# Serie 8 (CSE)

Diskussion des Blattes: Fr., 19.5.2023

**1.** (das "continuous Galerkin-Verfahren", "$cG(p)$"). Sei $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ ein endlichdimensionaler Raum. Sei $p \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{T}$ ein Gitter bestehend aus dem Punkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots, t_N = T$. Sei

$$X_h = \{u \in C^0([0,T]; V_h) \,|\, u|_{(t_n,t_{n+1})} \text{ ein Polynom (in } t) \text{ vom Grad } p \text{ für jedes } n\},$$
$$Y_h = \{u \in L^2((0,T); V_h) \,|\, u|_{(t_n,t_{n+1})} \text{ ein Polynom (in } t) \text{ vom Grad } p-1 \text{ für jedes } n\}.$$

Wir betrachten eine Diskretisierung von

$$(u_u'(t), v)_{L^2} + a(u_h(t), v) = (f(t), v)_{L^2} \qquad \forall v \in V_h, \qquad u_h(0) = u_h^0 \in V_h. \tag{1}$$

mit $u_h^0 = 0$. Das Verfahren ist: finde $u_p \in X_h$ mit $u_p(0) = 0$, so daß

$$\int_0^T (u_p'(t), v(t))_{L^2} + a(u_p(t), v(t))\, dt = \int_0^T (f(t), v(t))_{L^2}\, dt \qquad \forall v \in Y_h.$$

**a)** Zeigen Sie, daß das numerische Verfahren eine eindeutige Lösung hat. Zeigen Sie, daß es ein "Zeitschrittverfahren" ist in dem Sinn, daß die Approximation $u_p$ elementweise berechnet werden kann: erst auf $(t_0, t_1)$, dann auf $(t_1, t_2)$ etc.

**b)** Tatsächlich entstehen RK-artige Verfahren. Welches Verfahren erhalten Sie im einfachsten Fall $p = 1$, wenn Sie zusätzlich annehmen, daß $f$ eine (in der Zeit) stückweise lineare Funktion ist.

**2.** Zeigen Sie, daß für das Lax-Friedrichs-Schema

$$\frac{1}{k}\left(u_i^{n+1} - \frac{1}{2}\left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right)\right) + \frac{a}{2h}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right) = g(x_i, t_n)$$

unter der Voraussetzung der CFL-Bedingung $|ak/h| \leq 1$ der Propagationsoperator $E$ die folgende Abschätzung erfüllt:

$$\|E\|_{\ell_h^1} \leq 1$$

Hier ist für eine Folge $(V_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ definiert $\|(V_i)_i\|_{\ell_h^1} := h\sum_{i\in\mathbb{Z}} |V_i|$ und entsprechend die Norm $\|\cdot\|_{\ell_h^1}$ für Operatoren, die $\ell_h^1 \to \ell_h^1$ abbilden.

**3.** Programmieren Sie auf einem regelmäßen Gitter das upwind-Verfahren (für $2\times2$-Systeme) und das Lax-Friedrichs-Verfahren für das Problem

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x = 0 \qquad \text{auf } (0,1), \qquad \text{mit periodischen Randbedingungen } u(0) = u(1).$$

Zerlegen Sie hierzu wie in der VO die Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$, um das korrekte Upwinding zu erzielen. Wählen Sie

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u_0(x) = \begin{cases} 1 & 0.25 \leq x \leq 0.75 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Plotten Sie das Ergebnis zum Zeitpunkt $T = 1$ für $h = 1/100$ und 2 verschiedene Wahlen von $\lambda = k/h$: $\lambda = 0.9$ und $\lambda = 1.1$.