Serie 6 (TM)

Diskussion des Blattes: Fr., 5.5.2023

1. Betrachten Sie das ODE-System

$$(u', v)_{L^2} + a(u, v) = (f(t), v)_{L^2} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei a nur eine Gårding–Ungleichung erfüllt: $a(v, v) \geq \|v\|^2_{H^1(\Omega)} - C\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$. Zeigen Sie, daß mit der Substitution $u(t) = e^{\lambda t}\widetilde{u}(t)$ für geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch in diesem Fall eine Energieabschätzung wie in Satz 9.1 der VO erhalten kann. In Satz 2.1 nahm der Einfluß der Anfangsdaten mit wachsendem t ab. Ist das auch hier der Fall?

2. Betrachten Sie für (endlichdimensionales) V_h das ODE-System: $u_h \in C^1((0, T); V_h) \cap C^0([0, T]; V_h)$:

$$(u_u'(t), v)_{L^2} + a(u_h(t), v) = (f(t), v)_{L^2} \qquad \forall v \in V_h, \qquad u_h(0) = u_h^0 \in V_h. \tag{1}$$

Machen Sie folgende Zeitdiskretisierung: Sie machen *zwei* Schritte des impliziten Eulerverfahrens und dann $n-2$ Crank-Nicolson-Schritte (immer Schrittweite k). Zeigen Sie:

$$\|u_h(t_n) - u_h^n\|_{L^2} \leq Ck^2 t_n^{-2} \|u_h^0\|_{L^2}$$

Hinweis: Schreibt man R_0 und R_1 für die Stabilitätsfunktionen des Eulerverfahrens und des Crank-Nicolson-Verfahrens, so muß analog zu Lemma 2.23 der VO die Abschätzung $|F_n(z)| \leq Cn^{-2}$ gezeigt werden kann, wenn man setzt:

$$F_n(z) := (R_0(-z))^2 (R_1(-z))^{n-2} - e^{-nz}.$$

Gehen Sie wie folgt vor:

- $|R_0(-z))^2 (R_1(-z))^{n-2}| \leq Cn^{-2}$ für $z \geq z_0$ für geeignetes z_0. (überlegen Sie sich, wo das Maximum dieser Funktion für geg. $n \geq 2$ (groß) ist.)
- Setzen Sie $F_n(z) = R_0(-z)^2((R_1(-z))^{n-2} - e^{-(n-2)z}) + ((R_0(-z))^2 - e^{-2z})e^{-(n-2)z}$
- Schätzen Sie $((R_1(-z))^{n-2} - e^{-(n-2)z}) \leq Cn^{-2}$ für $z \leq z_0$ ab.
- Schätzen Sie $(R_0(-z))^2 - e^{-2z} \leq Cz^2$ für $z \leq z_0$ ab.

3. **(Kollokationsverfahren als spezielle RK-Verfahren)** Implizite s-stufige Runge-Kutta-Verfahren werden beschrieben durch Vektoren $\mathbf{c}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^s$ und eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ (kurz als "Butcher-Tableau" $\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^\top \end{array}$ geschrieben). Dabei ist die Rekursion $y^{n+1} = y^n + k\sum_{i=1}^s \mathbf{b}_i k_i$, wobei die k_i die Gleichungen

$$k_i = f(t + k\mathbf{c}_i, y^n + k\sum_{j=1}^s \mathbf{A}_{ij} k_j), \qquad i = 1, \ldots, s$$

erfüllen. In der vorliegenden Übung soll gezeigt werden, daß die große Klasse der Kollokationsverfahren, welche die Gauß-Verfahren, die Radau-Verfahren und die Lobatto-Verfahren enthält, implizite RK-Verfahren sind.

a) Überprüfen Sie, daß das implizite Eulerverfahren gegeben ist durch das Tableau $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$

b) Seien $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_s \in [0, 1]$ paarweise verschiedene Stützstellen. Wir definieren das *Kollokationsverfahren* wie folgt: Sei $u \in \mathcal{P}_s$ das Polynom vom Grad s, welches die Kollokationsbedingungen

$$\begin{aligned} u(t_0) &= y^0, \\ u'(t_0 + \mathbf{c}_i h) &= f(t_0 + \mathbf{c}_i h, u(t_0 + \mathbf{c}_i h)), \qquad i = 1, \ldots, s, \end{aligned}$$

erfüllt. Ein Schritt des Einschrittverfahrens ist dann gegeben durch

$$y^1 = u(t_0 + h).$$

Zeigen Sie, daß das Kollokationsverfahren ein (implizites) RK-Verfahren ist, wobei

$$\mathbf{A}_{ij} = \int_0^{c_i} l_j(t)\,dt, \qquad \mathbf{b}_j = \int_0^1 l_j(t)\,dt, \qquad l_j(t) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s} \frac{t-c_i}{c_j-c_i}$$

Hinweis: Schreiben Sie $u'(t) = \sum_{j=1}^{s} k_j l_j(t)$.

c) Zeigen Sie: Die Koeffizienten $\mathbf{A}_{ij}$ und $\mathbf{b}_i$ eines Kollokationsverfahrens erfüllen

$$\sum_{j=1}^{s} \mathbf{b}_j \mathbf{c}_j^{k-1} = \frac{1}{k}, \qquad k = 1,\ldots,s. \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{s} \mathbf{A}_{ij} \mathbf{c}_j^{k-1} = \frac{\mathbf{c}_i^k}{k}, \qquad i,k = 1,\ldots,s. \tag{3}$$