KdV-Gleichung $u_t + (\alpha u^2 + \nu u_{xx})_x = 0$

Leap frog Diskretisierung

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{2\alpha\mu}{3}\left(u_{j-1}^n + u_j^n + u_{j+1}^n\right)\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) - \frac{\nu\mu}{h^2}\left(u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n\right)$$

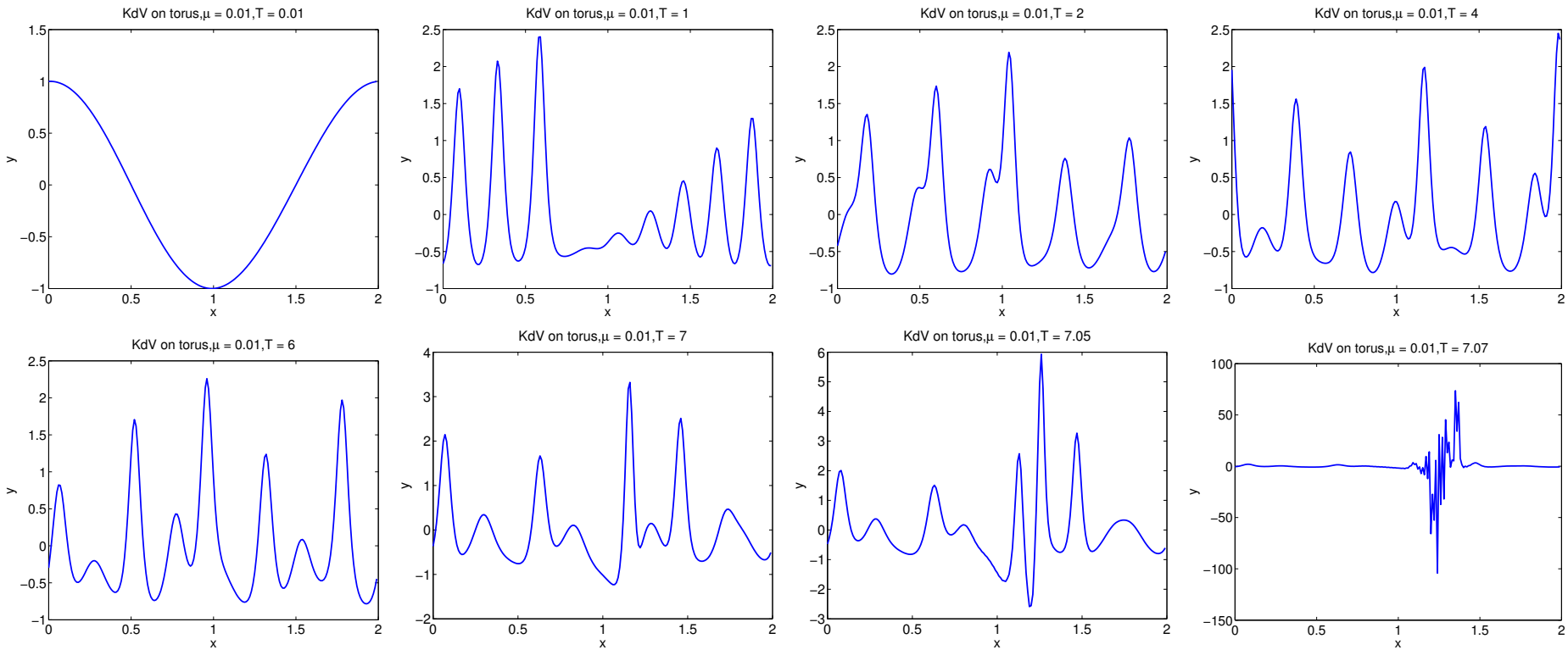
Stabilität: von Neumann-Analyse nach "freezing of coefficients" liefert

$$k < \frac{h}{4|\nu|/h^2 + 2|\alpha u_{max}|}$$

numerischer Setup

- $\nu = 0.022^2, \qquad \alpha = 0.5, \qquad u_0(x) = \cos(\pi x), \qquad u(0,t) = u(2,t)$
- Beobachtung: $|u| \leq 5$
- $\Longrightarrow$ Erwartung: $h = 0.01$ und $k < 0.004$ sind stabil.
- Numerik: $h = 0.01$ und $k = 0.0001$

numerische Lösung zu verschiedenen Zeiten



Beobachtung: “blow-up” der numerische Lösung

Lösung: “dissipative Verfahren”