Serie 8 (TM)

Diskussion des Blattes: Fr., 19.5.2023

1. Bei der Diskussion des expliziten Eulerverfahrens haben wir gesehen, daß nach N Schritten die die Lösung abgeschätzt werden kann durch $\|\mathbf{u}_N\| \leq \|\mathbf{R}^N\|\|\mathbf{u}_0\| + \cdots$.

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ heißt *stabil* ("power bounded"), falls es eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^k$ und eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß

$$\|\mathbf{A}^n\| \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie: falls (1) für *eine* Matrixnorm gilt, dann gilt (1) bereits für *jede* Norm.

b) Zeigen Sie folgende Äquivalenz: $\mathbf{A}$ ist stabil genau dann, wenn für das Spektrum $\sigma(\mathbf{A})$ gilt: für alle $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ gilt $|\lambda| \leq 1$ und $|\lambda| = 1$ impliziert, daß die geometrische Vielfachheit von λ mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt. *Hinweis:* Ein (einzelner) Jordanblock $J \in \mathbb{C}^{\mu\times\mu}$ zum EW λ kann geschrieben werden als $J = \lambda \mathrm{Id}_\mu + N$. Es gilt der binomische Lehrsatz: $J^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \lambda^{n-\nu} N^\nu$. Wie sieht Ne_ℓ aus, wenn $e_\ell \in \mathbb{C}^\mu$ ein Einheitsvektor ist? Betrachten Sie die beiden letzten Komponenten der Vektoren $J^n e_\mu$, wobei $e_\mu = (0, 0, \ldots, 0, 1)^\top$.

2. Betrachten Sie die Diskretisierung der Wärmeleitungsgleichung $u_t - u_{xx} = 0$ mittels des θ-Schemas (und symmetrischen Differenzen im Ort):

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \sigma \left\{ \theta \left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} \right) + (1-\theta) \left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n \right) \right\}, \qquad \sigma := \frac{k}{h^2}$$

a) Zeigen Sie für das explizite Eulerverfahren ($\theta = 0$), daß der Verstärkungsfaktor $g(\xi) = 1 - 4\sigma \sin^2(\xi h/2)$. Was können Sie über die Stabilität des Verfahrens in Abhängigkeit von k und h aussagen?

b) Betrachten Sie das Crank-Nicolson-Verfahren ($\theta = 1/2$). Bestimmen Sie den Verstärkungsfaktor g. Hier ist es einfacher, mit dem Ansatz $u_j^n = g^n e^{\mathbf{i}\xi j h}$ zu arbeiten. Für welche Kombinationen von k und h ist das Verfahren stabil?

3. Für vektorwertige Differenzenverfahren kann man eine von Neumann-Analyse auch durchführen. Entsprechend ist der Propagationsoperator E eine Matrix. Im Fourierbild entsteht dann eine Matrix $\widehat{A}(\xi)$, $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$. Eine notwendige Bedingung ist dann, daß für den Spektralradius $\rho(\widehat{A}(\xi))$ gilt:

$$\rho(\widehat{A}(\xi)) \leq 1 + Ck \qquad \text{uniform in } \xi \in [-\pi/h, \pi/h]. \tag{2}$$

a) Das *leap frog*-Verfahren für die Advektionsgleichung $u_t + au_x = 0$ ($a > 0$) ist ein Zweischrittverfahren gegeben durch

$$u_i^{n+1} - u_i^{n-1} = -\lambda \left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n \right), \qquad \lambda = \frac{ka}{h}.$$

Überführen Sie das Zweischrittverfahren in ein Vektor-Einschrittverfahren mittels des Vektors

$$\mathbf{V}_i^n := \begin{pmatrix} u_i^n \\ u_i^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Verstärkungsmatrix $\widehat{A}(\xi)$ an.

b) Berechnen Sie den Betrag der beiden Eigenwerte der Matrix

$$G = \begin{pmatrix} -2\mathbf{i}\lambda s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0,1]; s \in [-1,1].$$

c) Zeigen Sie: Für $0 < \lambda < 1$ gilt für das leap frog-Verfahren die Bedingung (2).