Serie 3 (TM)

Diskussion des Blattes: Fr., 31.3.2023

1. Betrachten Sie die Diskretisierung des Eigenwertproblems

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{1}$$

mittels der FEM basierend auf $S_0^{1,1}(\mathcal{T}_h)$ und einem formregulären Gitter $\mathcal{T}_h$. Es bezeichne h_{min} den kleinsten Elementdurchmesser.

a) Seien $\lambda_{h,1} \leq \lambda_{h,2} \leq \cdots \leq \lambda_{h,N}$ die (diskreten) Eigenwerte. Überlegen Sie sich, daß

$$\lambda_{h,1} = \min_{v \in V_h} \frac{a(v,v)}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}} \leq \max_{v \in V_h} \frac{a(v,v)}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}} = \lambda_{h,N}.$$

b) Zeigen Sie: es gibt Konstanten C_1, C_2, so daß $C_1 \leq \lambda_{h,1} \leq \lambda_{h,N} \leq C_2 h_{min}^{-2}$. Ist die Abschätzung $\lambda_{h,N} \leq C_2 h_{min}^{-2}$ scharf?

c) Betrachten Sie den Dirichlet-Laplace in 1D auf einem Intervall $(0,1)$ mit Eigenpaaren $(sin(n\pi x), n^2\pi^2)$. Betrachten Sie die FEM-Diskretisierung auf einem regelmäßigen Gitter der Schritteweite h. Die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{A}$ und die Massematrix $\mathbf{M}$ haben die Form

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = h\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: die diskreten Eigenwerte sind $\lambda_{h,n} = \frac{6}{h^2}\frac{1-\cos(n\pi h)}{2+\cos(n\pi h)}$. *Hinweis:* Betrachten Sie den Vektor $(\sin(n\pi jh))_j$.

Bemerkung: Die Formel und Taylor zeigt, daß man in der Tat nur für einen kleinen Teil des Spektrums gute Konvergenz erwarten kann.

2. Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine SPD Matrix mit Spektrum $\sigma(\mathbf{B})$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, $\lambda > 0$ beliebig. Zeigen Sie:

$$\frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_{\ell^2}}{\|\mathbf{x}\|_{\ell^2}} \geq \min_{\mu \in \sigma(\mathbf{B})} |\mu - \lambda|, \qquad \mathbf{r}(\mathbf{x}) := \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}$$

Bemerkung: Falls λ in der Nähe eines einfachen EW ist, dann ist die obige Abschätzung nicht scharf. Es ist dann $\min_\mu |\lambda - \mu| \leq C\|\mathbf{r}\|^2_{\ell^2}$.

3. Betrachten Sie das EWP

$$a(u,v) - \lambda(u,v)_H = 0 \qquad \forall v \in V$$

mit der Diskretisierung für $V_h \subset V$. Definieren Sie den Fehler $e := u - u_h$ und das Residuum

$$v \mapsto \mathrm{Res}(v) := a(u_h, v) - \lambda_h(u_h, v)_H$$

als lineares Funktional auf V und nehmen Sie die Normierungen $\|u_h\|_H = \|u_h\|_H = 1$ an.

a) Zeigen Sie: $a(e,e) = \lambda(e,e)_H + \lambda_h - \lambda$

b) Zeigen Sie: $a(e,e) = \frac{\lambda+\lambda_h}{2}(e,e)_H - \mathrm{Res}(e)$

c) **Betrachten Sie nun (1)**. Überlegen Sie sich, wie man mit den Techniken von Residualfehlerschätzern aus der VO "Numerik partieller Differentialgleichungen: stationäre Probleme" einen berechenbaren Ausdruck η definieren kann, so daß die folgende Abschätzung gilt:

$$\|\,\mathrm{Res}\,\|_{V'} \leq C\eta.$$

Damit folgt insbesondere $|\,\mathrm{Res}(e)| \leq C\eta\|e\|_V$.

Bemerkung: Da man mittels des Aubin-Nitsche-Tricks zeigen zeigen kann, daß für hinreichend kleine Maschenweiten h die Abschätzung $\|e\|_H \ll \|e\|_V$ gilt, hat man somit einen Fehlerschätzer der Form

$$\|e\|_V \leq C\eta$$

hergeleitet. Daraus ergibt sich dann auch relativ einfach ein Fehlerschätzer für den Eigenwert $|\lambda - \lambda_h|$ von der Form $|\lambda - \lambda_h| \leq C\eta^2$.