algebra lösen, z.B. dem QR-Algorithmus (wenn $\mathbf{M} = \text{Id}$ oder wenn man $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ betrachtet) oder Varianten wie dem QZ-Algorithmus (für allgemeines $\mathbf{M}$). Dies liefert alle Eigenwerte und Eigenvektoren mit Aufwand $O(N^3)$. Für große N arbeitet man mit iterativen Verfahren, die nur einen kleinen Teil des Spektrums liefern. Dies aus zwei Gründen: 1) die Kosten sind nicht tragbar und QR-artige Algorithmen können sehr schlecht die Besetzungsstruktur von $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}$ ausnutzen (typischerweise sind dies *dünn* besetzte Matrizen); 2) man ist ohnehin nur an einem kleinen Teil des Spektrums interessiert, weil die numerischen Approximationen eines großen Teils des Spektrums sehr schlecht sind ($\rightarrow$ später). ■

Übung 10.12 Überlegen Sie sich, daß das Minimax-Prinzip auch für das das endlichdimensionale Problem (10.13) gilt, d.h.

$$\lambda_{h,m} = \min_{\substack{E_m \subset V_h \\ \dim E_m = m}} \max_{v \in E_m} R(v) \tag{10.15}$$

■

Wir nutzen Übung 10.12, um zu zeigen, daß die Konvergenz der diskreten Eigenwerte $\lambda_{h,m}$ "von oben" erfolgt:

Satz 10.13 *Es ist*

$$\lambda_m \leq \lambda_{h,m}, \qquad m = 1, \ldots, N.$$

Beweis: Anwenden des diskreten Minimaxprinzips (10.15) und des kontinuierlichen Minimax-Prinzips liefert wegen $V_h \subset V$:

$$\lambda_{h,m} = \min_{\substack{E_m \subset V_h \\ \dim E_m = m}} \max_{v \in E_m} R(v) \geq \min_{\substack{E_m \subset V \\ \dim E_m = m}} \max_{v \in E_m} R(v) = \lambda_m$$

□

Übung 10.14 Falls die Approximationsräume V_h geschachtelt sind, dann ist die Konvergenz sogar monoton: Seien $V_h \subset V_{h'} \subset V$. Dann gilt

$$\lambda_m \leq \lambda_{h',m} \leq \lambda_{h,m}, \qquad m = 1, \ldots, N.$$

■

10.0.2 Konvergenz der Eigenwerte

Wir definieren den *Ritzprojektor* $P_h : V \to V_h$ als die Orthogonalprojektion auf V_h im $a(\cdot,\cdot)$-Innenprodukt, d.h. $P_h u \in V_h$ ist charakterisiert durch

$$a(u - P_h u, v) = 0 \qquad v \in V_h. \tag{10.16}$$

Wir erinnern an folgende Fakten:

- P_h ist linear
- Bestapproximationseigenschaft: $\|u - P_h u\|_V \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V$
- Orthogonalprojektion in $a(\cdot,\cdot)$: $\|P_h\|_E \leq 1$, wobei $\|\cdot\|_E$ die Energienorm ist.

Es ist naheliegend, daß für die Konvergenz der Eigenwerte und Eigenvektoren die Frage geklärt werden sollte, in welcher Beziehung der Raum V_m (aufgespannt durch die ersten m Eigenvektoren) zu seiner Projektion $P_h V_m$ in den Approximationsraum V_h steht. Es gilt:

Lemma 10.15 *Definiere*

$$\sigma_{h,m} := \inf_{v \in V_m} \frac{\|P_h v\|_H}{\|v\|_H}, \qquad 1 \leq m \leq N. \tag{10.17}$$

Dann gilt: Falls (für ein $m \in \{1, \ldots, N\}$), $\sigma_{h,m} > 0$, so gilt (für dieses m)

$$\lambda_m \leq \lambda_{h,m} \leq \sigma_{h,m}^{-2} \lambda_m. \tag{10.18}$$

Beweis: (*Bemerkung:* $\sigma_{h,m}$ beschreibt die Norm des Inversen der Operators $P_h : V_m \to P_h V_m$, d.h. $1 - \sigma_{h,m}^{-1}$ ist ein Maß dafür, wie nahe V_m und $P_h V_m$ beieinander sind.) Wir verwenden wieder das Minimax-Prinzip, diesmal mit dem Raum $E_m = P_h V_m$. Hierzu müssen wir aus der Voraussetzung $\sigma_{h,m} > 0$ sehen, daß $\dim E_m = m$: wäre $\dim E_m = P_h V_m < m$, so gäbe es $v \in V_m \setminus \{0\}$ mit $P_h v = 0$, was aber $\sigma_{h,m} > 0$ widerspricht.

Das Minimax-Prinzip (10.15) liefert nun für $E_m = P_h V_m$

$$\begin{aligned}
\lambda_{h,m} &\leq \max_{v \in E_m} R(v) = \max_{v \in E_m} \frac{a(v,v)}{\|v\|_H^2} = \max_{v \in V_m} \frac{a(P_h v, P_h v)}{\|P_h v\|_H^2} \leq \max_{v \in V_m} \frac{a(v,v)}{\|P_h v\|_H^2} \\
&= \max_{v \in V_m} \frac{a(v,v)}{\|v\|_H^2} \frac{\|v\|_H^2}{\|P_h v\|_H^2} \leq \lambda_m \sigma_{h,m}^{-2},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Beobachtung (10.12) verwendet haben. □

finis 37.Stunde

Lemma 10.15 zeigt, daß wir für festes m zeigen wollen:[3]

$$\lim_{h \to 0} \sigma_{h,m} = 1.$$

Das folgende Lemma zeigt, daß dies möglich ist:

[3] obwohl die Räume $V_h \subset V$ bis jetzt beliebig waren, stellen wir uns natürlich vor, daß der Raum $S^{p,1}(\mathcal{T}_h)$ für ein Gitter der Maschenweite h gemeint ist

Lemma 10.16

$$\sigma_{h,m}^2 \geq 1 - \frac{2\|a\|\sqrt{m}}{\lambda_1} \sup_{v \in V_m} \frac{\|v - P_h v\|_V^2}{\|v\|_H^2}.$$

Beweis: *Vorbemerkung:* Dreiecksungleichung liefert $\|v\|_H \geq \|v\|_H - \|v - P_h v\|_H \geq \|v\|_H - C\|v - P_h v\|_V$. Der Punkt des Lemmas ist deshalb, daß $\|v - P_h v\|_V^2$ erscheint.

Sei $v \in V_m$ mit $\|v\|_H = 1$ von der Form

$$v = \sum_{n=1}^m \alpha_n u_n, \qquad \sum_{n=1}^m |\alpha_n|^2 = 1.$$

Wegen $\|v\|_H = 1$ gilt

$$\begin{aligned} 1 - \|P_h v\|_H^2 &= (v, v)_H - (P_h v, P_h v)_H = (v - P_h v, v + P_h v)_H = (v - P_h v, 2v + P_h v - v)_H \\ &= \underbrace{-\|v - P_h v\|_H^2}_{\leq 0} + 2(v - P_h v, v)_H \end{aligned}$$

und damit

$$\|P_h v\|_H^2 = 1 - 2(v - P_h v, v)_H + \|v - P_h v\|_H^2 \geq 1 - 2(v - P_h v, v)_H.$$

Mit $a(z, u_n) = \lambda_n (z, u_n)_H$ für alle $z \in V$ und $a(v - P_h v, w) = 0$ für alle $w \in V_h$ berechnen wir:

$$\begin{aligned} (v - P_h v, v)_H &= \sum_{n=1}^m \alpha_n (v - P_h v, u_n)_H \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{\alpha_n}{\lambda_n} a(v - P_h v, u_n) \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{\alpha_n}{\lambda_n} a(v - P_h v, u_n - P_h u_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^m \frac{|\alpha_n|}{\lambda_n} \|a\| \|v - P_h v\|_V \|u_n - P_h u_n\|_V \\ &\leq \|v - P_h v\|_V \frac{\|a\|}{\lambda_1} \underbrace{\sqrt{\sum_{n=1}^m |\alpha_n|^2}}_{=1} \underbrace{\sqrt{\sum_{n=1}^m \|u_n - P_h u_n\|_V^2}}_{\leq \sqrt{m} \sup\limits_{\substack{w \in V_m \\ \|w\|_H = 1}} \|w - P_h w\|_V} \\ &\leq \frac{\|a\|}{\lambda_1} \sqrt{m} \sup_{\substack{w \in V_m \\ \|w\|_H = 1}} \|w - P_h w\|_V^2 \end{aligned}$$

und damit folgt

$$\|P_h v\|_H^2 \geq 1 - 2\frac{\|a\|}{\lambda_1} \sqrt{m} \sup_{\substack{w \in V_m \\ \|w\|_H = 1}} \|w - P_h w\|_V^2.$$

Wegen $\|v\|_H = 1$ folgt die Behauptung. □

Lemma 10.16 zeigt, daß wir weiterkommen, wenn wir eine Approximationseigenschaft für die Räume $(V_h)_{h>0}$ fordern. Wir werden nun fordern:

$$\forall v \in V\colon \lim_{h \to 0} \inf_{w \in V_h} \|v - w\|_V = 0. \tag{10.19}$$

Satz 10.17 *Es gelte (10.19). Dann gilt: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $h_0 > 0$ und ein $C_m > 0$, so daß für alle $h < h_0$ gilt:*

$$0 \leq \lambda_{h,m} - \lambda_m \leq C_m \sup_{v \in V_m} \inf_{w \in V_h} \frac{\|v - w\|_V^2}{\|v\|_H^2}.$$

Beweis: Wir können wieder $v \in V_m$ mit $\|v\|_H = 1$ betrachten. Schreiben wir $v = \sum_{n=1}^m \alpha_n u_n$ mit $\sum_{n=1}^m |\alpha_n|^2 = 1$, so gilt

$$\|v - P_h v\|_V \leq \sum_{n=1}^m |\alpha_n| \|u_n - P_h u_n\|_V \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{n=1}^m |\alpha_n|^2}}_{=1} \sqrt{\sum_{n=1}^m \|u_n - P_h u_n\|_V^2}$$

Nach Voraussetzung (10.19) können wir jede der m Funktion u_n, $n = 1, \ldots, m$, beliebig gut approximieren, wenn h klein genug ist. D.h., wir haben gezeigt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_0 > 0 \quad \forall h < h_0 \colon \sup_{\substack{v \in V_m \\ \|v\|_H = 1}} \|v - P_h v\|_V \leq \varepsilon.$$

Wegen der elementaren Ungleichung

$$\frac{1}{1-\varepsilon} \leq 1 + 2\varepsilon \qquad \text{für } \varepsilon > 0 \text{ hinreichend klein}$$

folgt somit aus Lemma 10.16, daß für hinreichend kleine h

$$\sigma_{h,m}^{-2} \leq 1 + C \sup_{\substack{v \in V_m \\ \|v\|_H = 1}} \|v - P_h v\|_V^2.$$

und wegen der Bestapproximationseigenschaft des Ritzprojektors

$$\sigma_{h,m}^{-2} \leq 1 + C \sup_{\substack{v \in V_m \\ \|v\|_H = 1}} \inf_{w \in V_h} \|v - w\|_V^2.$$

Mittels Lemma 10.15 folgt dann die Behauptung. □

Bemerkung 10.18

- Satz 10.17 zeigt, daß die Konvergenz der Eigenwerte *doppelt so schnell* ist wie man es für die Eigenvektoren erwarten kann.
- Satz 10.17 zeigt, daß man für festes m Konvergenz $\lambda_m = \lim_{h \to 0} \lambda_{h,m}$ erwarten kann, wenn man mit Gittern der Maschenweite h arbeitet. ■

10.0.3 Konvergenz der Eigenvektoren

Wir betrachten hier nur den Fall eines *einfachen* Eigenwertes λ_m; die Konvergenztheorie für Eigenwerte mit Vielfachheit $k \geq 2$ ist möglich.

Die Eigenfunktionen $(u_n)_n$ wurden bereits in Korollar 10.8 definiert. Völlig analog ergeben sich diskrete Eigenfunktionen $(u_{h,n})_{n=1}^N$. Diese bilden eine ONB von $(V_h, (\cdot,\cdot)_H)$ und die Funktionen $(\lambda_{h,n}^{-1/2} u_n)_{n=1}^N$ bilden eine ONB von $(V_h, a(\cdot,\cdot))$.

Eine wichtige Größe in der Konvergenztheorie von Eigenwertproblemen ist, wie gut der Eigenwert λ_m vom Rest des Spektrums getrennt ist: $\min\{|\lambda_m - \lambda_i| \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{m\}\} > 0$ (beachte: λ_m ist als einfacher EW gefordert). Entsprechend benötigen wir eine Größe, die mißt, inwieweit das diskrete Spektrum $\{\lambda_{h,i} \mid 1 \leq i \leq N\}$ von λ_m getrennt ist. Genauer: Die Zahl

$$\rho_{h,m} := \max_{\substack{1 \leq i \leq N \\ i \neq m}} \frac{\lambda_m}{|\lambda_m - \lambda_{h,i}|} \tag{10.20}$$

ist ein Maß dafür, wie weit die diskreten Eigenwerte, die *nicht* gegen λ_m konvergieren, von λ_m getrennt sind.

Übung 10.19 Zeigen Sie: Unter den Voraussetzungen von Satz 10.17 und der Annahme, daß λ_m ein einfacher EW ist, gibt es ein $h_0 > 0$ und ein $c_m > 0$, so daß für alle $h < h_0$ gilt: $\rho_{h,m} \leq c_m$. ■

Das folgende Lemma zeigt, daß (bis auf Skalierung) die diskrete Eigenfunktion $u_{h,m}$ tatsächlich eng mit der Eigenfunktion u_m zusammenhängt:

Lemma 10.20 *Sei λ_m einfacher Eigenwert und gelte die Approximationseigenschaft (10.19). Dann existiert $h_0 > 0$, so daß für alle $h < h_0$ gilt: Es existiert ein Vorzeichen $\sigma \in \{\pm 1\}$, so daß*

$$\|u_m - \sigma u_{h,m}\|_H \leq 2(1 + \rho_{m,h})\|u_m - P_h u_m\|_H. \tag{10.21}$$

Beweis: Die kontinuierlichen Eigenfunktionen $(u_n)_n$ und die diskreten Eigenfunktionen $(u_{h,n})_n$ sind nur bis auf ein Vorzeichen eindeutig. Wir wählen nun das Vorzeichen σ von $u_{h,m}$ durch die Normierungsbedingung

$$(P_h u_m, u_{h,m})_H \geq 0. \tag{10.22}$$

Mit dieser Wahl wollen wir nun (10.21) mit $\sigma = +1$ zeigen.

Die Funktionen $(u_{h,n})_{n=1}^N$ bilden eine ONB von $(V_h, (\cdot,\cdot)_H)$. Sei $v_{h,m} \in \operatorname{span}\{u_{h,m}\}$ die H-Orthogonalprojektion von $P_h u_m$, d.h.

$$v_{h,m} := (P_h u_m, u_{h,m})_H u_{h,m}$$

Wir bemerken

$$\begin{aligned} P_h u_m - v_{h,m} &= \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^N (P_h u_m, u_{h,n})_H u_{h,n} \\ \|P_h u_m - v_{h,m}\|_H^2 &= \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^N |(P_h u_m, u_{h,n})_H|^2. \end{aligned}$$

Wir werden unten mit der Dreiecksungleichung

$$\|u_m - u_{h,m}\|_H \leq \|u_m - P_h u_m\|_H + \|P_h u_m - v_{h,m}\|_H + \|v_{h,m} - u_{h,m}\|_H \tag{10.23}$$

zum Ziel kommen. Wir müssen also diese drei Terme abschätzen.

Über die Eigenschaft, daß die Funktionen $(u_n)_n$ und $(u_{h,n})_n$ Eigenfunktionen sind, können wir wieder das $(\cdot,\cdot)_H$-Skalarprodukt in ein $a(\cdot,\cdot)$-Skalarprodukt umwandeln, um die Galerkinorthogonalität des Ritzprojektors P_h auszunutzen:

$$(P_h u_m, u_{h,n})_H = \lambda_{h,n}^{-1} a(P_h u_m, u_{h,n}) = \lambda_{h,n}^{-1} a(u_m, u_{h,n}) = \frac{\lambda_m}{\lambda_{h,n}}(u_m, u_{h,n})_H.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} (\lambda_{h,n} - \lambda_m)(P_h u_m, u_{h,n})_H &= \lambda_m (u_m - P_h u_m, u_{h,n})_H \\ \Longrightarrow \|P_h u_m - v_{h,m}\|_H^2 &= \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^N |(P_h u_m, u_{h,n})_H|^2 \\ &\leq \rho_{h,m}^2 \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^N |(u_m - P_h u_m, u_{h,n})_H|^2 \\ &\leq \rho_{h,m}^2 \sum_{n=1}^N |(u_m - P_h u_m, u_{h,n})_H|^2 \leq \rho_{h,m}^2 \|u_m - P_h u_m\|_H^2. \end{aligned} \tag{10.24}$$

Damit haben wir den zweiten Term in (10.23) in der gewünschten Art abgeschätzt. Es bleibt $v_{h,m} - u_{h,m}$ abzuschätzen. Es ist:

$$\begin{aligned} v_{h,m} - u_{h,m} &= ((P_h u_m, u_{h,m})_H - 1)\, u_{h,m} \\ \Longrightarrow \|v_{h,m} - u_{h,m}\|_H &= |1 - (P_h u_m, u_{h,m})_H|\,. \end{aligned}$$

Die umgekehrte Dreiecksungleichung liefert mit unserer Normierungsannahme $(P_h u_m, u_{h,m})_H \geq 0$

$$\underbrace{\|u_m\|_H}_{=1} - \|u_m - v_{h,m}\|_H \leq \underbrace{\|v_{h,m}\|_H}_{|(P_h u_m, u_{h,m})_H| = (P_h u_m, u_{h,m})_H} \leq \underbrace{\|u_m\|_H}_{=1} + \|u_m - v_{h,m}\|_H, \tag{10.25}$$

so daß wir erhalten

$$|1 - (P_h u_m, u_{h,m})_H| \leq \|u_m - v_{h,m}\|_H.$$

und damit

$$\|v_{h,m} - u_{h,m}\|_H = |1 - (P_h u_m, u_{h,m})_H| \leq \|u_m - v_{h,m}\|_H. \tag{10.26}$$

Die Dreiecksungleichung angewandt auf (10.26) liefert mit (10.24)

$$\begin{aligned}\|v_{h,m} - u_{h,m}\|_H &\leq \|u_m - v_{h,m}\|_H \leq \|u_m - P_h u_m\|_H + \|P_h u_m - v_{h,m}\|_H \\ &\leq \|u_m - P_h u_m\|_H + \rho_{h,m}\|u_m - P_h u_m\|_H\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}\|u_m - u_{h,m}\|_H &\leq \|u_m - P_h u_m\|_H + \|P_h u_m - v_{h,m}\|_H + \|v_{h,m} - u_{h,m}\|_H \\ &\leq \|u_m - P_h u_m\|_H + (1 + \rho_{h,m})\|u_m - P_h u_m\|_H + \rho_{h,m}\|u_m - P_h u_m\|_H,\end{aligned}$$

was die gewünschte Aussage ist. □

Lemma 10.25 liefert die Konvergenz der Eigenwerte in der (ziemlich schwachen) $\|\cdot\|_H$-Norm. Für Aussagen in der $\|\cdot\|_V$-Norm kann man folgendes Resultat verwenden, welches auch bei Fehlerschätzern für EWP Anwendung findet:

Lemma 10.21 *Sei $(u, \lambda) \in V \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ ein Eigenpaar. Dann gilt für beliebige $v \in V \setminus \{0\}$:*

$$a(v, v) - \lambda\|v\|_H^2 = a(u - v, u - v) - \lambda(u - v, u - v)_H$$

Beweis: Folgt durch direktes Nachrechnen und Ausnutzen von $a(u, z) = \lambda(u, z)_H$ für beliebige $z \in V$. □

Setzt man $u = u_m$ und $v = u_{h,m}$ in Lemma 10.21 ein, so erhalten wir eine Konvergenzaussage für $u_m - u_{h,m}$ aus Lemma 10.20 und Satz 10.17:

Satz 10.22 *Sei λ_m ein einfacher Eigenwert und gelte (10.19). Dann existiert ein $h_0 > 0$ und ein $C > 0$, so daß für alle $h < h_0$ gilt (hier ist das VZ von $u_{h,m}$ immer wie im Beweis von Lemma 10.20 gewählt)*

$$\begin{aligned}\|u_m - u_{h,m}\|_V &\leq C \sup_{\substack{v \in V_m \\ \|v\|_H = 1}} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V \\ \|u_m - u_{h,m}\|_H &\leq C\|u_m - P_h u_m\|_H.\end{aligned}$$

Beweis: Lemma 10.21 liefert mit $u = u_m$ und $v = u_{h,m}$ mit den Normierungen $\|u_m\|_H = 1 = \|u_{h,m}\|_H$

$$\begin{aligned}\lambda_{h,m} - \lambda_m &= \lambda_{h,m}\|u_{h,m}\|_H^2 - \lambda_m\|u_{h,m}\|_H^2 = a(u_{h,m}, u_{h,m}) - \lambda_m\|u_{h,m}\|_H^2 \\ &= a(u_m - u_{h,m}, u_m - u_{h,m}) - \lambda_m\|u_m - u_{h,m}\|_H^2.\end{aligned}$$

Das liefert

$$a(u_m - u_{h,m}, u_m - u_{h,m}) = \lambda_{h,m} - \lambda_m + \lambda_m\|u_m - u_{h,m}\|_H^2,$$

woraus sich aus Lemma 10.20 und Satz 10.17 die Behauptung ergibt. □

10.0.4 Bemerkungen

- Die Konvergenzaussage in Satz 10.17 verlangt die Approximierbarkeit von $V_m = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_m\}$ und nicht einfach nur $\operatorname{span}\{u_m\}$ (im Falle von einfachen Eigenwerten). Tatsächlich kann man die Aussagen auch dahingehend verschärfen, daß bei einfachen Eigenwerten gilt:

$$\lambda_{h,m} - \lambda_m \leq C \inf_{v \in V_h} \|u_m - v\|_V^2. \tag{10.27}$$

- Wir haben hier nur den symmetrischen Fall betrachtet, bei dem der Operator T selbstadjungiert ist. Die Konvergenztheorie bei nichtsymmetrischen Bilinearformen $a(\cdot,\cdot)$ ist möglich. Nicht alle Konvergenzaussagen aus dem symmetrischen Fall sind übertragbar, u.a. weil geometrische und algebraische Vielfachheit von Eigenwerten nicht mehr übereinstimmen. Z.B. ist dann die Verdopplung der Konvergenzrate wie in (10.27) nicht mehr gewährleistet. ■

10.0.5 ein operatortheoretischer Zugang

Ziel: Illustration eines allgemeineren Zugangs mittels funktionalanalytischer Techniken, der auch auf nicht-symmetrische Probleme verallgemeinerbar ist und auch quantifizierbare Konvergenzaussagen liefern kann.

Eine Grundannahme wird (10.19), sein, das wir etwas anders formulieren:

$$\lim_{h \to 0} P_h u = u \qquad \forall u \in V. \tag{10.28}$$

Satz 10.23 *(i) Sei $(u_h, \lambda_h)_{h>0}$ eine beschränkte Folge von diskreten Eigenpaaren (d.h. $\|u_h\|_V \leq 1$ und $\lambda_h \leq C$ für ein $C > 0$ unabhängig von h). Dann existiert eine Teilfolge $(u_{h'}, \lambda_{h'})$ und ein Eigenpaar $(u, \lambda) \in V \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ von (10.2) mit $u_{h'} \to u$ (in V) und $\lambda_{h'} \to \lambda$.*

(ii) Sei λ ein Eigenwert von (10.2). Dann existiert eine Folge (u_h, λ_h) von diskreten Eigenpaaren mit $\lambda_h \to \lambda$.

Für den Beweis benötigen wir eine Operatordarstellung der diskreten Eigenwertproblem:

Lemma 10.24 *(i) Sei (u_h, λ_h) ein diskretes Eigenpaar. Dann gilt:*

$$\lambda_h P_h T u_h = u_h \tag{10.29}$$

$$\lambda_h P_h T P_h u_h = P_h u_h = u_h. \tag{10.30}$$

(ii) Jedes Eigenpaar $(u, \lambda) \in V \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ von

$$P_h T P_h u = \frac{1}{\lambda} u \tag{10.31}$$

ist ein diskretes *Eigenpaar, d.h. $u = P_h u \in V_h$ und $(u, \lambda) \in V_h \times \mathbb{R}$ löst (10.13).*

Beweis: *ad (i):* Wir nutzen die Selbstadjungiertheit von T und P_h bzgl. $a(\cdot,\cdot)$ aus: Sei $(u_h, \lambda_h) \in V_h \times \mathbb{R}$. D.g.:

$$\begin{aligned} & a(u_h, v) = \lambda_h (u_h, v)_H \qquad \forall v \in V_h \\ \iff & \underbrace{a(u_h, P_h v)}_{=a(P_h u_h, v) = a(u_h, v)} = \lambda_h \underbrace{(u_h, P_h v)_H}_{a(TP_h v, u_h) = a(P_h v, T u_h) = a(v, P_h T u_h)} \qquad \forall v \in V \\ \iff & u_h = \lambda_h P_h T u_h \end{aligned}$$

Damit ist (10.29) gezeigt. (10.30) folgt aus (10.29) durch Anwenden von P_h.

ad (ii): Erfülle (u, λ) (10.31). Dann ist $u = \lambda P_h T P_h u \in V_h$ in V_h. Insbesondere sind die Umformungen aus dem Beweis von (i) möglich und zeigen, daß (u, λ) ein diskretes Eigenpaar ist. □

Beweis von Satz 10.23: entscheidendes Hilfsmittel ist die *Normkonvergenz* $P_hT \to T$. Diese folgt aus

$$P_hT - T = \underbrace{(P_h - I)}_{\to 0 \text{ punktweise}} \underbrace{T}_{\text{kompakt}}$$

ad (i): Sei (u_h, λ_h) beschränkte Folge von diskreten Eigenpaaren mit

$$\|u_h\|_E = 1 \qquad \text{und} \qquad |\lambda_h| \le C \qquad \forall h > 0.$$

Nach Übergang auf eine Teilfolge (die wir wieder mit (u_h, λ_h) bezeichnen) können wir annehmen:

$$u_h \overset{V}{\rightharpoonup} u \in V, \tag{10.32}$$

$$u_h \overset{H}{\to} u, \tag{10.33}$$

$$Tu_h \overset{V}{\to} Tu, \tag{10.34}$$

$$\lambda_h \to \lambda \in \mathbb{R}. \tag{10.35}$$

Nun schließen wir

$$\underbrace{u_h}_{\to u} = \lambda_h P_h T u_h = \underbrace{\lambda_h}_{\to\lambda} \left(\underbrace{(P_hT - T)}_{\to 0 \text{ in Norm}} \underbrace{u_h}_{\text{beschränkt}} + \underbrace{T(u_h - u)}_{\to 0 \text{wg. } T \text{ kompakt}} + Tu \right)$$

Damit konvergiert die rechte Seite in Norm gegen λTu, so daß die (schwach konvergente) Folge auf der linken Seite auch in Norm gegen ihren schwachen Limes u konvergiert. Wir haben also

$$u = \lambda Tu.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $u \neq 0$ und $\lambda \neq 0$. Das folgt aus

$$1 = \|u_h\|_E^2 = a(u_h, u_h) = \lambda_h (u_h, u_h)_H = \lambda_h \|u_h\|_H^2 \overset{(10.33),(10.35)}{\to} \lambda \|u\|_H^2.$$

Damit folgt $\lambda \neq 0$ und $\|u\|_H \neq 0$.

ad (ii): Wir argumentieren mittels eines Störungsargumentes wie im Beweis vom Satz von Bauer-Fike. Wir schreiben

$$T = P_hTP_h + \delta_h$$

wobei $\|\delta_h\|_V \to 0$, denn

$$\delta_h = T - P_hTP_h = (I - P_h)T + P_hT(I - P_h)$$

läßt sich schreiben als Verkettung von kompakten Operatoren und punktweise gegen Null konvergierenden Operatoren. Der Operator P_hTP_h ist kompakt und selbstadjungiert (bzgl. $a(\cdot,\cdot)$) und hat deshalb eine ONB $(e_n, \mu_{h,n})$ von $(V, a(\cdot,\cdot))$ aus Eigenvektoren:

$$P_hTP_he_n = \mu_{h,n} e_n, \qquad n = 1, \ldots,$$

Die Eigenvektoren zu den EW $\mu_{h,n} = 0$ spannen nach dem Spektralsatz $\operatorname{Ker} P_hTP_h$ auf. Nach Lemma 10.24, (ii) sind die Paare $(e_n, 1/\mu_{h,n})$ mit $\mu_{h,n} \neq 0$ diskrete Eigenpaare. Mit den diskreten Eigenwerten mit $\lambda_{h,i} > 0$, $i = 1, \ldots, N$, haben wir also:

$$\mu_{h,n} = \lambda_{h,n}^{-1}, \qquad n = 1, \ldots, N, \qquad \mu_{h,n} = 0, \qquad n = N+1, \ldots,$$

Sei nun λ ein Eigenwert des kontinuierlichen Problems. Setze $\mu := \lambda^{-1}$. Wir behaupten:

$$\inf\{|\mu - \mu_{h,n}| \,|\, n = 1, \ldots, N\} \to 0 \quad \text{für } h \to 0. \tag{10.36}$$

Es reicht, $\inf\{|\mu - \mu_{h,n}| \,|\, n = 1, \ldots, N\} > 0$ zu betrachten. Dann ist λ kein diskreter Eigenwert und $\mu - P_hTP_h$ ist invertierbar:

$$(\mu - P_hTP_h)v = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \mu_{h,n}) a(v, e_n) e_n \quad \text{und} \quad (\mu - P_hTP_h)^{-1} v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu - \mu_{h,n}} a(v, e_n) e_n.$$

Insbesondere erhalten wir

$$\|(\mu - P_h T P_h)^{-1}\|_E = \max_n \frac{1}{|\mu - \mu_{h,n}|} = \frac{1}{\min_n |\mu - \mu_{h,n}|}$$

Sei nun $0 \neq u$ ein zu λ gehöriger Eigenvektor. Dann ist $\mu u = Tu = P_h T P_h u + \delta_h u$ und damit

$$\begin{aligned} u = (\mu - P_h T P_h)^{-1} \delta_h u \qquad &\Longrightarrow \qquad \|u\|_E \leq \|(\mu - P_h T P_h)^{-1}\|_E \|\delta_h\|_E \|u\|_E \\ \Longrightarrow 1 \leq \|(\mu - P_h T P_h)^{-1}\|_E \|\delta_h\|_E &\Longrightarrow \min_n |\mu - \mu_{h,n}| \leq \|\delta_h\|_E \to 0. \end{aligned}$$

Wir haben somit erhalten, daß die diskreten Eigenwerte die kontinuierlichen approximieren. □

10.1 Weyl's asymptotische Formel

Ziel: Für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zeige

$$N_{\Omega,D}(\lambda) \sim \frac{|\Omega|}{4\pi}\lambda, \qquad \lambda \to \infty \tag{10.37}$$

mit der folgenden Zählfunktion für die Eigenwerte des Dirichleteigenwertproblems

$$N_{\Omega,D}(\lambda) := \operatorname{card}\{n \mid \lambda_n \le \lambda\} \tag{10.38}$$

Bemerkung 10.25 Analoge Formeln existieren für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d > 2$, und andere Randbedingungen. ■

10.1.1 Rechtecke

Lemma 10.26 *Sei $R = (0,a) \times (0,b)$. Dann gilt für die Eigenwerte des Dirichleteigenwertproblems auf R:*

$$\lambda_{\ell,m} = \frac{\pi^2\ell^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}, \qquad \ell, m = 1, 2, \ldots, \tag{10.39}$$

$$N_{R,D}(\lambda) := \{(\ell,m) \in \mathbb{N}^2 \mid \lambda_{\ell,m} \le \lambda\} = \lambda\frac{ab}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}), \qquad \lambda \to \infty. \tag{10.40}$$

Beweis: *Beweis von (10.39):* Durch Separation der Veränderlichen bestimmt man die Eigenfunktionen zu $u_{\ell,m}(x,y) := \sin(\pi\ell x/a)\sin(\pi m y/b)$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_{\ell,m} = \pi^2\ell^2/a^2 + \pi^2 m^2/b^2$.

Beweis von (10.40): $N_{R,D}(\lambda)$ stellt die Anzahl Gitterpunkte aus $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ dar, die in der (abgeschlossenen) Ellipse $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x/A)^2 + (y/B)^2 \le 1\}$ mit Halbachsen $A = \sqrt{\lambda}a/\pi$ und $B = \sqrt{\lambda}b/\pi$ liegen. Für große λ ist deshalb

$$N_{R,D}(\lambda) = \frac{1}{4}\text{Fläche}(\mathcal{E}) + O(\text{Umfang}(\mathcal{E})) = \frac{\lambda ab}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}).$$

□

Analog ergibt sich die Formel für die Neumanneigenwerte:

Lemma 10.27 *Sei $R = (0,a) \times (0,b)$. Dann gilt für die Eigenwerte des Neumanneigenwertproblems auf R:*

$$\lambda_{\ell,m} = \frac{\pi^2\ell^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}, \qquad \ell, m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10.41}$$

$$N_{R,N}(\lambda) := \{(\ell,m) \mid \lambda_{\ell,m} \le \lambda\} = \lambda\frac{ab}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}), \qquad \lambda \to \infty. \tag{10.42}$$

Beweis: Die Argumentation ist analog zum Dirichletfall. Man bemerkt, daß die Eigenfunktionen durch $u_{\ell,m}(x,y) = \cos(\pi\ell x/a)\cos(\pi m y/b)$ gegeben sind. □

10.1.2 Monotonieeigenschaften

Wir bezeichnen mit $\lambda_{n,D}(\Omega)$ und $\lambda_{n,N}(\Omega)$ die (sortierten) Eigenwerte zu

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{in } \Omega, & u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ -\Delta u &= \lambda u \quad \text{in } \Omega, & \partial_n u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Laut Übungen gilt mit dem Rayleighquotienten $R(v) = \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}/\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$

$$\lambda_{n,D}(\Omega) = \min_{\substack{E_n \subset H^1_0(\Omega) \\ \dim E_n = n}} \max_{v \in E_n} R(v) = \max_{z_1,\ldots,z_{n-1} \in L^2(\Omega)} \min_{\substack{v \in H^1_0(\Omega) \\ (v,z_i)_{L^2(\Omega)} = 0, \\ i=1,\ldots,n-1}} R(v), \tag{10.43}$$

$$\lambda_{n,N}(\Omega) = \min_{\substack{E_n \subset H^1(\Omega) \\ \dim E_n = n}} \max_{v \in E_n} R(v) = \max_{z_1,\ldots,z_{n-1} \in L^2(\Omega)} \min_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ (v,z_i)_{L^2(\Omega)} = 0, \\ i=1,\ldots,n-1}} R(v). \tag{10.44}$$

Die Dirichleteigenwerte genügen einem einfachen Monotonieprinzip:

Lemma 10.28 *Für Gebiete $\Omega \subset \Omega'$ gilt*

$$\lambda_{n,D}(\Omega) \geq \lambda_{n,D}(\Omega') \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{10.45}$$

Beweis: Übung. Verwende $H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega')$. Man beachte, daß ein analoges Monotonieprinzip nicht für die Neumanneigenwerte gilt. □

Zwischen $\lambda_{n,D}(\Omega)$ und $\lambda_{n,N}(\Omega)$ besteht folgender Zusammenhang:

Lemma 10.29

$$\lambda_{n,D}(\Omega) \geq \lambda_{n,N}(\Omega) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: folgt aus dem Minimax-Prinzip und $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. □

Übung 10.30 Seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ und $0 \leq \widetilde{\lambda}_1 \leq \widetilde{\lambda}_2 \leq \cdots$ mit $\widetilde{\lambda}_n \leq \lambda_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\operatorname{card}\{n \,|\, \lambda_n \leq \lambda\} =: N(\lambda) \leq \widetilde{N}(\lambda) := \operatorname{card}\{n \,|\, \widetilde{\lambda}_n \leq \lambda\} \qquad \forall \lambda \geq 0. \tag{10.46}$$

Wir betrachten nun, in welcher Relation die Eigenwerte von Teilgebieten zu den Eigenwerten eines Gesamtgebietes stehen:

Lemma 10.31 *Sei $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \cup \cdots \cup \overline{\Omega}_m$, wobei die Teilgebiete Ω_i, $i = 1, \ldots, m$, paarweise disjunkt seien. Seien $\widetilde{\lambda}_1 \leq \widetilde{\lambda}_2 \leq \cdots$ die sortierten Werte (gemäß Vielfachheit) von $\{\lambda_{n,D}(\Omega_i) \,|\, n \in \mathbb{N}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}\}$. Dann gilt:*

$$\widetilde{\lambda}_n = \max_{z_1,\ldots,z_{n-1} \in L^2(\Omega)} \; \min_{\substack{v \in L^2(\Omega) \\ v|_{\Omega_i} \in H_0^1(\Omega_i), i=1,\ldots,m \\ (v,z_j)_{L^2(\Omega)} = 0, j=1,\ldots,n-1}} R(v) \tag{10.47}$$

Hier ist der Rayleighquotient eigentlich als

$$R(v) = \frac{\sum_{i=1}^m \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_i)}}{\sum_{i=1}^m \|v\|^2_{L^2(\Omega_i)}} \tag{10.48}$$

zu verstehen.

Beweis: Übung. Die wesentliche Beobachtung ist, daß die rechte Seite von (10.47) die Charakterisierung eines Eigenwertproblems ist, das in die *unabhängigen* Eigenwertprobleme der m Teilgebiete Ω_i zerfällt. □

Analog zu den Dirichletproblemen aus Lemma 10.31 kann man lokale Neumannprobleme betrachten:

Lemma 10.32 *Sei $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \cup \cdots \cup \overline{\Omega}_m$, wobei die Teilgebiete Ω_i, $i = 1, \ldots, m$, paarweise dijunkt seien. Seien $\widetilde{\lambda}_1 \leq \widetilde{\lambda}_2 \leq \cdots$ die sortierten Werte (gemäß Vielfachheit) von $\{\lambda_{n,N}(\Omega_i) \,|\, n \in \mathbb{N}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}\}$. Dann gilt:*

$$\widetilde{\lambda}_n = \max_{z_1,\ldots,z_{n-1} \in L^2(\Omega)} \; \min_{\substack{v \in L^2(\Omega) \\ v|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i), i=1,\ldots,m \\ (v,z_j)_{L^2(\Omega)} = 0, j=1,\ldots,n-1}} R(v) \tag{10.49}$$

Hier ist wieder R wie in (10.48) zu verstehen.

10.1.3 Beweis des Satzes von Weyl

Satz 10.33 (Weyls asymptotische Formel) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitzgebiet mit stückweise glattem Rand. Dann gilt für die Dirichleteigenwerte:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N_{\Omega,D}(\lambda)}{\lambda} = \frac{|\Omega|}{4\pi}. \tag{10.50}$$

Beweis: Für $h > 0$ definiere (unendliche) regelmäßige Vierecksgitter

$$\mathcal{T}_h = \{(ih, (i+1)h) \times (jh, (j+1)h) \mid i, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir betrachten Vereinigungen von Rechtecken R_h und $\widetilde{R}_h$, die Ω von innen und außen approximieren: Seien $R_1, \ldots, R_m$ die Rechtecke aus $\mathcal{T}_h$, die *ganz* in Ω liegen und $\widetilde{R}_1, \ldots, \widetilde{R}_{\widetilde{m}}$ die Rechtecke aus $\mathcal{T}_h$, die nichtleeren Schnitt mit $\overline{\Omega}$ haben. Setze

$$R_h := \cup_{i=1}^m R_i, \qquad \widetilde{R}_h := \cup_{i=1}^{\widetilde{m}} \widetilde{R}_i.$$

1. Schritt: Lemma 10.28 zeigt

$$\lambda_{n,D}(\Omega) \le \lambda_{n,D}(R_h) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mittels Übung 10.30 erhalten wir

$$N_{\Omega,D}(\lambda) \ge N_{R_h,D}(\Omega) \qquad \forall \lambda > 0.$$

Da R_h eine Vereinigung von Rechtecken ist, können wir $\lambda_{n,D}(R_h)$ mittels expliziter Formeln abschätzen:

$$\begin{aligned}
\lambda_{n,D}(R_h) &\overset{(10.43)}{=} \max_{z_1,\ldots,z_{n-1}\in L^2(R_h)} \min_{\substack{v\in H_0^1(R_h)\\ (v,z_i)_{L^2(R_h)}=0, i=1,\ldots,n-1}} R(v) \\
&\le \max_{z_1,\ldots,z_{n-1}\in L^2(R_h)} \min_{\substack{v\in H_0^1(R_j), j=1,\ldots,m\\ (v,z_i)_{L^2(R_h)}=0, i=1,\ldots,n-1}} R(v) \\
&\overset{Lemma\ 10.31}{=} \widetilde{\lambda}_{n,D},
\end{aligned}$$

wobei $\widetilde{\lambda}_{1,D} \le \widetilde{\lambda}_{2,D} \le \cdots$ die sortierte Folge (entsprechend Vielfachheit) der Eigenwerte $\{\lambda_{\ell,D}(R_j) \mid j = 1, \ldots, m, \ell \in \mathbb{N}\}$ ist. Für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ ist nach Lemma 10.26

$$N_{R_j,D}(\lambda) = \frac{\lambda |R_j|}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda})$$

Weil die Spektren der R_j alle gleich sind, erhalten wir

$$\operatorname{card}\{n \mid \widetilde{\lambda}_{n,D} \le \lambda\} = \sum_{j=1}^m N_{R_j,D}(\lambda) = \frac{\lambda |R_h|}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}).$$

(Beachte: die Konstante, die in der $O(\cdot)$-Notation "versteckt" ist, hängt zwar nicht von λ, wohl aber von h ab.) Damit ergibt sich

$$N_{\Omega,D}(\lambda) \ge N_{R_h,D}(\lambda) \ge \frac{\lambda |R_h|}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}).$$

2. Schritt: Aus

$$\lambda_{n,D}(\Omega) \overset{\text{Lemma 10.28}}{\ge} \lambda_{n,D}(\widetilde{R}_h) \overset{\text{Lemma 10.29}}{\ge} \lambda_{n,N}(\widetilde{R}_h)$$

schließen wir mit Übung 10.30

$$N_{\Omega,D}(\lambda) \le N_{\widetilde{R}_h,N}(\lambda).$$

Um $N_{\widetilde{R}_h,N}(\lambda)$ abzuschätzen, verwenden wir

$$\begin{aligned}\lambda_{n,N}(\widetilde{R}_h) &\overset{(10.44)}{=} \max_{z_1,\dots,z_{n-1}\in L^2(\widetilde{R}_h)} \min_{v\in H^1(\widetilde{R}_h)} R(v)\\ &\geq \max_{z_1,\dots,z_{n-1}\in L^2(\widetilde{R}_h)} \min_{\substack{v\in L^2(\widetilde{R}_h)\\ v|_{\widetilde{R}_j}\in H^1(\widetilde{R}_j)}} R(v)\\ &\overset{Lemma\ 10.32}{=} \widetilde{\lambda}_{n,N},\end{aligned}$$

wobei $\widetilde{\lambda}_{1,N} \leq \widetilde{\lambda}_{2,N} \leq \cdots$ die sortierte Folge (entsprechend Vielfachheit) der $\{\lambda_{\ell,N}(\widetilde{R}_j) \,|\, j = 1,\dots,\widetilde{m}, \ell \in \mathbb{N}\}$ ist. Für jedes j ist nach Lemma 10.27

$$N_{\widetilde{R}_j,N}(\lambda) = \lambda\frac{|\widetilde{R}_j|}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}).$$

Weil die Spektren der Rechtecke $\widetilde{R}_j$ alle gleich sind, ergibt sich

$$\operatorname{card}\{n \,|\, \widetilde{\lambda}_{n,N} \leq \lambda\} = \sum_{j=1}^{\widetilde{m}} N_{\widetilde{R}_j,N}(\lambda) = \lambda\frac{|\widetilde{R}_h|}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}),$$

d.h.

$$N_{\Omega,D}(\lambda) \leq N_{\widetilde{R}_h,N}(\lambda) \leq \lambda\frac{|\widetilde{R}_h|}{4\pi} + O(\sqrt{\lambda}).$$

3. Schritt: Die Schritte 1 und 2 liefern

$$\frac{|R_h|}{4\pi} + O(\lambda^{-1/2}) \leq \frac{N_{\Omega,D}(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{|\widetilde{R}_h|}{4\pi} + O(\lambda^{-1/2}).$$

Damit folgt

$$\frac{|\widetilde{R}_h|}{4\pi} \geq \limsup_{\lambda\to\infty} \frac{N_{\Omega,D}(\lambda)}{\lambda} \geq \liminf_{\lambda\to\infty} \frac{N_{\Omega,D}(\lambda)}{\lambda} \geq \frac{|R_h|}{4\pi}.$$

Läßt man nun $h \to 0$, so gilt $\lim_{h\to} |R_h| = \lim_{h\to} |\widetilde{R}_h| = |\Omega|$ und damit

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N_{\Omega,D}(\lambda)}{\lambda} = \frac{|\Omega|}{4\pi}.$$

□

10.1.4 Can you hear the shape of a drum?

Die Form eines Gebietes legt das Dirichletspektrum eindeutig fest. Umgekehrt kann man fragen, ob Kenntnis aller Eigenwerte $\lambda_{n,D}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, das Gebiet Ω eindeutig (bis auf triviale Kongruenztransformationen) festlegt. Die Antwort zu dieser Frage ("can you hear the shape of a drum?") ist: nein. In [9, 8] wurde gezeigt, daß die beiden Gebiete in Fig. 10.1 das gleiche Spektrum haben; sie sind aber nicht kongruent.

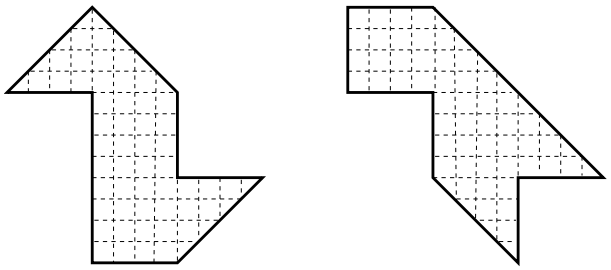

Abbildung 10.1: zwei nicht kongruente, isospektrale Gebiete

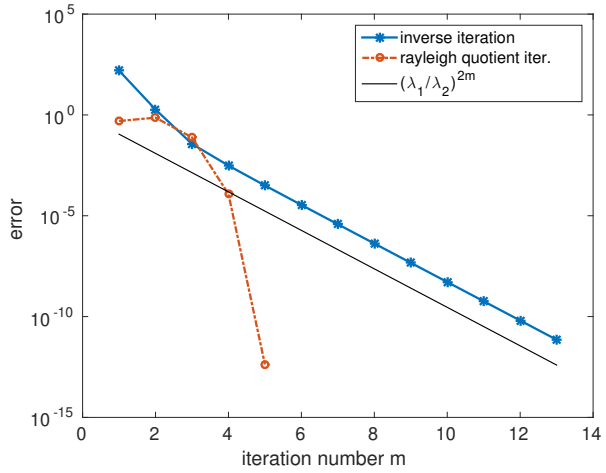

Abbildung 10.2: Konvergenz der inverse Iteration und des Rayleighquotientenverfahrens für $A = \texttt{diag}(1, 3, 5, \ldots, 315)$, $M = \text{Id}$. Es ist $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und Startwert für Rayleighquotienteniteration ist gewählt zu $\lambda^{(0)} := 1.5$.

10.2 Bemerkungen zum Lösen von algebraischen EWPs

Aufgabe: gegeben SPD Matrizen A, M, bestimme den kleinsten EW λ von $Ax = \lambda Mx$.

10.2.1 klassische Techniken

1. *inverse Iteration*

   - bestimme $x^{(n+1)} := A^{-1}Mx^{(n)}$
   - normalisiere $x^{(n+1)}$: $x^{(n+1)} := x^{(n+1)}/\|x^{(n+1)}\|$ $\qquad$ ($\|\cdot\|$ geeignete Norm)
   - $\lambda^{(n+1)} := R(x^{(n+1)})$

   Dieses Verfahren konvergiert (asymptotisch) linear, mit einer Konvergenzgeschwindigkeit, die von der Separation des kleinsten vom zweitkleinsten EW bestimmt wird. (Im vorliegenden *symmetrischen* Fall ist der Fehler $O((\lambda_1/\lambda_2)^{2m})$ für den Fehler im m-ten Schritt).

2. Rayleighquotienteniteration:

   - bestimme $x^{(n+1)} := (A - \lambda^{(n)}M)^{-1}x^{(n)}$
   - normalisiere $x^{(n+1)}$: $x^{(n+1)} := x^{(n+1)}/\|x^{(n+1)}\|$
   - $\lambda^{(n+1)} := R(x^{(n+1)})$

   Dieses Verfahren konvergiert (asymptotisch) kubisch.

Bemerkung 10.34 Blockvarianten existieren, um Gruppen von EW (und EV) zu bestimmen. Auch Krylovverfahren wie das Lanczosverfahren liefern Approximationen an extremale Eigenwerte; allerdings hängt das Konvergenzverhalten des Lanczosverfahrens von auch von $\lambda_{max} - \lambda_{min}$ ab $\rightarrow$ langsame Konvergenz bei großen FEM-Matrizen. ∎

Frage: Was ist das Vorgehen, wenn exaktes Lösen (d.h. Anwenden von A^{-1} oder $(A - \lambda^{(n)}M)^{-1}$) nicht möglich?

10.2.2 vorkonditionierte Gradientenverfahren

Idee: Minimieren von R führt auf Gradienteniteration

$$x^{(n+1)} := x^{(n)} - \omega^{(n)} \nabla R(x^{(n)}),$$
$$\nabla R(x) = 2\frac{Ax - R(x)Mx}{(x, Mx)}$$

wobei die Schrittlänge $\omega^{(n)}$ geeignet gewählt wird (siehe unten).

Tatsächlich ist diese Iteration langsam, wenn $\operatorname{cond} A$ groß ist. Besser ist es, mittels eines *Vorkonditionierers* T (T SPD) die Iteration

$$x^{(n+1)} := x^{(n)} - \omega^{(n)} T \nabla R(x^{(n)}) \tag{10.51}$$

zu betrachten. Das Iterationsverfahren (10.51) heißt PINVIT ("preconditioned inverse iteration"—siehe auch Übung 10.38 unten). Es liegt nahe, $\omega^{(n)}$ durch einen Optimierungsprozess festzulegen: man bestimmt $\omega^{(n)}$ so, daß $R(x^{(n+1)})$ minimal wird, d.h. man löst

$$\min \left\{ R(x) \,|\, x \in \operatorname{span}\{x^{(n)}, T\nabla R(x^{(n)})\} \right\}. \tag{10.52}$$

Offensichtlich ist dann $R(x^{(n+1)}) \leq R(x^{(n)})$.

Übung 10.35 Zeigen Sie, daß die Minimierungsaufgabe (10.52) einem 2×2 EWP entspricht.

Übung 10.36 Zeigen Sie, daß bei Wahl der Schrittlänge $\omega^{(n)}$ mittels (10.52) die Skalierung von T unwichtig ist, d.h. das Verfahren für T und αT, $\alpha > 0$, die gleichen Iterierten liefert. Oft schreibt man die Iteration deshalb auch als

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \widetilde{\omega}^{(n)} T(Ax - R(x)Mx^{(n)})$$

und bestimmt $\widetilde{\omega}^{(n)}$ mittels (10.52).

Bemerkung 10.37 Man kann den obigen Algorithmus verfeinern, indem man über großere Räume minimiert. LO(B)PCG ("locally optimal (block) preconditioned conjugate gradient method") von Knyazev löst folgendes 3×3-EWP

$$\min \left\{ R(x) \,|\, x \in \operatorname{span}\{x^{(n)}, x^{(n-1)}, T\nabla R(x^{(n)})\} \right\}. \tag{10.53}$$

Man beachte, daß sich diese Iteration sehr billig realisieren läßt, wenn die Anwendung von T, A, M billig ist. ■

Die Eigenschaften des Vorkonditionierers T werden mit den Parametern γ_1, γ_2 charakterisiert:

$$\gamma_1(x, T^{-1}x) \leq (x, Ax) \leq \gamma_2(x, T^{-1}x) \qquad \forall x. \tag{10.54}$$

Übung 10.38 Betrachten Sie einen optimalen Vorkonditionierer, d.h. $T = A^{-1}$. Überlegen Sie sich, daß man die Schrittlänge $\omega^{(n)}$ in (10.51) so wählen kann, daß man effektiv einen Schritt der inversen Iteration durchführt. ■

Bzgl. der Konvergenz von PINVIT mit Schrittlängenwahl (10.52) (und damit auch von LOPCG) gilt:

Satz 10.39 *Setze für γ_1, $\gamma_2 > 0$ aus (10.54) $\gamma := (\gamma_2 - \gamma_1)/(\gamma_1 + \gamma_2)$. Es gelte $\lambda_i < R(x^{(n)}) < \lambda_{i+1}$. Dann gilt für $x^{(n+1)}$: Entweder ist $R(x^{(n+1)}) \leq \lambda_i$ oder $\lambda_i < R(x^{(n+1)}) < \lambda_{i+1}$ mit*

$$0 < \frac{R(x^{(n+1)}) - \lambda_i}{\lambda_{i+1} - R(x^{(n+1)})} \leq \sigma^2 \frac{R(x^{(n)}) - \lambda_i}{\lambda_{i+1} - R(x^{(n)})}, \qquad \sigma = \gamma + (1-\gamma)\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} < 1$$

Beweis: siehe [2, 13, 15] □

Bemerkung 10.40 Das typische Verhalten von preconditioned inverse iteration ist eine (asymptotisch) lineare Konvergenz gegen den kleinsten EW. Man beachte, daß die Qualität des Vorkonditionierers T explizit in die Abschätzung eingeht. Insbesondere hängt die asymptotische Konvergenz des Verfahrens bei optimaler Wahl des Vorkonditionierers nicht von $\operatorname{cond} A$ ab sondern nur davon, wie gut der kleinste vom zweitkleinsten EW getrennt ist. ∎