Serie 6 (CSE)

Diskussion des Blattes: Fr., 5.5.2023

1. Betrachten Sie das ODE-System

$$(u', v)_{L^2} + a(u, v) = (f(t), v)_{L^2} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei a nur eine Gårding–Ungleichung erfüllt: $a(v, v) \geq \|v\|^2_{H^1(\Omega)} - C\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Zeigen Sie, daß mit der Substitution $u(t) = e^{\lambda t}\widetilde{u}(t)$ für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch in diesem Fall eine Energieabschätzung wie in Satz 9.1 der VO erhalten kann. In Satz 2.1 nahm der Einfluß der Anfangsdaten mit wachsendem t ab. Ist das auch hier der Fall?

2. Modifizieren Sie Ihr Programm aus Blatt 5.3, so daß es zwei verschiedene Verfahren realisiert: a) das Crank-Nicolson-Verfahren und b) ein modifiziertes CN-Verfahren, bei dem zuerst 2 implizite Eulerschritte und dann lauter CN-Schritte gemacht werden.

a) Machen für die glatte Lösung aus Blatt 5.3 einen Konvergenzplot (Fehler gegen Gitterweite h) für den Fehler zum Endzeitpunkt $T = 1$ für das implizite Eulerverfahren, CN und das modifizierte CN-Verfahren. Wählen Sie $k = 2h$. Falls Sie nicht die 1D-Geometrie gewählt haben, dann vergleichen Sie mit einer Lösung, die auf einem verfeinerten Gitter entstanden ist. Welches Konvergenzverhalten beobachten Sie?

b) Erstellen Sie Lösungsplots für verschiedene Gitter und den Fall $f \equiv 0$ und $u_0 \equiv 1$. Der Einfachheit halber interpolieren Sie den Startwert u_0 in den inneren Knoten des Gitters. Was beobachten Sie für den impliziten Euler, das CN-Verfahren und das modifizierte CN-Verfahren?

3. **(Kollokationsverfahren als spezielle RK-Verfahren)** Implizite s-stufige Runge-Kutta-Verfahren werden beschrieben durch Vektoren $\mathbf{c}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^s$ und eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{s\times s}$ (kurz als "Butcher-Tableau" $\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^\top \end{array}$ geschrieben). Dabei ist die Rekursion $y^{n+1} = y^n + k\sum_{i=1}^s \mathbf{b}_i k_i$, wobei die k_i die Gleichungen

$$k_i = f(t + k\mathbf{c}_i, y^n + k\sum_{j=1}^s \mathbf{A}_{ij}k_j), \qquad i = 1, \ldots, s$$

erfüllen. In der vorliegenden Übung soll gezeigt werden, daß die große Klasse der Kollokationsverfahren, welche die Gauß-Verfahren, die Radau-Verfahren und die Lobatto-Verfahren enthält, implizite RK-Verfahren sind.

a) Überprüfen Sie, daß das implizite Eulerverfahren gegeben ist durch das Tableau $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$

b) Seien $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_s \in [0, 1]$ paarweise verschiedene Stützstellen. Wir definieren das *Kollokationsverfahren* wie folgt: Sei $u \in \mathcal{P}_s$ das Polynom vom Grad s, welches die Kollokationsbedingungen

$$\begin{aligned} u(t_0) &= y^0, \\ u'(t_0 + \mathbf{c}_i h) &= f(t_0 + \mathbf{c}_i h, u(t_0 + \mathbf{c}_i h)), \qquad i = 1, \ldots, s, \end{aligned}$$

erfüllt. Ein Schritt des Einschrittverfahrens ist dann gegeben durch

$$y^1 = u(t_0 + h).$$

Zeigen Sie, daß das Kollokationsverfahren ein (implizites) RK-Verfahren ist, wobei

$$\mathbf{A}_{ij} = \int_0^{c_i} l_j(t)\,dt, \qquad \mathbf{b}_j = \int_0^1 l_j(t)\,dt, \qquad l_j(t) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^s \frac{t - c_i}{c_j - c_i}$$

Hinweis: Schreiben Sie $u'(t) = \sum_{j=1}^s k_j l_j(t)$.