Serie 2 (CSE)

Diskussion des Blattes: Fr., 24.3.2023

1. Betrachten Sie die Eigenwertaufgabe

$$-u'' - \lambda c(x)u = 0 \quad \text{auf } (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{1}$$

a) Sei $c(x) \equiv 1$. Geben Sie die Eigenwerte λ_k von (1) an.

b) Für $c(x) \equiv 1$ werde die Eigenwertaufgabe (1) mithilfe einer Galerkindiskretisierung mit stückweise linearen Ansatzfunktionen auf uniformen Gittern der Gitterweite $h = 2^{-n}$, $n = 1, \ldots, n_{max}$ mit $n_{max} = 10$ näherungsweise gelöst. Stellen Sie das zugehörige Matrixeigenwertproblem der Form $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{Mu}$ auf. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die Konvergenzeigenschaften untersucht. Das EWP $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{Mu}$ kann in MATLAB (oder Python oder NgSolve) mittels `eig` gelöst werden. Es sollen 3 Plots erzeugt werden:

- Konvergenz (relativer Fehler gegen Schrittweite h, doppelt logarithmisch) für die 5 kleinsten Eigenwerte.
- Für $h = 2^{-n_{max}}$ tragen Sie die Eigenwerte und die numerischen Approximationen über der Nummer auf, d.h. die Paare (i, λ_i) und $(i, \lambda_{h,i})$ für $i = 1, \ldots, 2^{n_{max}} - 1$.
- Für $h = 2^{-n_{max}}$ die Paare $(i, (\lambda_{h,i} - \lambda_i)/\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, 2^{n_{max}} - 1$ semilogarithmisch.

c) Sei nun $c(x) = 1 + x(1-x)$. Modifizieren Sie Ihr Programm so, daß es auch diesen Fall bearbeiten kann[1]. Die exakten Eigenwerte λ_i sind dann nicht bekannt. Überlegen Sie sich anhand der Aussage, daß

$$\lambda_i = \lambda_{h,i} + ch^2 + O(h^3),$$

wie Sie einen "exakten" Wert aus den letzten beiden Approximationen (d.h. zu den Schrittweiten $h_{min} = 2^{-n_{max}}$ und $2h_{min}$) extrapolieren können. Machen Sie eine Konvergenzstudie wie in Teilaufgabe b) für den kleinsten Eigenwert λ_1, indem Sie Ihren extrapolierten Wert als exakten Wert annehmen.

2. In der VO haben wir das Minimum-Maximum-Prinzip kennengelernt.

a) Zeigen Sie folgendes "Maximum-Minimum-Prinzip" (mit der Notation $V_m^\perp$ aus der VO):

$$\lambda_m = \min_{v \in V_{m-1}^\perp} R(v) = \max_{z_1,\ldots,z_{m-1} \in V} \min_{\substack{v \in V \\ a(v,z_i)=0,\ i=1,\ldots,m-1}} R(v)$$

b) Zeigen Sie folgende Variation des Ergebnisses aus Teilaufg. a):

$$\lambda_m = \max_{z_1,\ldots,z_{m-1} \in H} \min_{\substack{v \in V \\ (v,z_i)_H=0,\ i=1,\ldots,m-1}} R(v)$$

3. Seien Ω_1, Ω_2 zwei beschränkte Gebiete mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Betrachten Sie das Eigenwertproblem: Finde $0 \neq u \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ s.d.

$$a(u,v) := \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} uv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega_1) \times H_0^1(\Omega_2).$$

a) Geben Sie die Eigenfunktionen und Eigenwerte $\widetilde{\lambda}_n$, $n \in \mathbb{N}$, mithilfe der Eigenfunktionen und Eigenwerte für Probleme, die auf Ω_1, Ω_2 gestellt sind, an.

b) Zeigen Sie

$$\widetilde{\lambda}_n = \max_{z_1,\ldots,z_{n-1} \in L^2(\Omega_1)\times L^2(\Omega_2)} \min_{\substack{v \in H_0^1(\Omega_1)\times H_0^1(\Omega_2) \\ (v,z_j)_{L^2}=0, j=1,\ldots,n-1}} R(v), \qquad R(v) = \frac{a(v,v)}{\|v\|_{L^2}^2}.$$

[1] oder berechnen Sie gleich in Teilaufg. b) die Matrix $\mathbf{M}$ mittels eine Gaußquadratur mit 3 Punkten—die Routine `gauleg.m` finden Sie auf der homepage. In Python stellt `polynomial.legendre.leggauss(n)` die Punkte und Gewichte für die Gaußquadratur bereit