Serie 2 (TM)

Diskussion des Blattes: Fr., 24.3.2023

1. In der VO haben wir das Minimum-Maximum-Prinzip kennengelernt.

a) Zeigen Sie folgendes "Maximum-Minimum-Prinzip" (mit der Notation $V_m^\perp$ aus der VO):

$$\lambda_m = \min_{v \in V_{m-1}^\perp} R(v) = \max_{z_1,\dots,z_{m-1} \in V} \min_{\substack{v \in V \\ a(v,z_i)=0,\ i=1,\dots,m-1}} R(v)$$

b) Zeigen Sie folgende Variation des Ergebnisses aus Teilaufg. a):

$$\lambda_m = \max_{z_1,\dots,z_{m-1} \in H} \min_{\substack{v \in V \\ (v,z_i)_H=0,\ i=1,\dots,m-1}} R(v)$$

2. Seien Ω_1, Ω_2 zwei beschränkte Gebiete mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Betrachten Sie das Eigenwertproblem: Finde $0 \neq u \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ s.d.

$$a(u,v) := \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} uv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2).$$

a) Geben Sie die Eigenfunktionen und Eigenwerte $\widetilde{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{N}$, mithilfe der Eigenfunktionen und Eigenwerte für Probleme, die auf Ω_1, Ω_2 gestellt sind, an.

b) Zeigen Sie

$$\widetilde{\lambda}_n = \max_{z_1,\dots,z_{n-1} \in L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)} \min_{\substack{v \in H_0^1(\Omega_1)\times H_0^1(\Omega_2) \\ (v,z_j)_{L^2}=0, j=1,\dots,n-1}} R(v), \qquad R(v) = \frac{a(v,v)}{\|v\|_{L^2}^2}.$$

3. (Kolmogorov n-width)

a) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB eines Hilbertraumes X und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ mit $\lambda_n \to \infty$. Betrachten Sie die Menge

$$B := \{u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \lambda_n \leq 1\}.$$

Zeigen Sie:

$$\inf_{\substack{E_n \subset X \\ \dim E_n = n}} \sup_{u \in B} \inf_{v \in E_n} \|u - v\|_X = \lambda_{n+1}^{-1/2} \qquad \forall n.$$

Hinweis: Die interessante Richtung ist "$\geq$". Analysieren Sie hierzu die analoge Abschätzung im Beweis des Minimax-Prinzips.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Polygon. Geben Sie die Konvergenzrate (Fehler gegen Anzahl Unbekannte) für die Approximation einer Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ (mit $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$) bei Approximation in $L^2(\Omega)$ an, wenn Sie mit stückweise konstanten Funktionen auf formregulären Gittern der Gitterweite h approximieren. Können Sie die Konvergenzrate durch geschickte Wahl der Approximationsräume E_n verbessern? Die einzige Information, die Sie über u haben, ist, daß $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$.