TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

BACHELORARBEIT

Abklingverhalten der 3D Wellengleichung bei Streuung an einem Körper

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Anton Arnold

durch

Paula Hilbert
Matrikelnummer: 01549394
Schillerpromenade 7/23
1230 Wien

Wien, am Datum

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 7. Januar 2022

Paula Hilbert

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Wellengleichung beschreibt eine Vielzahl an physikalischen Phänomenen, zum Beispiel eine schwingende Saite in 1D, eine vibrierende Membran in 2D und die Ausbreitung von Schall in 3D. In dieser Arbeit wollen wir uns mit dem Abklingverhalten der 3D Wellengleichung im Außenraum beschäftigen. Die 3D Wellengleichung im Außenraum ist durch

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R} \tag{1.1}$$

mit $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{B}$ gegeben, wobei $\mathcal{B}$ ein beschränkter Körper ist. Entsteht eine Welle durch eine initiale Störung und erreicht den Körper $\mathcal{B}$, so wird die Welle wiederholt reflektiert. Positioniert man einen Beobachter an einer beliebigen Stelle, dann passiert die Welle diesen einige Male. Man würde nun annehmen, dass die Stärke der Welle, die der Beobachter wahrnimmt, im Laufe der Zeit nachlässt. Ebenso erwartet man, dass die lokale Energie abnimmt. Ob diese Überlegungen tatsächlich stimmen, hängt stark von der Geometrie des Körpers $\mathcal{B}$ ab.

Ziel dieser Arbeit ist es, unter gewissen Voraussetzungen Abklingfunktionen für die Lösung der Wellengleichung (1.1) und ihre lokale Energie zu bestimmen. Für sternförmige Körper zeigen wir angelehnt an [Mor61], dass die Welle selbst mindestens wie $t^{-\frac{1}{2}}$ abklingt. Diese Aussage bildet das erste Hauptresultat der Arbeit. Basierend auf [Mor66] beweisen wir für beliebige Körper $\mathcal{B}$, dass die lokale Energie der Welle schon dann exponentiell abklingt, wenn sie nur arbiträr abklingt. Eine weitere essentielle Annahme für beide Resultate ist die Kompaktheit der Träger der Anfangsdaten.

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit werden einzelne Resultate der umfangreichen Theorie von partiellen Differentialgleichungen angeführt. Dabei spielen Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eine wichtige Rolle. Außerdem wird der Begriff der lokalen Energie formell eingeführt. Anschließend wird das algebraische Abklingverhalten der Welle bewiesen. Dabei wurde während des Verfassens dieser Arbeit entdeckt, dass der in [Mor61] angeführte Beweis einen Fehler enthält. Große Teile des zweiten Kapitels beruhen weiterhin auf [Mor61], dennoch wurde das Ausbessern dieses Fehlers ein zentrales Augenmerk dieser Arbeit. Im letzten Abschnitt wird zunächst die Existenz einer bestimmten Zerlegung von Lösungen gezeigt. Der erste Teil dieser Zerlegung verschwindet nach einer gewissen Zeit auf jedem Teilgebiet von Ω und der zweite Teil hat geringere Energie als die ursprüngliche Lösung. Dieser Prozess kann iteriert werden, woraus sich die gewünschte exponentielle Abklingrate der lokalen Energie ergibt.

2 Grundlagen

Ziel dieses Kapitels ist es Definitionen und Resultate, die im weiteren Verlauf der Arbeit Verwendung finden, vorzustellen. Als Erstes werden einige Resultate für Sobolevräume wiederholt. Dabei beziehen wir uns auf [Jüb, Kapitel 5.2]. Wie in [Jüb, Kapitel 7.2/7.3] wollen wir uns danach mit der Existenz, Eindeutigkeit und Regularität von Lösungen allgemeiner Wellengleichungen beschäftigen. Angelehnt an [Jüb, Kapitel 7.1] und [SG, Kapitel 5.6] besprechen wir anschließend das Huygens-Prinzip. Basierend auf [Mor66] und [Ika00, Kapitel 4.1] wird der Begriff der lokalen Energie eingeführt. Orientiert an [Jüb, Kapitel 7.1] wird in Abschnitt 2.6 die Fundamentallösung der Poisson-Gleichung untersucht.

2.1 Notation

Symbol	**Bedeutung**
$C^k(\Omega)$	k-mal stetig differenzierbare Funktionen auf Ω
$C_0^\infty(\Omega)$	unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompakten Träger in Ω
$\lvert . \rvert$	euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$
$U_r((x,y,z))$	offene Kugel im $\mathbb{R}^3$ um den Punkt (x,y,z) mit Radius r
$\operatorname{supp} f$	Träger der Funktion f

2.2 Sobolevräume

Definition 2.2.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Auf $C^\infty(\overline{\Omega})$ ist mit

$$(u,v)_{H^k} := \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha u D^\alpha v \, dx$$

ein Skalarprodukt definiert. Sei $X := \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{H^k(\Omega)} < \infty\}$, dann definieren wir die Sobolevräume $H^k(\Omega)$ bzw. $H_0^k(\Omega)$ als

$$H^k(\Omega) := \overline{X}, \quad \text{bzw. } H_0^k(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)},$$

wobei die Abschlüsse bezüglich der Norm $\|.\|_{H^k(\Omega)}$ gebildet werden.

Sei im weiteren Verlauf dieses Abschnitts $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ als offen und beschränkt vorausgesetzt, sowie $\partial\Omega \in C^1$.

Satz 2.2.2 (Spur von Sobolevfunktionen)**.** *Es existiert ein beschränkter linearer Operator $\mathcal{T} : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, der*

$$\mathcal{T}(u) = u \mid_{\partial\Omega} \quad \textit{für alle } u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

erfüllt. Wir nennen diesen Operator die Spur. Ferner gilt

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{T}(u) = 0 \text{ und } u \in H^1(\Omega).$$

Ein wichtiger Satz in der Theorie partieller Differentialgleichungen ist der Satz von Gauß:

Satz 2.2.3 (Satz von Gauß). *Seien ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ und $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, dann gilt*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot v \, ds.$$

Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ folgt zudem

$$\int_\Omega u \operatorname{div} F \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot F \, dx + \int_{\partial\Omega} u(F \cdot v) \, ds.$$

Auch für Sobolevfunktionen gibt es eine Version dieses Satzes.

Satz 2.2.4 (Gauß für Sobolevfunktionen). *Seien $u_1, \ldots, u_n, w \in H^1(\Omega)$ und $u := (u_1, \ldots, u_n)^T$. Dann gilt*

$$\int_\Omega (\operatorname{div} u) w \, dx = -\int_\Omega u \cdot \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega} (\mathcal{T}(u) \cdot \nu)\mathcal{T}(w) \, ds,$$

wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ ist. Wenn die Interpretation des Randintegrals klar ersichtlich ist, werden wir für eine bessere Lesbarkeit auf den Spuroperator verzichten.

Satz 2.2.5 (Poincaré-Ungleichung). *Es existiert eine Konstante $C_p > 0$, sodass für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt:*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

2.3 Allgemeine Wellengleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Wellengleichungen der Form

$$\begin{aligned} u_{tt} - \operatorname{div}(A(x)\nabla u) + c(x)u = 0 \quad & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}, \\ u = 0 \quad & \text{auf } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ u(.,0) = u_0, u_t(.,0) = u_1 \quad & \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dabei ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$ und $A(x) = (a_{ij}(x))$ eine $n \times n$ Matrix. Wir wollen zudem $a_{ij}, c \in C^\infty(\bar{\Omega}), c \geq 0$ in Ω und $u_0, u_1 \in L^2(\Omega)$ voraussetzen. Weiteres nehmen wir den Operator $L(u) := -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + c(x)u$ als elliptisch und symmetrisch an.

Definition 2.3.1. Der Operator L heißt elliptisch, falls eine Konstante $\alpha > 0$ existiert, sodass

$$\xi^T A(x)\xi \geq \alpha|\xi|^2$$

für alle $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt. Wir nennen L symmetrisch, falls die Matrix $A(x)$ symmetrisch ist.

Bevor wir über Lösungen dieses Anfangsrandwertproblems reden können, müssen wir entsprechende Räume definieren, in welchen diese Lösungen liegen werden.

Definition 2.3.2. Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und u eine Funktion auf $\Omega \times I$. Für $k, l \in \mathbb{N}$ definieren wir $C^l(I; H^k(\Omega))$ als den Raum aller Funktionen für die

$$\lim_{h\to 0} \|u^{(j)}(.,t+h) - u^{(j)}(.,t)\|_{H^k(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } t \in I,\ j = 0,\dots,l$$

gilt.

Definition 2.3.3. Seien H ein Hilbertraum, $T > 0$ und $1 \leq p \leq \infty$. Der Raum $L^p(0,T;H)$ besteht aus allen messbaren Funktionen $u : (0,T) \to H$ mit der Eigenschaft

$$\|u\|_{L^p(0,T;H)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_H^p \, dt\right)^{1/p} < \infty \text{ für } 1 \leq p < \infty \quad \text{bzw.,}$$
$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H)} = \operatorname{ess}\sup_{0<t<T} \|u(t)\|_H < \infty$$

Mit den eben getroffenen Voraussetzungen wollen wir im Folgenden Existenz, Regularität und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangsrandwertproblems (2.1) analysieren.

Lemma 2.3.4. *Definiert man den Operator L auf dem Hilbertraum $H_0^1(\Omega)$, dann besitzt dieser eine Folge positiver Eigenwerte $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Die zugehörigen normierten Eigenfunktionen $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ergeben eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega)$.*

Mit Hilfe dieser Orthonormalbasis kann eine Lösung der Gleichung $u_{tt} + L(u) = 0$ gefunden werden.

Satz 2.3.5. *Es existiert eine lokal integrierbare distributionelle Lösung von*

$$u_{tt} + L(u) = 0 \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}, \quad u(.,0) = u_0,\ u_t(.,0) = u_1 \quad \text{in } \Omega.$$

Die Lösung ist durch

$$u(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\sqrt{\lambda_k}t)(u_0, v_k)_{L^2} v_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}}(u_1, v_k)_{L^2} v_k(x) \tag{2.2}$$

gegeben, wobei $u \in C(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$.

Es stellt sich die Frage, ob man die Regularität von u verbessern kann. Tatsächlich ist dies der Fall, wenn die Anfangswerte strengere Voraussetzungen erfüllen.

Satz 2.3.6. *Seien $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ und $u_1 \in L^2(\Omega)$. Ist u durch (2.2) gegeben, dann löst u das Anfangsrandwertproblem (2.1) in dem Sinne, dass $u \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und u schwache Lösung der Differentialgleichung ist.*

Mit Hilfe von [Eva10, Kapitel 7.2, Theorem 5] und [Jüb, Satz 7.7] erhalten wir eine noch bessere Regularitätsaussage, welche im nächsten Kapitel zentral sein wird.

Satz 2.3.7. *Seien ferner $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ und $u_1 \in H_0^1(\Omega)$. Für die Lösung u von (2.1) gilt $u \in C^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ und $u_t \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ für alle $T > 0$. Die Differentialgleichung ist insbesondere punktweise erfüllt.*

Zuletzt kann auch eine Eindeutigkeitsaussage formuliert werden.

Proposition 2.3.8. *Seien $u, v \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ Lösungen von (2.1), dann gilt $u = v$ in $\Omega \times \mathbb{R}$.*

Mit dieser Proposition ist die allgemeine Analyse des Problems (2.1) abgeschlossen. Das folgende Lemma liefert uns noch eine Abschätzung, die in Kapitel 3 mehrmals Verwendung findet.

Lemma 2.3.9. *Seien $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ und $u_1 \in L^2(\Omega)$. Dann gilt für die eindeutige C^1-Lösung u von (2.1)*

$$\|u_t(.,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla u(.,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^t \left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)$$

für alle $t \geq 0$.

Beweis. Wir definieren die Partialsummen von $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) v_k$ als

$$U_n(t) := \sum_{k=1}^{n} u_k(t) v_k, \quad \text{mit } u_k(t) := \cos(\sqrt{\lambda_k} t)(u_0, v_k)_{L^2} + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k} t)}{\lambda_k}(u_1, v_k)_{L^2}.$$

Es sei durch

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\nabla u^T A(x) \nabla v + c(x) uv \right) \, dx$$

ein Skalarprodukt auf $H^1(\Omega)$ definiert. Die Orthonormalbasis $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist auch orthogonal bezüglich diesem Skalarprodukt, da

$$a(v_j, v_k) = (Lv_j, v_k)_{L^2} = \lambda_j (v_j, v_k)_{L^2} = \lambda_j \delta_{jk}.$$

Wir können $a(U_n(0), U_n(0))$ abschätzen:

$$\begin{aligned} a(U_n(0), U_n(0)) &= \sum_{j,k=1}^{n} u_j(0) u_k(0) \, a(v_j, v_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k(0)^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(0)^2 \\ &= a(u(0), u(0)) = a(u_0, u_0) \leq C\|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ergibt sich, da $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$. In [Jüb, Satz 7.5] wurde gezeigt, dass U_n die Gleichung $U_{n,tt} + L(U_n) = 0$ löst. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $U_{n,t}$ und integrieren danach über Ω, so ergibt sich

$$\int_\Omega (U_{n,tt}U_{n,t})\ dx + \int_\Omega (-\operatorname{div}(A(x)\nabla U_n)U_{n,t} + c(x)U_nU_{n,t})\ dx \overset{\text{Gauß}}{=} \int_\Omega (U_{n,tt}U_{n,t})\ dx + \int_\Omega \left(\nabla U_{n,t}^T A(x)\nabla U_n + c(x)U_nU_{n,t}\right)\ dx = 0.$$

Zudem gelten folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(U_{n,t}^2) &= U_{n,tt}U_{n,t}, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(U_n^2) &= U_nU_{n,t}, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\nabla U_n^T A(x)\nabla U_n &= \nabla U_{n,t}^T A(x)\nabla U_n, \end{aligned}$$

womit

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(U_{n,t}^2 + \nabla U_n^T A(x)\nabla U_n + c(x)U_n^2\right)\ dx = 0$$

folgt. Sei $G(t) := \int_\Omega \left(U_{n,t}^2 + \nabla U_n^T A(x)\nabla U_n + c(x)U_n^2\right)\ dx$, dann gilt $0 \le G(t)$ für $t \ge 0$ und daher $dG/dt = 0 \le G$. Das Lemma von Gronwall liefert die Abschätzung

$$\int_\Omega \left(U_{n,t}^2 + \nabla U_n^T A(x)\nabla U_n + c(x)U_n^2\right)\ dx \le e^t G(0) \quad \text{für } t \ge 0.$$

Wir wollen $G(0)$ genauer untersuchen und erhalten

$$G(0) = \|U_{n,t}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(U_n(0), U_n(0)) \le \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Damit ergibt sich

$$\|U_{n,t}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha\|\nabla U_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le G(t) \le e^t\left(\|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2\right),$$

wobei α die Konstante aus Definition 2.3.1 ist. Da die rechte Seite unabhängig von n ist, gilt die Ungleichung auch für den Grenzübergang $n \to \infty$. Wir erhalten somit die gewünschte Aussage. □

Alle Aussagen in diesem Abschnitt gelten auch, wenn wir das Problem (2.1) auf der Menge $\Omega \times (0, T)$ betrachten. In diesem Fall gelten die Aussagen natürlich nur auf dem Intervall $(0, T)$ anstatt auf ganz $\mathbb{R}$.

2.4 Huygens-Prinzip

Wir wollen die homogene Wellengleichung auf dem gesamten Raum genauer betrachten. Sie ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2\Delta u = 0 \quad &\text{in } \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \\ u(.,0) = u_0, u_t(.,0) = u_1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Definition 2.4.1. Sei u eine Lösung von (2.3). Das Huygens-Prinzip ist erfüllt, wenn $u(x_0, t)$ nur von den Werten der Anfangsdaten auf der Sphäre $|x - x_0| = ct$ abhängt.

Im Falle $n = 3$ erhält man die Kirchhoffsche Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-\xi|=ct} u_1(\xi)\, d\xi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-\xi|=ct} u_0(\xi)\, d\xi \right)$$

für die Lösung des Anfangswertproblems. Aus dieser Formel erkennt man direkt, dass das Huygens-Prinzip im dreidimensionalen Raum gilt. Man kann außerdem zeigen, dass es für jede ungerade Dimension erfüllt ist. Die physikalischen Interpretation des Prinzips besagt, dass von jedem Punkt einer Wellenfront eine Elementarwelle ausgesendet wird. Diese Elementarwellen überlagern sich und ergeben die neue Wellenfront.

Bemerkung 2.4.2. Wir wollen eine äquivalente Formulierung zur Definition 2.4.1 angeben. Betrachtet man die Anfangsdaten an einem beliebigen Punkt $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^3 \times \{0\}$, dann beeinflusst dieser Punkt die Lösung u an allen Punkten

$$\{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \mid |x - x_0| = ct\}.$$

Der Einflussbereich der Anfangsdaten an einem beliebigen Punkt x_0 zum einem festen Zeitpunkt t ist also durch die Sphäre $|x - x_0| = ct$ gegeben.

Bemerkung 2.4.3. Falls $\operatorname{supp} u_0, \operatorname{supp} u_1 \subseteq U_\rho((0,0,0))$ und $n = 3$ hat die Lösung u wegen des Huygens-Prinzips besondere Eigenschaften. Es gilt nämlich

$$u \equiv 0 \text{ für } |x_0| \leq ct - \rho.$$

Diese Tatsache ergibt sich, da aus $x \in \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y - x_0| = ct\}$ direkt $|x| \geq \rho$ folgt. Damit verschwinden die Anfangsdaten auf dem Abhängigkeitsbereich von $u(x_0, t)$. Die behauptete Ungleichung folgt aus

$$|x| = |x - x_0 + x_0| \geq |x - x_0| - |x_0| \geq ct - (ct - \rho) = \rho.$$

Bemerkung 2.4.4. Das Huygens-Prinzip gilt nicht im zweidimensionalen Raum. Hier erhalten wir folgende Darstellung der Lösung:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|x-\xi|\leq tc} \frac{u_1(\xi)}{\sqrt{(ct)^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi + \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{|x-\xi|\leq ct} \frac{u_0(\xi)}{\sqrt{(ct)^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi \right).$$

In diesem Fall hängt $u(x_0, t)$ von den Werten der Anfangsdaten in dem Kreis $|x - x_0| \leq ct$ ab.

Für das Problem (2.3) breiten sich Störungen der Anfangsdaten mit einer Geschwindigkeit der Größe c aus.

2.5 Lokale Energie

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ eine abgeschlossene und beschränkte Menge, sodass $\Omega := \mathbb{R}^3 \backslash A$ zusammenhängend und $\partial\Omega \in C^2$ ist. Wir wollen folgendes Anfangsrandwertproblem betrachten:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u = 0 \quad & \text{in } \Omega \times [0, \infty), \\ \Lambda u = 0 \quad & \text{auf } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(.,0) = u_0, u_t(.,0) = u_1 \quad & \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Hierbei bezeichnet Λ einen Differentialoperator erster Ordnung, der Energie in einem gewissen Sinn erhalten soll. Wir wollen zunächst die lokale Energie einer Lösung des Problems (2.4) definieren.

Definition 2.5.1. Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge und u eine Lösung von (2.4). Dann definieren wir die lokale Energie auf D zum Zeitpunkt t als das Integral

$$E(u, D, t) := \int_{\Omega \cap D} Q_1(u)\, dx + \int_{A \cap D} Q_2(u)\, dx.$$

Mit $Q_1(u)$ und $Q_2(u)$ werden positiv definite quadratische Formen von u und seinen ersten Ableitungen notiert. Die Energie auf Ω wird mit $E(u, \infty, t)$ bezeichnet und ist durch $\int_\Omega Q_1(u)\, dx$ gegeben. Sie soll zudem die Ungleichung

$$E(u + v, \infty, t) \leq 2(E(u, \infty, t) + E(v, \infty, t))$$

erfüllen.

Wir definieren den Begriff quadratische Form wie in [Jon50, Kapitel 1.1]:

Definition 2.5.2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Eine quadratische Form Q in n Variablen ist gegeben durch

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

wobei $x := (x_1, \dots, x_n)^T$. Sie heißt positiv definit, falls $Q(v) > 0$ für alle $v \in V \backslash \{0\}$.

Ist F eine Lösung von (2.4) in $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, so notieren wir die Energie auf dem gesamten Raum durch $\tilde{E}(F, \infty, t)$. Wir wollen nun erörtern, was es bedeutet, dass Λ Energie erhält.

Definition 2.5.3. Sei u eine Lösung von (2.4). Der Operator Λ erhält Energie, wenn

$$E(u, \infty, t) = E(u, \infty, 0)$$

für alle $t \geq 0$ gilt. Im Folgenden setzen wir diese Eigenschaft immer voraus.

Der Fall $\Lambda u = u$ kommt häufig vor und hat daher eine besondere Rolle. Zunächst möchten wir besprechen, wie sich das Problem (2.4) in diesem Fall verhält.

Bemerkung 2.5.4. Falls $\Lambda u = u$, dann ähnelt das Problem (2.4) dem Anfangsrandwertproblem aus Kapitel 2.1 für $A(x) = I$ und $c(x) = 0$. Sie unterscheiden sich nur dadurch, dass Ω in der einen Situation beschränkt ist und in der anderen nicht. Besitzen die Anfangsdaten kompakte Träger, so hängen diese Probleme zusammen. Sei dazu $\rho > 0$ so gewählt, dass $\operatorname{supp} u_0, \operatorname{supp} u_1, A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < \rho\}$. Weil die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Lösung u von (2.4) genau 1 ist, kann sich die Lösung zu einem beliebigen Zeitpunkt $T > 0$ noch nicht im ganzen Raum ausgebreitet haben. Es gilt sogar $u \equiv 0$ für $r \geq T + \rho$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Definieren wir $\Omega_k := \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < k\}$ für $k > 0$. Dann gilt $u = 0$ auf $\partial\Omega_{p+T} \times (0, T)$, und $\Omega_{\rho+T}$ ist ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega_{\rho+T} \in C^2$. Insbesondere ist u somit auch eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega_{\rho+T} \times (0, T), \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_{\rho+T} \times (0, T), \\ u(.,0) = u_0, u_t(.,0) &= u_1 && \text{in } \Omega_{\rho+T}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Lemma 2.5.5. *Seien $\Lambda u = u$ und die Träger der Anfangsdaten u_0, u_1 kompakt. Für Lösungen*

$$u \in C^0([0, \infty); H^2(\Omega)) \ \cap \ C^1([0, \infty); H_0^1(\Omega)) \ \cap \ C^2([0, \infty); L^2(\Omega))$$

von (2.4) beschreibt

$$E(u, D, t) := \int_{\Omega \cap D} \left(|\nabla u|^2 + u_t^2 \right) \, dx.$$

eine lokale Energie. Insbesondere folgt $E(u, \infty, t) = E(u, \infty, 0)$ für $t \geq 0$.

Beweis. Wir müssen zwei Eigenschaften überprüfen: Einerseits die Ungleichung $E(u + v, \infty, t) \leq 2(E(u, \infty, t) + E(v, \infty, t))$ und andererseits die Energieerhaltung in Ω. Die erste Eigenschaft folgt direkt mit der Young-Ungleichung

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \cap D} \left(|\nabla u + \nabla v|^2 + (u_t + v_t)^2 \right) \, dx \leq \int_{\Omega \cap D} \left((|\nabla u| + |\nabla v|)^2 + (u_t + v_t)^2 \right) \, dx \\ &= \int_{\Omega \cap D} \left(|\nabla u|^2 + 2|\nabla u||\nabla v| + |\nabla v|^2 + u_t^2 + 2u_t v_t + v_t^2 \right) \, dx \\ &\overset{\text{Young}}{\leq} 2 \left(\int_{\Omega \cap D} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + u_t^2 + v_t^2 \right) \, dx \right) = 2(E(u, \infty, t) + E(v, \infty, t)). \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass die Wahl von Q_1, Q_2 und Λ geeignet ist, müssen wir noch die Erhaltung der Energie nachweisen. Wir wollen also

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 + u_t^2 \right) \, dx = \text{const.}$$

zeigen. Sei $T \geq 0$. Unser Ziel ist es die Energie abzuleiten. Die Funktion u ist nun auch eine

Lösung von (2.5). Wegen der angenommen Regularität von u erhalten wir für $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\rho+T}} u_t^2\,dx = \int_{\Omega_{\rho+T}} u_{tt}u_t\,dx = \int_{\Omega_{\rho+T}} \Delta u u_t\,dx \\ \overset{\text{Gauß}}{=} -&\int_{\Omega_{\rho+T}} \nabla u\cdot\nabla u_t\,dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega_{\rho+T}} u_t(\nabla u\cdot\nu)\,dS}_{=0} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\rho+T}} |\nabla u|^2\,dx. \end{aligned}$$

Das Randintegral verschwindet, weil $u=0$ auf $\partial\Omega_{\rho+T}$ auch $u_t=0$ auf $\partial\Omega_{\rho+T}$ impliziert. Daraus ergibt sich für $t\in(0,T)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left(u_t^2+|\nabla u|^2\right)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_{\rho+T}}\left(u_t^2+|\nabla u|^2\right)dx = 0.$$

Weil $T\geq 0$ beliebig war, ist die Energie in Ω konstant. □

2.6 Poisson-Gleichung

In diesem Abschnitts besprechen wir eine wichtige Eigenschaft der Fundamentallösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

Die Fundamentallösung mit Pol in ξ ist dabei eine distributionelle Lösung von $\Delta u = \delta_\xi$.

Satz 2.6.1. *Seien $(\xi,\eta,\zeta)^T\in\mathbb{R}^3$. Dann ist die lokal integrierbare Funktion*

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

eine Fundamentallösung des Laplace-Operators mit Pol in $(\xi,\eta,\zeta)^T$.

Korollar 2.6.2. *Sei $w\in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $(\xi,\eta,\zeta)^T\in\mathbb{R}^3$. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial U_\varepsilon((\xi,\eta,\zeta)^T)}(U\nabla w\cdot\nu - w\nabla U\cdot\nu)\,ds = w(\xi,\eta,\zeta),$$

wobei ν die negative äußere Normale von $U_\varepsilon\left((\xi,\eta,\zeta)^T\right)$ ist.

Beweis. Die Aussage in Korollar 2.6.2 folgt direkt aus dem Beweis von Satz 2.6.1. Da wir im weiteren Verlauf konkret diese Aussage benötigen, beweisen wir an dieser Stelle nur Korollar 2.6.2.

Man bemerke, dass U auf der Menge $\partial U_\varepsilon\big((\xi,\eta,\zeta)^T\big)$ konstant ist und den Wert $-1/(4\pi\varepsilon)$ annimmt. Wir betrachten zunächst das Integral

$$\int_{\partial U_\varepsilon((\xi,\eta,\zeta)^T)}(U\nabla w\cdot\nu)\,ds.$$

Es ergibt sich direkt die Abschätzung

$$\left| \int_{\partial U_\varepsilon((\xi,\eta,\zeta)^T)} (U \nabla w \cdot \nu) \; ds \right| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} \operatorname{meas}(\partial U_\varepsilon \left((\xi,\eta,\zeta)^T\right)) \max_{x \in K_\varepsilon((\xi,\eta,\zeta)^T)} |\nabla w(x)|.$$

Der Ausdruck $\operatorname{meas}(\partial U_\varepsilon \left((\xi,\eta,\zeta)^T\right)) = \varepsilon^2 4\pi$ beschreibt das Maß der Sphäre um $(\xi,\eta,\zeta)^T$ mit Radius ε. Weil ∇w stetig ist, gilt $\max_{x \in K_\varepsilon((\xi,\eta,\zeta)^T)} |\nabla w(x)| \leq C$ für alle $\varepsilon \leq 1$. In Summe folgt

$$\left| \int_{\partial U_\varepsilon((\xi,\eta,\zeta)^T)} (U \nabla w \cdot \nu) \; ds \right| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 C = C\varepsilon.$$

Dieses Integral konvergiert also gegen Null für $\varepsilon \to 0$. Wir wollen nun $-\nabla U \cdot \nu$ berechnen. Es gilt

$$-\nu = \begin{pmatrix} x-\xi \\ y-\eta \\ z-\zeta \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}.$$

Für $(x,y,z) \neq (\xi,\eta,\zeta)$ können wir die partiellen Ableitungen von U berechnen

$$\nabla U = \frac{1}{4\pi((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x-\xi \\ y-\eta \\ z-\zeta \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$-\nabla U \cdot \nu = \frac{1}{4\pi((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \quad \text{für } (x,y,z)^T \in \partial U_\varepsilon \left((\xi,\eta,\zeta)^T\right).$$

Wir können nun das zweite Integral mithilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung berechnen. Der Mittelwertsatz garantiert uns die Existenz eines Punktes $(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon)^T \in \partial U_\varepsilon \left((\xi,\eta,\zeta)^T\right)$, sodass

$$\begin{aligned} &\int_{\partial U_\varepsilon((\xi,\eta,\zeta)^T)} (-w \nabla U \cdot \nu) \; ds = w(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) \int_{\partial U_\varepsilon((\xi,\eta,\zeta)^T)} (-\nabla U \cdot \nu) \; ds \\ &= w(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) \operatorname{meas}(\partial U_\varepsilon \left((\xi,\eta,\zeta)^T\right)) \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} = w(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon). \end{aligned}$$

Fassen wir alle diese Tatsachen zusammen, so folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial U_\varepsilon((\xi,\eta,\zeta)^T)} (U \nabla w \cdot \nu - w \nabla U \cdot \nu) \, ds = \lim_{\varepsilon \to 0} w(x_\varepsilon, y_\varepsilon, z_\varepsilon) = w(\xi,\eta,\zeta).$$

Wir haben also Korollar 2.6.2 bewiesen. □

3 Das Abklingen von Wellen außerhalb eines reflektierenden Körpers

In diesem Kapitel betrachten wir die Differentialgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = 0 \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R} \tag{3.1}$$

mit $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{B}$ abgeschlossen und beschränkt ist. Wir wollen Ω als zusammenhängend und $\partial\mathcal{B} \in C^2$ annehmen. Es gilt

$$u = 0 \text{ auf } \partial\mathcal{B} \times \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Außerdem erfüllt u die Cauchydaten

$$\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= f(x, y, z), \\ u_t(x, y, z, 0) &= g(x, y, z), \end{aligned} \tag{3.3}$$

wobei $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Zudem haben die Funktionen f, g kompakte Träger in Ω. Bezeichne $\rho > 0$ den kleinsten Radius, sodass $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g, \mathcal{B} \subseteq U_\rho((0, 0, 0))$.

Das eben beschriebene Anfangsrandwertproblem modelliert unter anderem die folgende Situation: Im dreidimensionalen Raum befindet sich ein reflektierender Körpers $\mathcal{B}$. Sobald die anfängliche Störung diesen erreicht, wird die Welle reflektiert. Betrachtet man einen festen Punkt außerhalb des Körpers, dann würde man annehmen, dass die Welle an diesem Punkt im Laufe der Zeit immer weiter abnimmt. Ob und wie schnell die Welle abnimmt, hängt von der Form des Körpers $\mathcal{B}$ ab. In dieser Arbeit beweisen wir das Abklingen der Welle für sternförmige Körper:

Satz 3.0.1. *Sei u eine klassische Lösung von (3.1), (3.2) und (3.3), und sei $\mathcal{B}$ sternförmig. Dann gilt für jeden festen Punkt $(X, Y, Z) \in \Omega$*

$$|u(X, Y, Z, t)| \leq K t^{-\frac{1}{2}},$$

wobei K von (X, Y, Z), f, g und ρ abhängt.

Der Beweis dieses Satzes basiert auf [Mor61]. In [Mor61] wurde jedoch ein Fehler in dem Beweis gemacht. In dieser Arbeit wird ein neuer Ansatz gefunden, um Satz 3.0.1 dennoch zu beweisen. Die vorbereitenden Lemmata orientieren sich daher einerseits an [Mor61], andererseits wurden auch Resultate aus [Ika00, Kapitel 4] herangezogen.

Wir definieren sternförmige Körper wie in [Ika00, Beispiel 4.5].

Definition 3.0.2. Eine Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist sternförmig, falls ein Punkt $(b_1, b_2, b_3) \in \mathcal{B}$ existiert, sodass

$$\begin{pmatrix} x - b_1 \\ y - b_2 \\ z - b_3 \end{pmatrix} \cdot \nu \geq 0$$

für alle $(x, y, z) \in \partial\mathcal{B}$ gilt. Dabei ist ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\mathcal{B}$.

Bemerkung 3.0.3. Sei u eine Lösung des Problems (3.1), (3.2) und (3.3). Da der Rand $\partial\Omega$ glatt ist, können wir ihn als glatte Fläche $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrisieren . Definiert man $v(s) := u(r(s))$, dann ergibt sich $v_s \equiv 0$ aufgrund der Randbedingung $u \equiv 0$. Mit der Kettenregel folgt

$$0 = v_s = \nabla u(r) \cdot r_s.$$

Die Ableitung r_s liegt tangential zur Fläche r, also steht ∇u normal auf r. Somit ist ∇u parallel zu n. Das bedeutet also $\nabla u = dn$ mit einem Skalar d, welcher von x, y, z abhängt. Wir haben außerdem

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = dn \cdot n = d.$$

Dies ergibt $u_x = \xi \frac{\partial u}{\partial n}$, $u_y = \eta \frac{\partial u}{\partial n}$ und $u_z = \zeta \frac{\partial u}{\partial n}$, wobei $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Normalableitung und (ξ, η, ζ) die äußere Normale auf $\partial\Omega$ ist.

3.1 Eine erste Abschätzung

Lemma 3.1.1. *Jede klassische Lösung u von (3.1) erfüllt*

$$|u(X, Y, Z, t)| \leq K_1 \left(\int_{\mathcal{R}} u^2(., t)\, dxdydz \right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \left(\int_{\mathcal{R}} u_{tt}^2(., t)\, dxdydz \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.4}$$

wobei $\mathcal{R} = U_R\left((X, Y, Z)\right) \cap \Omega$ und $(X, Y, Z) \in \Omega$. Die Konstanten K_1 und K_2 hängen von dem Punkt (X, Y, Z) und $\mathcal{R}$ ab.

Beweis. Sei eine Kugel mit Radius R um den Mittelpunkt (X, Y, Z) gegeben. Wir wählen vier konzentrisch Kugeln $C' \subseteq C'' \subseteq C''' \subseteq C$ mit Mittelpunkt (X, Y, Z), sodass $C \subseteq \Omega \cap U_R\left((X, Y, Z)\right)$. Diese Kugeln existieren, weil die Menge $\Omega \cap U_R\left((X, Y, Z)\right)$ offen ist. Weiteres definieren wir

$$v := \left((x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z^2)\right)^{-\frac{1}{2}} \psi,$$

wobei $\psi \in C^2(C)$ mit $\psi \equiv 1$ in C'', $\psi \equiv 0$ in $C \backslash C'''$ und $|\psi| \leq 1$ in C. Zum besseren Verständnis wurde das Verhalten von ψ in der folgenden Grafik skizziert.

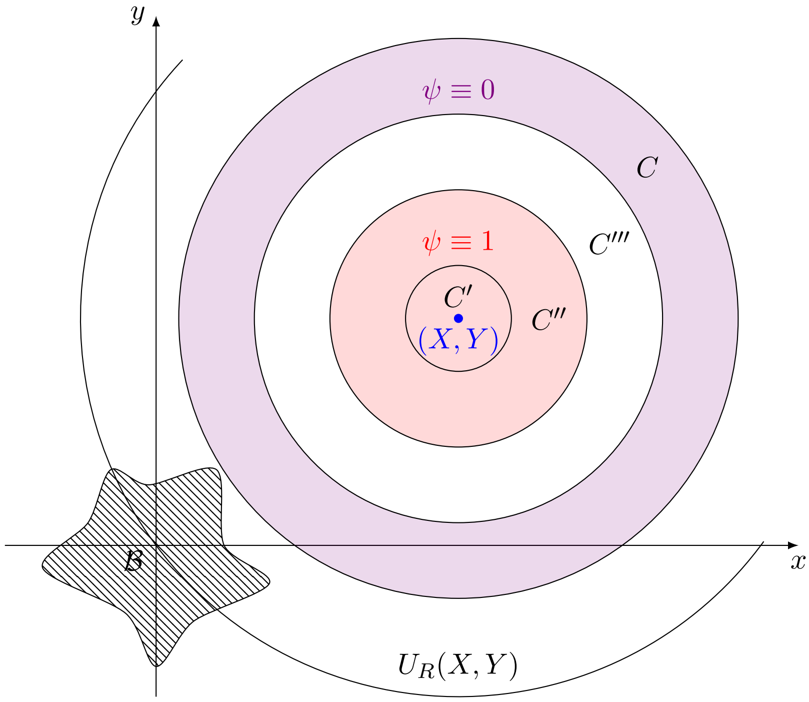

Abbildung 3.1: Das Verhalten von ψ auf C.

Sei nun u eine Lösung von (3.1). Wir betrachten

$$I := \int_C (u\Delta v - v\Delta u)\ dxdydz.$$

Unser Ziel ist es $I = 4\pi u(X, Y, Z, t)$ zu zeigen, wobei t als Parameter betrachten wird. Wir zerlegen das Integral zunächst in zwei Teile

$$I = \underbrace{\int_{C''} (u\Delta v - v\Delta u)\ dxdydz}_{=I_1} + \underbrace{\int_{C'''\setminus C''} (u\Delta v - v\Delta u)\ dxdydz}_{=I_2}.$$

Das Integral über $C\setminus C'''$ verschwindet, weil in diesem Bereich $v \equiv 0$ gilt. Für I_2 folgt

$$\begin{aligned} I_2 &\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{C'''\setminus C''} (\Delta uv - v\Delta u)\ dxdydz + \int_{\partial(C'''\setminus C'')} (u\nabla v \cdot \nu - v\nabla u \cdot \nu)\ ds \\ &= \int_{\partial C'''} (u\nabla v \cdot \nu - v\nabla u \cdot \nu)\, ds - \int_{\partial C''} (u\nabla v \cdot \nu - v\nabla u \cdot \nu)\, ds. \end{aligned}$$

Da v auf $\partial C'''$ verschwindet, erhalten wir

$$I_2 = -\int_{\partial C''} (u\nabla v \cdot \nu - v\nabla u \cdot \nu)\, ds.$$

Für das Integral I_1 ist zu bemerken, dass v bei (X,Y,Z) eine Singularität besitzt. Deswegen müssen wir diesen Punkt zunächst entfernen. Sei dafür $C''_\varepsilon := C'' \backslash U_\varepsilon\left((X,Y,Z)\right)$ mit $U_\varepsilon\left((X,Y,Z)\right) \subseteq C'$. Es ergibt sich folgende Rechnung für I_1:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C''_\varepsilon} u\Delta v \; dxdydz - \int_{C''} v\Delta u \; dxdydz \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{C''} v\Delta u \; dxdydz - \int_{C''} v\Delta u \; dxdydz + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial C''_\varepsilon} \left(u\nabla v \cdot \nu - v\nabla u \cdot \nu\right) ds \\
&= \int_{\partial C''} \left(u\nabla v \cdot \nu - v\nabla u \cdot \nu\right) ds + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial U_\varepsilon((X,Y,Z))} \left(u\nabla v \cdot \nu - v\nabla u \cdot \nu\right) ds.
\end{aligned}$$

In Summe folgt

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial U_\varepsilon((X,Y,Z))} \left(u\nabla v \cdot \nu - v\nabla u \cdot \nu\right) ds,$$

wobei ν die negative äußere Normale auf $\partial U_\varepsilon\left((X,Y,Z)\right)$ ist. In C'' gilt $v = -4\pi U$. Mittels Korollar 2.6.2 ergibt sich

$$I = 4\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial U_\varepsilon((X,Y,Z))} \left(U\nabla u \cdot \nu - u\nabla U \cdot \nu\right) ds = 4\pi u(X,Y,Z,t).$$

Verwenden wir die Tatsache, dass u (3.1) löst, so folgt

$$4\pi u(X,Y,Z,t) = \int_C \left(u\Delta v - v\Delta u\right) \; dxdydz = \int_C \left(u\Delta v - v u_{tt}\right) \; dxdydz.$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
4\pi |u(X,Y,Z,t)| \leq{}& \left(\int_C u^2 \; dxdydz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_C (\Delta v)^2 \; dxdydz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\int_C u_{tt}^2 \; dxdydz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_C v^2 \; dxdydz\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, dass die Integrale

$$\left(\int_C (\Delta v)^2 \; dxdydz\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \left(\int_C v^2 \; dxdydz\right)^{\frac{1}{2}}$$

beschränkt sind. Offensichtlich gilt $\Delta v = 0$ in $C\backslash C'''$. Weil $v = -4\pi U$ in C'' und $\Delta U = 0$ in $C''\backslash\{(X,Y,Z)\}$ ist, folgt

$$\int_{C''} (\Delta v)^2 \; dxdydz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{U_\varepsilon((X,Y,Z))} (\Delta v)^2 \; dxdydz = 0.$$

Da $v \in C^2(C\backslash\{(X,Y,Z)\})$, ist Δv beschränkt auf $C'''\backslash C''$. Wir können also $\int_C (\Delta v)^2 \; dxdydz$ durch eine Konstante $16\pi^2 K_1^2$ beschränken. Für das andere Integral haben wir

$$\int_C v^2 \; dxdydz \leq \int_C \left((x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2\right)^{-1} \; dxdydz.$$

Sei τ der Radius von C, dann folgt mittels Polarkoordinaten-Transformation

$$\int_C \left((x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2\right)^{-1} \, dxdydz = \int_{U_\tau((0,0,0))} \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1} \, dxdydz$$
$$= \int_0^\tau \frac{1}{r^2} r^2 \, dr = \tau < \infty.$$

Somit ist das linke Integral endlich und wir können es durch eine Konstante $16\pi^2 K_2^2$ beschränken. In Summe erhalten wir

$$\begin{aligned} |u(X,Y,Z,t)| &\leq K_1 \left(\int_C u^2 \, dxdydz\right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \left(\int_C u_{tt}^2 \, dxdydz\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K_1 \left(\int_{\mathcal{R}} u^2 \, dxdydz\right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \left(\int_{\mathcal{R}} u_{tt}^2 \, dxdydz\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

womit die Abschätzung (3.4) gezeigt ist. $\square$

3.2 Eine zeitabhängige Abschätzung der lokalen Energie

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass die lokale Energie in $\mathcal{R}$ mit dem Ausdruck K/t beschränkt werden kann. Hierbei ist $K > 0$ eine Konstante, und $\mathcal{R}$ die in Lemma 3.1.1 beschriebene Menge. Diese Abschätzung soll nicht nur für klassische Lösungen von (3.1), (3.2) und (3.3), sondern auch für Lösungen $u \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ gelten. Um dies zu bewerkstelligen, betrachten wir das gegebene Anfangsrandwertproblem zunächst auf dem beschränkten Gebiet $\Omega_k := \Omega \cap U_k((0,0,0))$ und beweisen die gewünschte Abschätzung für schwache Lösungen dieses neuen Problems. Davor müssen wir noch ein paar Hilfsresultate zeigen.

Lemma 3.2.1. *Seien $f \in H^2(\Omega_k) \cap H_0^1(\Omega_k)$ und $g \in H_0^1(\Omega_k)$. Für $\mathcal{B} \subseteq U_k((0,0,0))$ bezeichnet u eine Lösung von*

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-u_{tt} &= 0 \quad \text{in } \Omega_k \times \mathbb{R}, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_k \times \mathbb{R}, \\ u(.,0) = f, \ u_t(.,0) &= g \quad \text{in } \Omega_k \end{aligned}$$

in dem Sinne, dass u die Differentialgleichung punktweise erfüllt und $u \in C^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega_k)) \cap C(\mathbb{R}, H^2(\Omega_k) \cap H_0^1(\Omega_k))$, sowie $u_t \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega_k))$ für beliebiges $T > 0$. Dann gilt

$$\int_{\Omega_k} (u_x^2+u_y^2+u_z^2+u_t^2) \, dxdydz = \int_{\Omega_k} (f_x^2+f_y^2+f_z^2+g^2) \, dxdydz$$

für alle $t \geq 0$. Wir definieren zudem

$$E := \int_{\Omega_k} (f_x^2+f_y^2+f_z^2+g^2) \, dxdydz.$$

Beweis. Sei $t_1 > 0$ beliebig. Wir definieren

$$\mathcal{R}' := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 0 < t < t_1 \wedge (x, y, z) \in \Omega_k\} = \Omega_k \times (0, t_1).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathcal{R}'} (u_t(\Delta u - u_{tt}))\ dxdydzdt \\ &= \int_{\mathcal{R}'} \left((u_t u_x)_x + (u_t u_y)_y + (u_t u_z)_z - \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2)_t \right)\ dxdydzdt \\ &\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\mathcal{R}'} \left(u_t(u_x\xi + u_y\eta + u_z\zeta) - \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2)\tau \right)\ dS, \end{aligned}$$

wobei (ξ, η, ζ, τ) die äußere Normale auf $\partial\mathcal{R}'$ ist. Die obige Rechnung ist zulässig, da alle vorkommenden Ableitungen in $L^2(\Omega_k \times (0, t_1))$ liegen. Insbesondere verwenden wir für die letzte Gleichung nicht den klassischen Satz von Gauß, sondern Satz 2.2.4. Weil u (3.1) punktweise löst, gilt $I = 0$. Für den Rand von $\mathcal{R}'$ erhalten wir

$$\partial\mathcal{R}' = \Omega_k \times \{0\} \cup \Omega_k \times \{t_1\} \cup \partial\Omega_k \times [0, t_1].$$

Weil $u_t \in H_0^1(\Omega_k)$ für $t \geq 0$, gilt $\mathcal{T}(u_t) = 0$ auf $\partial\Omega_k \times [0, t_1]$. Dabei wird mit $\mathcal{T}$ der Spuroperator notiert. Außerdem erhalten wir $\tau = 0$ auf $\partial\Omega_k \times [0, t_1]$, womit das Integral über diesen Teil des Randes verschwindet. Für $\Omega_k \times \{0\}$ bzw. $\Omega_k \times \{t_1\}$ gilt $\xi = \eta = \zeta = 0$ und $\tau = -1$ bzw. $\tau = 1$. Mit Hilfe dieser Erkenntnisse folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_k, t=0} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2)\ dxdydz - \frac{1}{2} \int_{\Omega_k, t=t_1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2)\ dxdydz \\ \Rightarrow & \int_{\Omega_k, t=t_1} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2)\ dxdydz = \int_{\Omega_k} (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 + g^2)\ dxdydz < \infty \end{aligned}$$

Letztere Ungleichung gilt wegen der Wahl der Anfangsdaten. □

Die Aussage aus Lemma 3.2.1 gilt auch für Anfangsrandwertprobleme auf $\Omega_k \times (0, T)$. In diesem Fall gilt die Energieerhaltung natürlich nur für $t < T$. Wir benötigen außerdem eine zeitunabhängige Abschätzung der L^2-Norm von u. Die folgenden zwei Lemmata leisten dies und beziehen sich dabei auf [Ika00, Lemma 4.9 und 4.10].

Lemma 3.2.2. *Seien $w \in H_0^1(\Omega_k)$ und $k > R$. Weiters sei $\mathcal{B}$ sternförmig bzgl. des Ursprungs. Falls $\mathcal{B} \subseteq U_R((0, 0, 0))$, dann gilt*

$$\|w\|_{L^2(\Omega_R)} \leq C_R \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_k)}.$$

Dabei hängt C_R von R und $\partial\Omega$ ab.

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für $w \in C_0^\infty(\Omega_k)$. Für $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ sei $r : S^2 \to (0, \infty)$ so gewählt, dass $r(\theta)\theta \in \partial\Omega$. Es gilt $r(\theta) \geq r_0$, wobei $r_0 = \inf_{\theta \in \partial\Omega} |\theta|$. Falls $r > r(\theta)$, dann folgt

$$w(r\theta) = \int_{r(\theta)}^{r} \frac{\partial}{\partial s} w(s\theta)\ ds.$$

Für $r \leq k$ ergibt sich aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|w(r\theta)|^2 \leq \int_{r(\theta)}^{r} \frac{1}{s^2}\, ds \int_{r(\theta)}^{r} \left(s^2|\nabla w(s\theta)|^2\right)\, ds \leq \frac{1}{r(\theta)} \int_{r(\theta)}^{k} \left(|\nabla w(s\theta)|^2 s^2\right)\, ds.$$

Mithilfe dieser Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|w\|^2_{L^2(\Omega_R)} &= \int_{S^2} \int_{r(\theta)}^{R} \left(|w(r\theta)|^2 r^2\right)\, dr \\
&\leq \int_{S^2} \left(\int_{r(\theta)}^{R} r^2\, dr\right) \left(\frac{1}{r(\theta)} \int_{r(\theta)}^{k} \left(|\nabla w(s\theta)|^2 s^2\right)\, ds\right)\, d\theta \\
&\leq \frac{R^3}{3r_0} \int_{S^2} \int_{r(\theta)}^{k} \left(|\nabla w(s\theta)|^2 s^2\right)\, ds\, d\theta = \frac{R^2}{3r_0} \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega_k)}.
\end{aligned}$$

Mittels eines Dichtheitsargumentes folgt die behauptete Ungleichung auch für $w \in H^1_0(\Omega_k)$. $\square$

Bemerkung 3.2.3. Nimmt man in Lemma (3.2.2) $w \in H^1_0(\Omega)$ an, dann kann man für $k > R$ ebenfalls

$$\|w\|_{L^2(\Omega_R)} \leq C_R \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_k)} \tag{3.5}$$

zeigen. Im Beweis muss lediglich $w \in C^\infty_0(\Omega)$ gewählt werden.

Lemma 3.2.4. *Seien $T > 0$ und $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ mit kompakten Trägern. Wähle $\rho > 0$, sodass $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g, \mathcal{B} \subseteq U_\rho((0,0,0))$. Die Funktion u bezeichnet eine Lösung von*

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} &= 0 \quad \text{in } \Omega_k \times (0,T), \\
u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_k \times (0,T), \\
u(.,0) = f,\ u_t(.,0) &= g \quad \text{in } \Omega_k
\end{aligned}$$

in dem Sinne, dass u die Differentialgleichung punktweise erfüllt und $u \in C^2((0,T), L^2(\Omega_k)) \cap C((0,T), H^2(\Omega_k) \cap H^1_0(\Omega_k))$, sowie $u_t \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega_k))$. Falls $k \geq \rho + T + 1$, dann gilt

$$\|u(.,t)\|^2_{L^2(\Omega_k)} \leq (C^2_\rho + D^2_\rho) \int_{\Omega_k} (f^2_x + f^2_y + f^2_z + g^2)\, dxdydz$$

für alle $t \in (0,T)$. Dabei hängen D_ρ und C_ρ von ρ und Ω ab.

Beweis. Sei $h \in H^2(\Omega_k) \cap H^1_0(\Omega_k)$ eine Lösung von

$$\begin{aligned}
\Delta h &= g \quad \text{in } \Omega_k \\
h &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_k.
\end{aligned}$$

Die Existenz dieser Lösung folgt aus [Jüb, Kapitel 5]. Aus Abschnitt 2.3 folgt die Existenz einer eindeutigen Lösung $w \in C^2((0,T), L^2(\Omega_k)) \cap C((0,T), H^2(\Omega_k) \cap H^1_0(\Omega_k))$, $w_t \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega_k))$ von

$$\begin{aligned}
\Delta w - w_{tt} &= 0 \quad \text{in } \Omega_k \times (0,T) \\
w &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_k \times (0,T) \\
w(.,0) = h, w_t(.,0) &= f \quad \text{in } \Omega_k,
\end{aligned}$$

da $h \in H^2(\Omega_k) \cap H_0^1(\Omega_k)$ und $f \in H_0^1(\Omega_k)$. Die Funktion w erfüllt die Differentialgleichung punktweise. Daher ist die Zeitableitung $w_t \in C^1((0,T), L^2(\Omega_k))$ ebenfalls eine punktweise Lösung obiger Gleichung, jedoch mit anderen Anfangsdaten

$$\begin{aligned} w_t(.,0) &= f, \\ w_{tt}(.,0) &= \Delta w(.,0) = \Delta h = g. \end{aligned}$$

Proposition 2.3.8 besagt, dass eine solche C^1 Lösung eindeutig ist. Da w_t und u das gleiche Anfangsrandwertproblem lösen, folgt $w_t = u$ auf $\Omega_k \times (0,T)$. Wendet man Lemma 3.2.1 für w an, so folgt

$$\int_{\Omega_k} u^2 \, dxdydz = \int_{\Omega_k} w_t^2 \, dxdydz \le \int_{\Omega_k} \left(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 + f^2\right) \, dxdydz$$

für $t \in (0,T)$. Da $f \in H_0^1(\Omega_\rho)$ ergibt sich aus der Poincaré-Ungleichung direkt

$$\int_{\Omega_k} f^2 \, dxdydz = \int_{\Omega_\rho} f^2 \, dxdydz \le D_\rho^2 \int_{\Omega_\rho} |\nabla f|^2 \, dxdydz = D_\rho^2 \int_{\Omega_k} |\nabla f|^2 \, dxdydz.$$

Wir müssen noch $\|\nabla h\|^2_{L^2(\Omega_k)}$ abschätzen:

$$\int_{\Omega_k} |\nabla h|^2 \, dxdydz \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{\Omega_k} \Delta h h \, dxdydz + \underbrace{\int_{\partial\Omega_k} h(\nabla h \cdot \nu) \, dS}_{=0} = -\int_{\Omega_\rho} gh \, dxdydz.$$

Die letzte Gleichheit erhalten wir, weil $\operatorname{supp} g \subseteq \Omega_\rho$. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Lemma 3.2.2 folgt

$$\left| \int_{\Omega_\rho} gh \, dxdydz \right| \le \|g\|_{L^2(\Omega_\rho)} \|h\|_{L^2(\Omega_\rho)} \le \|g\|_{L^2(\Omega_k)} C_\rho \|\nabla h\|_{L^2(\Omega_k)}.$$

Wir erhalten also

$$\|\nabla h\|^2_{L^2(\Omega_k)} \le C_\rho \|g\|_{L^2(\Omega_k)} |\nabla h\|_{L^2(\Omega_k)} \Rightarrow \|\nabla h\|_{L^2(\Omega_k)} \le C_\rho \|g\|_{L^2(\Omega_k)}. \tag{3.6}$$

In Summe ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} u^2 \, dxdydz \le \int_{\Omega_k} h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 + f^2 \, dxdydz &\le C_\rho^2 \|g\|^2_{L^2(\Omega_k)} + D_\rho^2 \|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega_k)} \\ &\le (C_\rho^2 + D_\rho^2) \int_{\Omega_k} (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 + g^2) \, dxdydz, \end{aligned}$$

also die behauptete Aussage.

□

Wir können nun die gewünschte Abschätzung für schwache Lösungen beweisen.

Lemma 3.2.5. *Seien* $(X, Y, Z) \in \Omega$, $T > 0$ *und* $R > 0$ *beliebig. Wir definieren* $\mathcal{R} := U_R((X, Y, Z)) \cap \Omega$. *Wähle* $a > 0$ *so, dass* $U_R((X, Y, Z)) \subseteq U_a((0, 0, 0))$. *Sei* $k \geq \max(a, \rho + T + 1)$ *und* $\Omega_k = \Omega \cap U_k((0, 0, 0))$. *Wir bezeichnen mit* u *eine Lösung von*

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} &= 0 \quad \textit{in } \Omega_k \times \mathbb{R}, \\ u &= 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega_k \times \mathbb{R}, \\ u(.,0) = f, \ u_t(.,0) &= g \quad \textit{in } \Omega_k \end{aligned}$$

in dem Sinne, dass u *die Differentialgleichung punktweise erfüllt und* $u \in C^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega_k)) \cap C(\mathbb{R}, H^2(\Omega_k) \cap H_0^1(\Omega_k))$, *sowie* $u_t \in L^2(0, t; H_0^1(\Omega_k))$ *für* $t > 0$ *beliebig. Dabei setzen wir* $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ *mit kompakten Trägern voraus, wobei* $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g, \mathcal{B} \subseteq U_\rho((0, 0, 0))$. *Dann gilt für alle* $t \in (0, T)$

$$t \int_{\mathcal{R}} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2)\, dxdydz \leq K,$$

wobei K *von* f, g, ρ *und* $\mathcal{R}$ *abhängt.*

Beweis. Wir wählen den Koordinatenursprung so, dass $\mathcal{B}$ sternförmig bzgl. des Ursprungs ist. Es gilt also

$$x\xi + y\eta + z\zeta \leq 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}, \tag{3.7}$$

wobei (ξ, η, ζ) der innere Normaleneinheitsvektor von $\partial\mathcal{B}$ ist. Insbesondere ist (ξ, η, ζ) dann der äußere Normaleneinheitsvektor von $\partial\Omega$. Da u die Differentialgleichung punktweise erfüllt folgt

$$J = \int_{\mathcal{R}'} ((xu_x + yu_y + zu_z + tu_t + u)(\Delta u - u_{tt}))\ dxdydzdt = 0,$$

wobei $\mathcal{R}' = \Omega_k \times (0, t_1)$ mit $t_1 \leq T$. In Abbildung 3.2 ist die Menge $\mathcal{R}'$ für zwei Raumdimensionen skizziert. Dabei ist $\Omega_k \times \{0\}$ durch die grau strichlierte Fläche gegeben. Zudem sind $\mathcal{B} \times [0, t_1]$ violett und $\mathcal{R}'$ rot gefärbt.

Aufgrund der angenommen Regularität liegen alle ersten und zweiten Ableitungen von u in $L^2(\Omega_k \times (0, T)) \subseteq L^2(\Omega_k \times (0, t_1))$, also $u \in H^2(\mathcal{R}')$. Diese Tatsache ermöglicht uns die nächsten Rechenschritte. Multipliziert man den Integranden aus, so erhält man

$$\begin{aligned} J = \int_{\mathcal{R}'} \Big(& xu_xu_{xx} + xu_xu_{yy} + xu_xu_{zz} - xu_xu_{tt} + yu_yu_{xx} + yu_yu_{yy} + yu_yu_{zz} - yu_yu_{tt} \\ & + zu_zu_{xx} + zu_zu_{yy} + zu_zu_{zz} - zu_zu_{tt} + tu_tu_{xx} + tu_tu_{yy} + tu_tu_{zz} - tu_tu_{tt} \\ & + uu_{xx} + uu_{yy} + uu_{zz} - uu_{tt} \Big)\ dxdydzdt. \end{aligned}$$

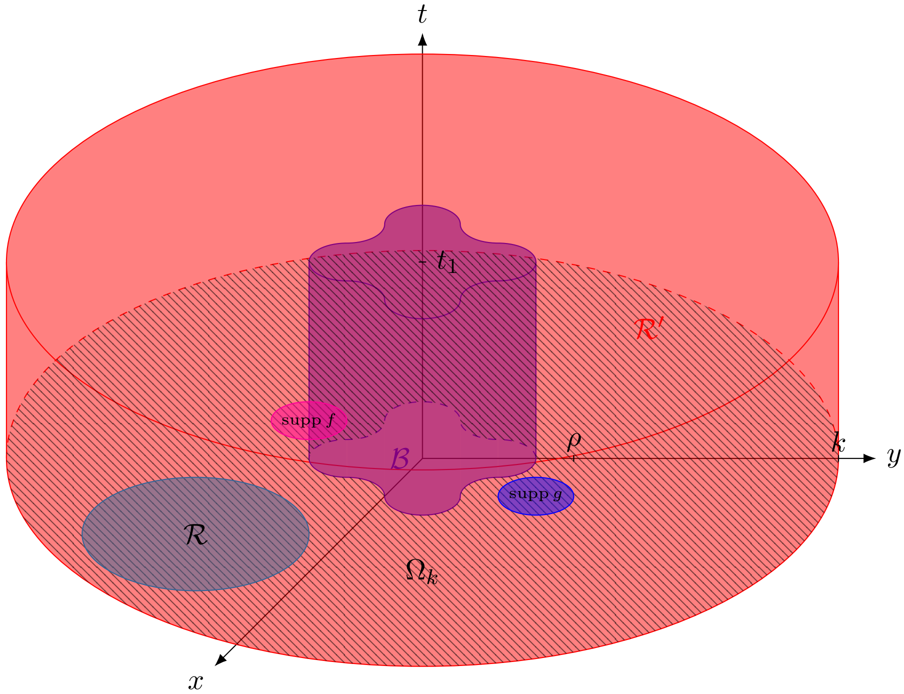

Abbildung 3.2: $\mathcal{R}'$ in zwei Raumdimensionen

Wir verwenden folgende drei Gleichungen um das Integral weiter zu vereinfachen:

$$xu_xu_{xx} = \left(\frac{1}{2}xu_x^2\right)_x - \frac{1}{2}u_x^2, \quad xu_xu_{yy} = (xu_xu_y)_y - \left(\frac{1}{2}xu_y^2\right)_x + \frac{1}{2}u_y^2$$
$$uu_{xx} = (uu_x)_x - u_x^2.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
J = \int_{\mathcal{R}'} \Bigg[&\left(\frac{1}{2}x(u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 + u_t^2) + yu_yu_x + zu_zu_x + tu_tu_x + uu_x\right)_x \\
&+ \left(xu_xu_y + \frac{1}{2}y(u_y^2 - u_x^2 - u_z^2 + u_t^2) + zu_zu_y + tu_tu_y + uu_y\right)_y \\
&+ \left(xu_xu_z + yu_yu_z + \frac{1}{2}z(u_z^2 - u_x^2 - u_y^2 + u_t^2) + tu_tu_z + uu_z\right)_z \\
&+ \left(-xu_xu_t - yu_yu_t - zu_zu_t - \frac{1}{2}t(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2) - uu_t\right)_t \Bigg] \, dxdydzdt
\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Gauß für Sobolevfunktionen folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
J = \int_{\partial\mathcal{R}'} \Bigg(& \frac{x}{2}\left(u_x^2\xi + 2u_xu_y\eta - u_y^2\xi + 2u_xu_z\zeta - u_z^2\xi - 2u_xu_t\tau + u_t^2\xi\right) \\
& + \frac{y}{2}\left(u_y^2\eta + 2u_xu_y\xi - u_x^2\eta + 2u_yu_z\zeta - u_z^2\eta - 2u_yu_t\tau + u_t^2\eta\right) \\
& + \frac{z}{2}\left(u_z^2\zeta + 2u_xu_z\xi - u_x^2\zeta + 2u_yu_z\eta - u_y^2\zeta - 2u_zu_t\tau + u_t^2\zeta\right) \\
& + \frac{t}{2}\left(-u_t^2\tau + 2u_xu_t\xi - u_x^2\tau + 2u_yu_t\eta - u_y^2\tau + 2u_xu_t\zeta - u_z^2\tau\right) \\
& + u\left(u_x\xi + u_y\eta + u_z\zeta - u_t\tau\right)\Bigg) dS.
\end{aligned}$$

Dabei sei (ξ,η,ζ,τ) der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\mathcal{R}'$. Wir können $\partial\mathcal{R}'$ in vier Bereiche zerlegen:

$$\partial\mathcal{R}' = \Omega_k \times \{0\} \,\cup\, \Omega_k \times \{t_1\} \,\cup\, \partial\Omega \times [0,t_1] \,\cup\, \partial U_k((0,0,0)) \times [0,t_1]$$

Das Oberflächenmaß von $\partial\Omega \times \{0,t_1\}$ und $\partial U_k((0,0,0)) \times \{0,t_1\}$ ist Null, also können wir in obiger Zerlegung auch die offenen Zeitintervalle betrachten. Wir wollen nun die vier Bereiche untersuchen.

Dabei fangen wir mit $\partial U_k((0,0,0)) \times (0,t_1)$ an. Weil die Träger der Anfangsdaten durch ρ beschränkt sind und sich u mit Geschwindigkeit 1 ausbreitet, gilt

$$u \equiv 0 \text{ für } r \geq t+\rho$$

mit $r^2 = x^2+y^2+z^2$. Insbesondere verschwinden u und alle Ableitungen von u auf der Menge $\partial U_k((0,0,0)) \times (0,t_1)$. Das Integral J zerfällt also nur mehr in drei Teile

$$J = J_1 + J_2 + J_3,$$

wobei J_1 das Integral über $\partial\Omega \times (0,t_1)$, J_2 das Integral über $\Omega_k \times \{t_1\}$ und J_3 das Integral über $\Omega_k \times \{0\}$ ist.

Betrachten wir zunächst J_1. Dann folgt $\tau = 0$ und $u_t = 0$. Aus Bemerkung 3.0.3 erhalten wir $u_x = \xi\frac{\partial u}{\partial n}$, $u_y = \eta\frac{\partial u}{\partial n}$ und $u_z = \zeta\frac{\partial u}{\partial n}$, wobei $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Normalableitung und (ξ,η,ζ) die äußere Normale auf $\partial\Omega$ ist. Für J_1 erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
J_1 = \int_{\partial\Omega\times(0,t_1)} & \left[\frac{x}{2}\xi\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \underbrace{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}_{=1} + \frac{y}{2}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right. \\
& \left. + \frac{z}{2}\zeta\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right] dS = \int_{\partial\Omega\times(0,t_1)}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2(x\xi+y\eta+z\zeta)\right] dS \overset{(3.7)}{\leq} 0.
\end{aligned}$$

Als Nächstes untersuchen wir J_2. Auf $\Omega_k \times \{t_1\}$ gilt $\xi=\eta=\zeta=0$ und $\tau=1$. Daher hat das Integral J_2 die Gestalt

$$J_2 = \int_{\mathcal{R}_{0,t=t_1}} \left(-u_t(xu_x+yu_y+zu_z) - \frac{t_1}{2}(u_x^2+u_y^2+u_z^2+u_t^2) - uu_t\right) dxdydz,$$

mit $\mathcal{R}_0 := \Omega_{\rho+t_1} \subset \Omega_k$. Wir können uns auf $\mathcal{R}_0$ beschränken, da $u \equiv 0$ für $r \geq t_1 + \rho$. Zudem erhalten wir $(xu_x + yu_y + zu_z) = \nabla u \cdot (x,y,z)^T = r\nabla u \cdot \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)^T = ru_r$. Es gilt $u_r^2 = |u_r|^2 \leq |\nabla u|^2$. Analog erhalten wir

$$J_3 = \int_{\mathcal{R}_1, t=0} (ru_r u_t + uu_t)\ dxdydz = \int_{\mathcal{R}_1} (rf_r g + fg)\ dxdydz,$$

wobei $\mathcal{R}_1 := \Omega_\rho$. Da die Anfangsdaten zweimal stetig differenzierbar sind, ist J_3 beschränkt.

Wir müssen J_2 noch genauer untersuchen. Dafür zerlegen wir es in

$$J_2 = J_{21} + J_{22} + J_{23} + J_{24} + J_{25},$$

wobei die Integrale

$$\begin{aligned}
J_{21} &= -\int_{\mathcal{R}} (ru_r u_t)\ dxdydz,\\
J_{22} &= -\frac{t_1}{2}\int_{\mathcal{R}} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2)\ dxdydz,\\
J_{23} &= -\int_{\mathcal{R}_0\setminus\mathcal{R}} (ru_r u_t)\ dxdydz,\\
J_{24} &= -\frac{t_1}{2}\int_{\mathcal{R}_0\setminus\mathcal{R}} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2)\ dxdydz,\\
J_{25} &= -\int_{\mathcal{R}_0} (uu_t)\ dxdydz,
\end{aligned}$$

alle an $t = t_1$ ausgewertet werden. In $\mathcal{R}$ gilt $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq a$ und mit der Young-Ungleichung erhalten wir

$$|J_{21}| \leq a \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{u_r^2 + u_t^2}{2}\right)\ dxdydz \leq \frac{1}{2}aE.$$

Die zweite Ungleichung folgt aus Lemma 3.2.1. Außerdem gilt $J_{22} \leq 0$ und $J_{24} \leq 0$. Abermals mit der Young-Ungleichung und Lemma 3.2.1 ergibt sich

$$|J_{23}| \leq \int_{\mathcal{R}_0\setminus\mathcal{R}} ((\rho + t_1)|u_r||u_t|)\ dxdydz \leq \frac{t_1}{2}\int_{\mathcal{R}_0\setminus\mathcal{R}} (|\nabla u|^2 + u_t^2)\ dxdydz + \frac{1}{2}\rho E.$$

Wegen $|J_{23}| \leq -J_{24} + \frac{1}{2}\rho E$ folgt

$$J_{24} + J_{23} = N + M$$

mit $N \leq 0$ und $|M| \leq \frac{1}{2}\rho E$. Mit der Young-Ungleichung und Lemma 3.2.4 erhalten wir

$$|J_{25}| \leq \int_{\mathcal{R}_0} \left(\frac{u^2 + u_t^2}{2}\right)\ dxdydz \leq \frac{C_\rho^2 + D_\rho^2 + 1}{2}E.$$

Das Integral J setzt sich also aus beschränkten und negativen Teilen zusammen:

$$J = J_{22} + A + B$$

mit $A \leq 0$ und $|B| < \infty$. Weil $J = 0$, sind die negativen Terme in ihrem Absolutwert beschränkt, also

$$-2J_{22} = t_1 \int_{\mathcal{R}} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2)\, dxdydz \leq K.$$

Dabei gilt $K \leq |B|$. Für das nächste Lemma wird die Gestalt von $|B|$ interessant sein, weshalb wir diese hier besprechen wollen. Wir haben

$$\begin{aligned} J &= J_1 + J_3 + J_{21} + J_{22} + J_{23} + J_{24} + J_{25} \\ &= \underbrace{J_1 + J_{22} + J_{24} + N}_{\leq 0} + \underbrace{M + J_3 + J_{21} + J_{25}}_{=B}. \end{aligned}$$

Da $f \in H_0^1(\Omega_\rho)$, folgt mittels der Poincaré-Ungleichung

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \rho \int_{\mathcal{R}_1} \left(\frac{f_r^2 + g^2}{2} \right) dxdydz + \int_{\mathcal{R}_1} \left(\frac{f^2 + g^2}{2} \right) dxdydz \leq \rho \frac{E}{2} + (D_\rho^2 + 1) \frac{E}{2} \\ &= \frac{(\rho + D_\rho^2 + 1)}{2} E. \end{aligned}$$

In Summe erhalten wir

$$K \leq |B| \leq |M| + |J_3| + |J_{21}| + |J_{25}| \leq \left(a + 2\rho + 2D_\rho^2 + C_\rho^2 + 2\right) \frac{E}{2}. \tag{3.8}$$

Die Konstante K hängt also nur von ρ, f, g und $\mathcal{R}$ ab. □

Lemma 3.2.6. *Sei u eine Lösung von (3.1), (3.2) und (3.3) im folgenden Sinne: Es gilt $u \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ und u erfüllt die Differentialgleichung punktweise. Außerdem setzen wir für die Anfangsbedingung eine schwächere Regularität voraus, nämlich $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ und $g \in C(\mathbb{R})$. Sie besitzen aber weiterhin kompakte Träger mit $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g, \mathcal{B} \subseteq U_\rho((0,0,0))$. Seien $(X,Y,Z) \in \Omega$, $R > 0$ beliebig und $\mathcal{R} := U_R((X,Y,Z)) \cap \Omega$. Dann gilt für alle $t \geq 0$*

$$t \int_{\mathcal{R}} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2)\, dxdydz \leq K,$$

wobei K von f, g, ρ und $\mathcal{R}$ abhängt.

Beweis. Sei $T > 0$ beliebig. Wir wählen $a > 0$ so, dass $\mathcal{R} \subseteq U_a((0,0,0,))$. Sei $k := \max(a, \rho + T + 1)$. Wir betrachten $\Omega_k = \Omega \cap U_k((0,0,0))$. Für diese Wahl von k gilt $\mathcal{R} \subseteq \Omega_k$ und $u \equiv 0$ für $r \geq k$ und $t \leq T$. Aufgrund der Voraussetzungen gilt $f \in H_0^1(\Omega_\rho)$ und $g \in L^2(\Omega_\rho)$. Es existieren also zwei Folgen $f_n, g_n \in \mathcal{D}(\Omega_\rho)$ mit

$$\|f_n - f\|_{H^1(\Omega_\rho)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \|g_n - g\|_{L^2(\Omega_\rho)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Setzen wir f_n und g_n mit Null fort, so können wir sogar $f_n, g_n \in \mathcal{D}(\Omega_k)$ erreichen. Da auch $f \in H_0^1(\Omega_k)$, $g \in L^2(\Omega_k)$ und $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g \subseteq \Omega_\rho$, folgt

$$\|f_n - f\|_{H^1(\Omega_k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \|g_n - g\|_{L^2(\Omega_k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.9}$$

Sei u_n eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} &= 0 && \text{in } \Omega_k \times \mathbb{R}, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_k \times \mathbb{R}, \\ u(x,y,z,0) = f_n(x,y,z),\ u_t(x,y,z,0) &= g_n(x,y,z) && \text{in } \Omega_k. \end{aligned}$$

Die umständliche Definition von f_n und g_n liefert uns $\operatorname{supp} f_n, \operatorname{supp} g_n \subseteq \Omega_\rho$. Aus Abschnitt 2.3 folgt die Existenz einer eindeutigen Lösung dieses Anfangsrandwertproblems mit $u_n \in C^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega_k)) \cap C(\mathbb{R}, H^2(\Omega_k) \cap H_0^1(\Omega_k))$, sowie $u_{nt} \in L^2(0,t; H_0^1(\Omega_{t_1}))$ für alle $t > 0$. Wegen Lemma 3.2.5 erhalten wir für u_n und $t \in (0,T)$

$$t \int_{\mathcal{R}} (u_{nx}^2 + u_{ny}^2 + u_{nz}^2 + u_{nt}^2)\, dxdydz \leq K_{f_n,g_n}, \tag{3.10}$$

wobei K_{f_n,g_n} von f_n, g_n, ρ und $\mathcal{R}$ abhängt. Aus (3.8) und (3.9) erhalten wir

$$\begin{aligned} K_{f_n,g_n} &\leq C_{\rho,\mathcal{R}} \int_{\Omega_k} (f_{nx}^2 + f_{ny}^2 + f_{nz}^2 + g_n^2)\, dxdydz \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} C_{\rho,\mathcal{R}} \int_{\Omega_k} (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 + g^2)\, dxdydz \\ &= C_{\rho,\mathcal{R}} \int_{\Omega} (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 + g^2)\, dxdydz =: K_{f,g} \end{aligned}$$

Nun hängt $K_{f,g}$ von f, g, ρ und $\mathcal{R}$ ab. Wegen der vorausgesetzten Regularität, gilt $u \in C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega_k))$. Also erfüllen die Funktionen $u - u_n \in C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega_k))$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta u - u_{tt} &= 0 && \text{in } \Omega_k \times (0,T), \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_k \times (0,T), \\ u(.,0) = f - f_n, u_t(.,0) &= g - g_n && \text{in } \Omega_k. \end{aligned}$$

Daher folgt aus Lemma 2.3.9

$$\int_{\Omega_k} \left(|u_t - u_{n_t}|^2 + |\nabla u - \nabla u_n|^2\right)\, dxdydz \leq e^t \left(\|(g - g_n)\|_{L^2(\Omega_k)}^2 + C\|(f - f_n)\|_{H^1(\Omega_k)}^2\right)$$

für $t \in (0,T)$. Aufgrund der Wahl von f_n und g_n ergibt sich für $t \in (0,T)$ sofort

$$\|u_t - u_{n_t}(.,t)\|_{L^2(\Omega_k)}, \|(\nabla u - \nabla u_n)(.,t))\|_{L^2(\Omega_k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.11}$$

Da $\mathcal{R} \subseteq \Omega_k$, gilt die Konvergenz (3.11) auch auf $L^2(\mathcal{R})$. Bilden wir in (3.10) den Grenzübergang $n \to \infty$, so erhalten wir

$$t \int_{\mathcal{R}} \left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + u_t^2\right)\, dydxdz \leq K_{f,g} \qquad \text{für } t \in (0,T).$$

Da $T > 0$ beliebig war und $K_{f,g}$ von T unabhängig ist, gilt diese Ungleichung für alle $t \geq 0$. $\square$

3.3 Hauptresultat

Nachdem wir alle notwendigen Hilfslemmata bewiesen haben, können wir die versprochene Abklingrate von klassischen Lösungen zeigen. Wir wollen an dieser Stelle noch einmal die Aussage formulieren.

Satz 3.3.1. *Sei u eine klassische Lösung von (3.1), (3.2) und (3.3), und $\mathcal{B}$ sternförmig. Dann gilt für jeden festen Punkt $(X, Y, Z) \in \Omega$*

$$|u(X, Y, Z, t)| \leq Kt^{-\frac{1}{2}},$$

wobei K von (X, Y, Z), f, g und ρ abhängt.

Beweis. Sei $\mathcal{R} := U_R(X, Y, Z) \cap \Omega$. Für ein $a > 0$ gilt $\mathcal{R} \subseteq U_a((0, 0, 0)) \cap \Omega$. Zudem existiert $R_1 > 0$, sodass $U_{a+1}((0, 0, 0)) \cap \Omega \subseteq U_{R_1}(X, Y, Z) \cap \Omega =: \mathcal{R}_1$ erfüllt ist. Sei u eine klassische Lösung von (3.1), (3.2) und (3.3). Dann folgt

$$\begin{aligned}
(\Delta u - u_{tt})_t = 0 \Rightarrow \Delta(u_t) - (u_t)_{tt} &= 0 && \text{in } \Omega \times \mathbb{R}, \\
u_t &= 0 && \text{auf } \partial\mathcal{B} \times \mathbb{R}, \\
u_t(x, y, z, 0) &= g(x, y, z) && \text{in } \Omega, \\
u_{tt}(x, y, z, 0) = \Delta u(x, y, z, 0) &= \Delta f(x, y, z) && \text{in } \Omega.
\end{aligned}$$

Es gilt $u_t \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ und u_t erfüllt obige Differentialgleichung punktweise. Aus Lemma 3.2.6 ergibt sich

$$t \int_{\mathcal{R}} u_{tt}^2 \, dxdydz \leq K_3.$$

Wir müssen noch

$$t \int_{\mathcal{R}} u^2 \, dxdydz \leq K_4 \tag{3.12}$$

zeigen. Es gilt $u(., t) \in H_0^1(\Omega)$. Mit Hilfe von Bemerkung 3.2.3 ergibt sich

$$t \int_{\mathcal{R}} u^2 \, dxdydz \leq t \int_{U_a((0,0,0)) \cap \Omega} u^2 \, dxdydz \overset{3.5}{\leq} C_a \, t \int_{U_{a+1}((0,0,0)) \cap \Omega} |\nabla u|^2 \, dxdydz.$$

Da u eine klassische Lösung ist, folgt

$$C_a \, t \int_{U_{a+1}((0,0,0)) \cap \Omega} |\nabla u|^2 \, dxdydz \leq C_a \, t \int_{\mathcal{R}_1} |\nabla u|^2 \, dxdydz \leq C_a \widetilde{K} =: K_4$$

aus Lemma 3.2.6. In Summe ergibt sich also

$$t \int_{\mathcal{R}} u^2 \, dxdydz < K_4,$$

wobei K_4 von $\mathcal{R}_1$, ρ, f und g abhängt. Fassen wir das alles zusammen und wenden Lemma 3.1.1 an, dann folgt

$$|u(X,Y,Z,t)| \leq K_1 \left(\int_{\mathcal{R}} u^2 \, dxdydz \right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \left(\int_{\mathcal{R}} u_{tt}^2 \, dxdydz \right)^{\frac{1}{2}} \leq K t^{-\frac{1}{2}}.$$

Dabei wählen wir $K := \max \left(K_1 K_3^{\frac{1}{2}}, K_2 K_4^{\frac{1}{2}} \right)$. Da $\mathcal{R}_1$ nur von (X,Y,Z) abhängt, hat K die geforderte Form. Wir haben also die gewünschte Abklingrate bewiesen. □

Am Anfang der Kapitels 3 wurde schon erwähnt, dass in [Mor61] ein Fehler in diesem Beweis gefunden wurde. Konkret passiert der Fehler bei dem Versuch, die Ungleichung (3.12) zu zeigen. Dabei wird in [Mor61] Lemma 3.2.6 für Anfangsdaten ohne kompakte Träger verwendet. Ein Versuch, Lemma 3.2.6 für solche Anfangsdaten auszuweiten, hat sich als sehr komplex herausgestellt. Daher wurde ein alternativer Ansatz gesucht. Mithilfe von Bemerkung 3.2.3 gelang schlussendlich der Beweis.

4 Exponentielles Abklingen der lokalen Energie in 3D

Ziel dieses Kapitels ist es die lokale Energie schwacher Lösungen von

$$\Delta u - u_{tt} = 0 \quad \text{in } \Omega \times [0, \infty), \tag{4.1}$$

zu analysieren. Sei dafür $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{B}$ abgeschlossen und beschränkt ist. Zudem wollen wir Ω als zusammenhängend und $\partial\mathcal{B} \in C^2$ annehmen. Weiters erfülle u die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \tag{4.2}$$

wobei $f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $g \in H_0^1(\Omega)$. Beide Funktionen haben kompakte Träger in Ω. Außerdem gelte die Randbedingung

$$\Lambda u = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{B} \times [0, \infty). \tag{4.3}$$

Mit Λ bezeichnen wir einen Differentialoperator 1. Ordnung, der die Energie in Ω erhält (siehe Definition 2.5.3). Sei $\rho > 0$ so gewählt, dass $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g, \mathcal{B} \subseteq U_\rho((0, 0, 0))$ gilt. Wir verwenden für die lokale Energie die Notation aus Abschnitt 2.5. Der Inhalt dieses Kapitels beruht auf [Mor66]. In [Mor66] wird nicht genauer spezifiziert, welche Art von Lösungen untersucht werden sollen. Aufgrund von Resultaten aus der Halbgruppentheorie (siehe [MO19, Theorem 16.2.1], [Ika00, Kapitel 2.3 (c)] und [Jüa, Satz 5.23]) und den gegebenen Anfangsdaten erscheint es sinnvoll, Lösungen der Form

$$u \in C^0([0, \infty); H^2(\Omega)) \;\cap\; C^1([0, \infty); H^1(\Omega)) \;\cap\; C^2([0, \infty); L^2(\Omega))$$

zu betrachten. Wenn wir im Folgenden die Funktion u als Lösung bezeichnen, dann meinen wir eine Lösung in dem eben beschriebenen Sinne. Wegen des Huygens-Prinzip tritt im dreidimensionalen Raum ein spannendes Phänomen auf: Die lokale Energie einer Lösung u klingt schon exponentiell ab, wenn es nur irgendeine Abklingfunktion gibt.

Satz 4.0.1. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge und u eine Lösung von (4.1), (4.2) und (4.3). Angenommen es existiert eine stetige Funktion $p(t)$ mit $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$, sodass*

$$E(u^*, D, t) < p(t) E(u^*, \infty, 0)$$

für alle Lösungen u^* von (4.1), die (4.3) und $\operatorname{supp} u^*(., 0) \subseteq U_{3\rho}((0, 0, 0))$ erfüllen, gilt. Dann sinkt die lokale Energie in D exponentiell ab

$$E(u, D, t) < \beta e^{-\alpha t} E(u, \infty, 0),$$

wobei $\alpha = -\log(kp(T - 2\rho))/T > 0$ für eine festes T und $\beta = k \exp(\alpha(r_0 + \rho + \delta T))$ mit $0 \leq \delta \leq 1$. Dabei sei r_0 so gewählt, dass $D \subseteq U_{r_0}((0, 0, 0))$. Die Konstante k hängt von der Form von $\mathcal{B}$ ab.

4.1 Zerlegung der Lösung

Man kann die Lösung u zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 als Summe von zwei Funktionen darstellen. Die erste Funktion verschwindet nach einer gewissen Zeit $t_1 + \varepsilon$ auf D und die andere Funktion hat eine geringere Energie als u. Beide Funktionen sind ebenfalls Lösungen von Wellengleichungen. Wir werden zeigen, dass wir die zweite Funktion wieder aufspalten können. Dieser Prozess kann also iteriert werden und erzeugt somit die exponentielle Abklingrate. Ziel diese Abschnitts ist es, die Existenz dieser Zerlegungen zu zeigen.

Dafür benötigen wir ein Resultat für Sobolevfunktionen: Funktionen aus den Räumen $H^1(\Omega)$ und $H^2(\Omega)$ können auf den gesamten Raum $\mathbb{R}^3$ derartig fortgesetzt werden, sodass die Fortsetzungen ebenfalls Sobolevfunktionen sind. Dieser Prozess kann mittels eines linearen und beschränkten Operators beschrieben werden. Einen Beweis für diese Aussage findet man in [Eva10, Kapitel 5.4]. Für unsere Zwecke benötigen wir jedoch Fortsetzungen, die bestimmte Bedingungen erfüllen. Ein solches Resultat wird in [Ika00, Lemma 4.12] formuliert. Der Beweis dieser Aussage wird in [Ika00] dem Leser überlassen.

Lemma 4.1.1. *Seien $f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $g \in H_0^1(\Omega)$. Es existieren Funktionen $f_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ und $g_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, sodass $f_0 \equiv f$ und $g_0 \equiv g$ auf Ω. Zudem gilt*

$$\|\nabla f_0\|_{L^2(U_R(0))} \leq C\|\nabla f\|_{L^2(\Omega_R)},$$
$$\|g_0\|_{L^2(U_R(0))} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega_R)},$$

wobei $R \geq \rho$ und C unabhängig von f und g ist. Wie schon zuvor gilt $\Omega_R := \Omega \cap U_R((0,0,0))$.

Lemma 4.1.2. *Eine Lösung u von (4.1), (4.2) und (4.3) kann man zerlegen in*

$$u = F_0 + R_0.$$

Wir können F_0 so wählen, dass

$$F_0 \equiv 0 \quad \text{für} \quad |x| \equiv r \leq t - \rho.$$

Dann verschwindet F_0 auf $\mathcal{B}$ für alle $t \geq 2\rho$. Für $t \leq 2\rho$ gilt $\operatorname{supp} R_0(.,t) \subseteq U_{3\rho}((0,0,0))$. Zudem erhalten wir

$$E(R_0, \infty, 2\rho) \leq kE(u, \infty, 0)$$

für ein $k > 0$.

Beweis. Sei $F_0 \in C^0([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C^2([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^3))$ Lösung von

$$\Delta F_0 - F_{0tt} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$$
$$F_0(x,0) = f_0(x),\ F_{0t}(x,0) = g_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3.$$

Dabei sind $f_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ und $g_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ jene Fortsetzungen von f bzw. g, die sich aus Lemma 4.1.1 ergeben. Da Q äquivalent zu der H^1-Norm in x und t ist, gibt es ein μ, sodass

$$\int_{\mathcal{B}} Q(F_0(.,0))\, dx \leq \mu \int_{\Omega} Q(F_0(.,0))\, dx \tag{4.4}$$

gilt. Die Existenz von F_0 erhalten wir aus [Jüa, Satz 5.23]. Aus dem Huygens-Prinzip und $\operatorname{supp} f_0, \operatorname{supp} g_0 \subseteq U_\rho((0,0,0))$ folgt $F_0 \equiv 0$ für $|x| \leq t-\rho$. Weil $\mathcal{B} \subseteq U_\rho((0,0,0))$, verschwindet F_0 auf $\mathcal{B}$ für alle $t \geq 2\rho$.

Wir definieren $R_0 := u - F_0$. Dann folgt direkt $R_0(.,t) \in H^2(\Omega)$ und $R_{0t}(.,t) \in H^1(\Omega)$. In $\Omega \times [0,\infty)$ gilt

$$\Delta R_0 - R_{0tt} = \Delta u - u_{tt} - (\Delta F_0 - F_{0tt}) = 0.$$

Für $x \in \Omega$ ergibt sich zudem

$$\begin{aligned} R_0(x,0) &= u(x,0) - F_0(x,0) = f(x) - f_0(x) = 0, \\ R_{0t}(x,0) &= u_t(x,0) - F_{0t}(x,0) = g(x) - g_0(x) = 0. \end{aligned}$$

Also erfüllt R_0 die Differentialgleichung (4.1) mit homogenen Anfangsbedingungen. Weil $\Lambda u = 0$ auf $\partial\mathcal{B}$ und $F_0 \equiv 0$ auf $\mathcal{B}$ für $t \geq 2\rho$, folgt $\Lambda R_0 = -\Lambda F_0$ für $0 \leq t < 2\rho$ und $\Lambda R_0 = -\Lambda F_0 = 0$ für $t \geq 2\rho$. Daher ist $E(R_0,\infty,t)$ konstant für $t \geq 2\rho$.

Für die Energie gilt

$$E(R_0,\infty,2\rho) = E(u-F_0,\infty,2\rho) \leq 2E(u,\infty,2\rho) + 2E(F_0,\infty,2\rho).$$

Weil F_0 auf $\mathcal{B} \times \{2\rho\}$ verschwindet, folgt $E(F_0,\infty,2\rho) = \tilde{E}(F_0,\infty,2\rho) = \tilde{E}(F_0,\infty,0)$. Die letzte Gleichung ergibt sich aus dem Energieerhaltungssatz. Wegen $\Lambda u = 0$ gilt $E(u,\infty,2\rho) = E(u,\infty,0)$. Mittels (4.4) erhalten wir

$$\tilde{E}(F_0,\infty,0) = E(F_0,\infty,0) + E(F_0,\mathcal{B},0) \leq (1+\mu)E(F_0,\infty,0) = (1+\mu)E(u,\infty,0).$$

In Summe ergibt sich

$$\begin{aligned} E(R_0,\infty,2\rho) &\leq 2E(u,\infty,2\rho) + 2E(F_0,\infty,2\rho) = 2E(u,\infty,0) + 2E(F_0,\infty,2\rho) \\ &\leq 2E(u,\infty,0) + 2(1+\mu)E(u,\infty,0) = (4+2\mu)E(u,\infty,0), \end{aligned}$$

mit $k := 4 + 2\mu$.

Wir wollen noch $\operatorname{supp} R_0(.,t) \subseteq U_{3\rho}((0,0,0))$ für $t \leq 2\rho$ zeigen. Die Anfangsdaten von F_0 und u breiten sich mit einer Geschwindigkeit von 1 aus. Weil $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g, \operatorname{supp} f_0, \operatorname{supp} g_0 \subseteq U_\rho((0,0,0))$, folgt $u(x,2\rho) = 0$ und $F_0(x,2\rho) = 0$ für $|x| > 3\rho$. Wegen $u = F_0 + R_0$, folgt die Aussage. $\square$

Betrachten wir den Fall $\Lambda u = u$. Fasst man alle Raumdimensionen auf der x-Achse zusammen, so breiten sich F_0 und R_0 wie in Abbildung 4.1 aus. Für F_0 werden zwei exemplarische Charakteristiken dargestellt.

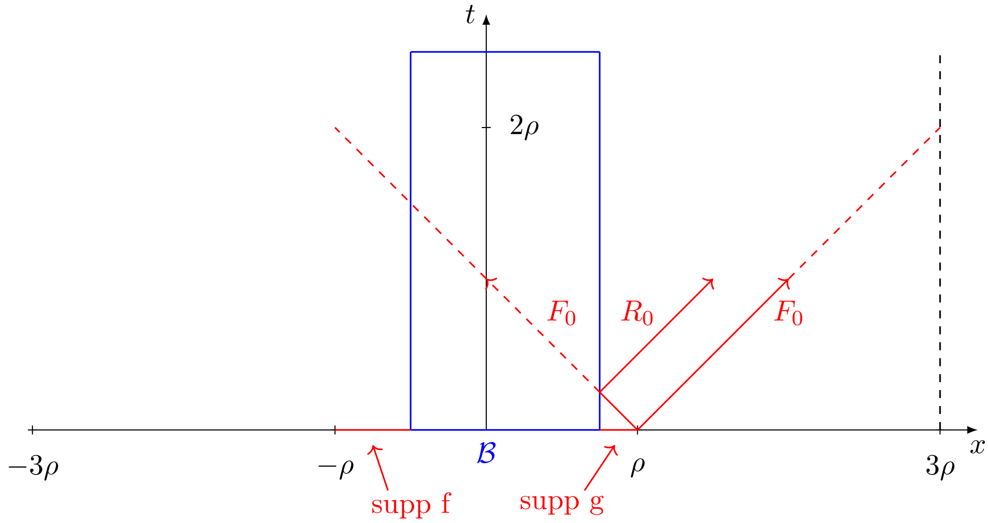

Abbildung 4.1: Ausbreitung von F_0 und R_0 für den Zeitraum $[0, 2\rho]$

Lemma 4.1.3. *Mit der Notation aus Lemma 4.1.2 folgt: Für jedes $T \geq 2\rho$ kann man R_0 zerlegen in $R_0 = F_1 + R_1$. Hierbei gilt $F_1 \equiv 0$ für $r = |x| \leq t - T - \rho$ und F_1 verschwindet auf $\mathcal{B}$ für alle $t \geq T + 2\rho$. Die Funktion R_1 löst*

$$\begin{aligned} \Delta R_1 - R_{1tt} &= 0 && \textit{auf } \Omega \times [T, \infty), \\ R_1(x, T) = R_{1t}(x, T) &= 0 && \textit{für } x \in \Omega, \\ \Lambda R_1 &= -\Lambda F_1 && \textit{auf } \partial\mathcal{B}. \end{aligned}$$

Zudem folgt

$$E(R_1, \infty, T + 2\rho) \leq kE(R_0, D_0, T) \tag{4.5}$$

wobei $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 3\rho\}$. Zuletzt erhalten wir $\operatorname{supp} R_1(., T + 2\rho) \subseteq U_{3\rho}((0, 0, 0))$.

Beweis. Wir wählen $F_1 \equiv R_0$ für $t < T$. Für $t \geq T$ sei F_1 Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta F_1 - F_{1tt} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^3 \times [T, \infty), \\ F_1(x, T) = h_0(x),\ F_{1t}(x, T) &= h_1(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Dabei sind $h_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$ und $h_1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ Fortsetzungen von $R_0(., T) \in H^2(\Omega)$ bzw. $R_{0t}(., T) \in H^1(\Omega)$, die

$$\int_{\mathcal{B}} Q(F_1(., T))\, dx \leq \mu \int_{D_0 \cap \Omega} Q(R_0(., T))\, dx \tag{4.6}$$

erfüllen. Wie schon im vorigen Lemma erhalten wir die Existenz dieser Fortsetzungen aus Lemma 4.1.1. Die Existenz von F_1 folgt wieder aus [Jüa, Satz 5.23].

Wir wollen $F_1(x,t) = 0$ für $r \leq t - T - \rho$ zeigen. Weil $\mathcal{B} \subseteq U_\rho((0,0,0))$, folgt daraus direkt $F_1 = 0$ in $\mathcal{B} \times [T + 2\rho, \infty)$. Aufgrund der Wahl von F_1 erhalten wir $\Delta F_1 - F_{1tt} = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \backslash \mathcal{B} \times [0,T]$. Solange

$$\mathcal{B} \times [0,T] \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \mid |x - x_0| = (t_0 - t)\} = \emptyset \tag{4.7}$$

gilt, hängt $F_1(x_0,t_0)$ nur von $F_1(.,0)$ auf der Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - x_0| = t_0\}$ ab. Diese Tatsache folgt aus dem Huygens-Prinzip, welches für F_1 auf der Menge $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \backslash \mathcal{B} \times [0,T]$ erfüllt ist. Für $t < T$ gilt jedoch $F_1 = R_0$. Also ergibt sich $F_1(x_0,t_0)$ aus den Werten von $R_0(.,0)$. Lemma 4.1.2 besagt $R_0(.,0) = 0$ in Ω. Weil alle Punkte $(x_0,t_0) \in \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \mid |x| \leq t - T - \rho\}$ die Eigenschaft (4.7) besitzen, folgt $F_1(x_0,t_0) = 0$ für $r \leq t - T - \rho$. Wir müssen noch (4.7) für diese Wahl von (x_0,t_0) beweisen. Dafür zeigen wir, dass aus $(y,\tau) \in \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T] \mid |x - x_0| = (t_0 - t)\}$ direkt $|y| \geq \rho$ folgt. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} |y| &= |y - x_0 + x_0| \geq |y - x_0| - |x_0| = t_0 - \tau - |x_0| \\ &\geq t_0 - \tau - (t_0 - T - \rho) = T + \rho - \tau \geq \rho. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{B} \subseteq U_\rho((0,0,0))$, kann (y,τ) nicht in $\mathcal{B} \times [0,T]$ liegen. Fasst man alle Raumdimensionen in der $x-$Achse zusammen, so erhält man folgende Skizze für die Charakteristiken von F_1.

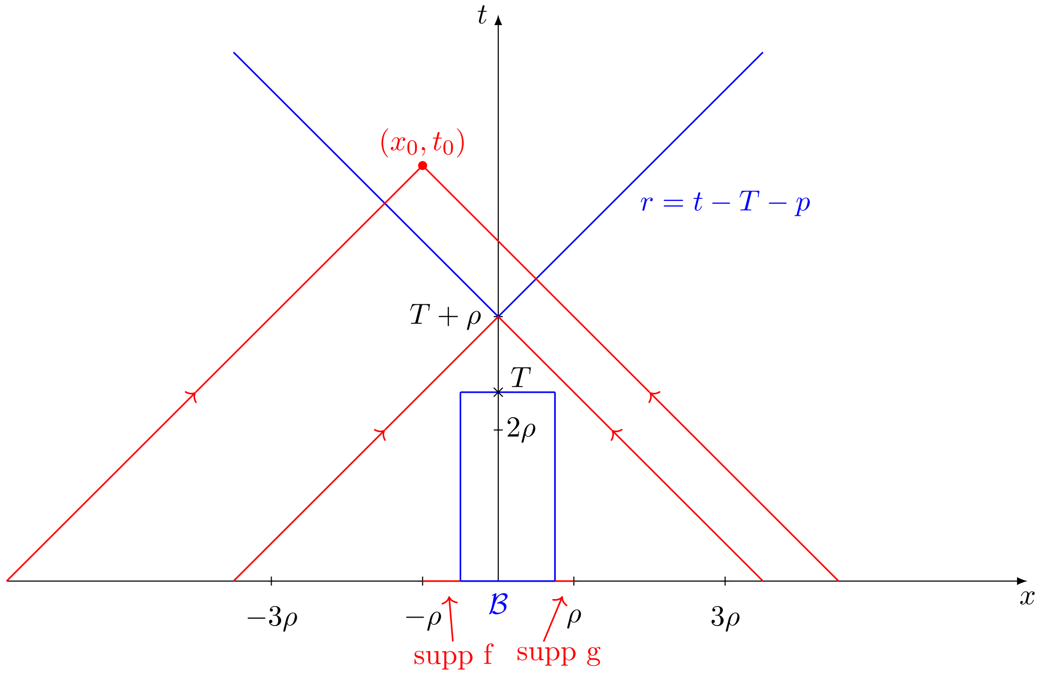

Abbildung 4.2: Charakteristiken von F_1 an Punkten in $\{(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \mid |x| \leq t - T - \rho\}$

Wir definieren $R_1 := R_0 - F_1$ und erhalten

$$\begin{aligned} \Delta R_1 - R_{1tt} = 0 \quad & \text{in } \Omega \times [T,\infty), \\ R_1(.,T) = 0,\ R_{1t}(.,T) = 0 \quad & \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Aus Lemma 4.1.2 wissen wir, dass $\Lambda R_0 = 0$ auf $\partial\mathcal{B} \times [2\rho, \infty)$, also $\Lambda R_1 = -\Lambda F_1$ auf $\partial\mathcal{B} \times [2\rho, \infty)$.

Für $t \geq T$ erfüllt F_1 die Wellengleichung im gesamten Raum. Aus dem Huygens-Prinzip folgt, dass $F_1(x,t)$ von $F_1(.,T)$ auf $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid |x-y| = t-T\}$ abhängt. Sei $x \in \mathcal{B}$ und $t \in [T, 2\rho + T]$, dann ergibt sich $F_1(x,t)$ aus den Werten von $F_1(.,T)$ auf $U_{3\rho}((0,0,0))$. In Abbildung 4.1 wird der Abhängigkeitsbereich von F_1 für $(x,t) \in \mathcal{B} \times [T, 2\rho + T]$ dargestellt. Abermals wurden die Raumdimensionen in eine Dimension zusammengefasst.

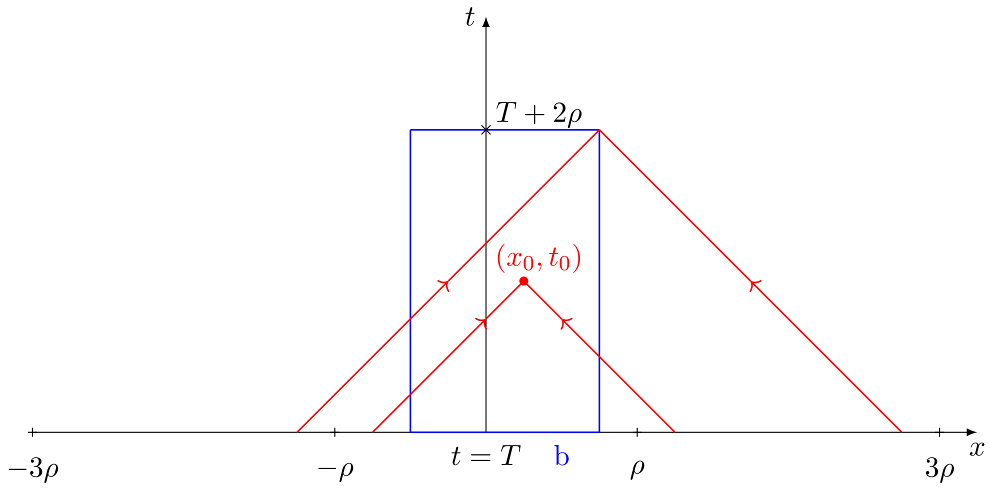

Abbildung 4.3: Abhängigkeitsbereich von F_1 für $(x_0, t_0) \in \mathcal{B} \times [T, 2\rho + T]$

Es bleibt noch die Ungleichung (4.5) und $\operatorname{supp} R_1(., T+2\rho) \subseteq U_{3\rho}((0,0,0))$ zu zeigen. Dazu wollen wir ähnlich wie in Lemma 4.1.2 vorgehen. Davor müssen wir jedoch passende Gegebenheiten schaffen. Sei $\tilde{F}_1$ Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{F}_1 - \tilde{F}_{1tt} &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^3 \times [T, \infty), \\ \tilde{F}_1(x,T) = F_1(x,T),\ \tilde{F}_{1t}(x,T) &= F_{1t}(x,T) && \text{für } |x| \leq 3\rho, \\ \tilde{F}_1(x,T) = 0,\ \tilde{F}_{1t}(x,T) &= 0 && \text{für } |x| > 3\rho. \end{aligned}$$

Mit dieser Definition gilt $\Lambda F_1 = \Lambda\tilde{F}_1$ auf $\partial\mathcal{B} \times [T, 2\rho + T]$. Wähle $\tilde{R}_0 := R_1 + \tilde{F}_1$, dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{R}_0 - \tilde{R}_{0tt} &= 0 && \text{auf } \Omega \times [T, \infty), \\ \tilde{R}_0(x,T) = R_0(x,T),\ \tilde{R}_{0t}(x,T) &= R_{0t}(x,T) && \text{für } |x| \leq 3\rho, \\ \tilde{R}_0(x,T) = 0,\ \tilde{R}_{0t}(x,T) &= 0 && \text{für } |x| > 3\rho, \\ \Lambda\tilde{R}_0 &= 0 && \text{auf } \partial\mathcal{B} \times [T, 2\rho + T]. \end{aligned}$$

Man erhält direkt

$$E(R_1, \infty, T+2\rho) \leq 2E(\tilde{R}_0, \infty, T+2\rho) + 2E(\tilde{F}_1, \infty, T+2\rho).$$

Da $\Lambda\tilde{R}_0 = 0$ für $t \in [T, 2\rho + T]$, ist die Energie von $\tilde{R}_0$ für dieses Zeitintervall konstant, also $E(\tilde{R}_0, \infty, T+2\rho) = E(\tilde{R}_0, \infty, T) = E(R_0, D_0, T)$. Die letzte Gleichung folgt wegen den Anfangsdaten von $\tilde{R}_0$. Wir betrachten nun $E(\tilde{F}_1, \infty, T + 2\rho)$ genauer. Wir haben $F_1 = \tilde{F}_1$ für $x \in \mathcal{B}$, $t = 2\rho + T$ und daher $\tilde{F}_1(x, T + 2\rho) = F_1(x, T + 2\rho) = 0$. Für die Energie folgt

$$E(\tilde{F}_1, \infty, T + 2\rho) = \tilde{E}(\tilde{F}_1, \infty, T + 2\rho) = \tilde{E}(\tilde{F}_1, \infty, T),$$

wobei sich die letzte Gleichung aus dem Energieerhaltungssatz ergibt. Diesen Ausdruck können wir weiter umformen zu

$$\tilde{E}(\tilde{F}_1, \infty, T) = E(\tilde{F}_1, \infty, T) + E(\tilde{F}_1, \mathcal{B}, T) = E(\tilde{F}_1, \infty, T) + E(F_1, \mathcal{B}, T).$$

Die letzte Gleichung ergibt sich, da $F_1(., T) = \tilde{F}_1(., T)$ auf $\mathcal{B}$. Mit Hilfe von (4.6) und den Definitionen von $\tilde{F}_1$ und F_1 können wir den Ausdruck weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} &E(\tilde{F}_1, \infty, T) + E(F_1, \mathcal{B}, T) \overset{(4.6)}{\leq} E(F_1, D_0 \cap \Omega, T) + \mu E(R_0, D_0 \cap \Omega, T) \\ &= (1 + \mu)E(R_0, D_0 \cap \Omega, T) \leq (1 + \mu)E(R_0, D_0, T). \end{aligned}$$

Setzen wir die Ungleichungen zusammen, so ergibt sich

$$E(R_1, \infty, T + 2\rho) \leq 2E(R_0, D_0, T) + 2(1 + \mu)E(R_0, D_0, T) = (4 + 2\mu)E(R_0, D_0, T).$$

Weil sich die Störungen von R_1 zum Zeitpunkt T mit Geschwindigkeit 1 ausbreiten, folgt $\operatorname{supp} R_1(., T + 2\rho) \subseteq U_{3\rho}((0, 0, 0))$. $\square$

4.2 Hauptresultat

Mithilfe der Aussagen aus dem letzten Abschnitt können wir Satz 4.0.1 beweisen.

Satz 4.2.1. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge und u eine Lösung von (4.1), (4.2) und (4.3). Angenommen, es existiert eine stetige Funktion $p(t)$ mit $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$, sodass*

$$E(u^*, D, t) < p(t)E(u^*, \infty, 0)$$

für alle Lösungen u^* von (4.1), die (4.3) und $\operatorname{supp} u^*(., 0) \subseteq U_{3\rho}((0, 0, 0))$ erfüllen, gilt. Dann sinkt die lokale Energie in D exponentiell ab

$$E(u, D, t) < \beta e^{-\alpha t} E(u, \infty, 0),$$

wobei $\alpha = -\log(kp(T - 2\rho))/T > 0$ für eine festes T und $\beta = k \exp(\alpha(r_0 + \rho + \delta T))$ mit $0 \leq \delta \leq 1$. Dabei sei r_0 so gewählt, dass $D \subseteq U_{r_0}((0, 0, 0))$. Die Konstante k hängt von der Form von $\mathcal{B}$ ab.

Beweis. Aus Lemma 4.1.3 erhalten wir $R_0 = F_1 + R_1$ für $t \geq T$ und

$$E(R_1, \infty, T + 2\rho) \leq kE(R_0, D_0, T).$$

Wir definieren $\bar{R}(x,t) := R_0(x, t+2\rho)$. Aus Lemma 4.1.2 folgt $\operatorname{supp} R_0(.,2\rho) \subseteq U_{3\rho}((0,0,0))$. Daher können wir die Voraussetzung dieses Satzes auf $\bar{R}$ anwenden und erhalten

$$E(R_0, D_0, T) = E(\bar{R}, D_0, T-2\rho) \leq p(T-2\rho)E(\bar{R}, \infty, 0) = p(T-2\rho)E(R_0, \infty, 2\rho)$$

In Summe ergibt sich

$$E(R_1, \infty, T+2\rho) \leq kp(T-2\rho)E(R_0, \infty, 2\rho). \tag{4.8}$$

Lemma 4.1.3 besagt $\operatorname{supp} R_1(., T+2\rho) \subseteq U_{3\rho}((0,0,0))$. Die Funktion R_1 erfüllt zum Zeitpunkt $T+2\rho$ alle Voraussetzungen von Lemma 4.1.3. Wir erhalten somit für alle $T' \geq 2\rho+T$ eine Zerlegung $R_1 = F_2 + R_2$. Insbesondere gibt es so eine Zerlegung für den Zeitpunkt $2T$: Es gilt $R_1(.,t) = F_2(.,t) + R_2(.,t)$ für $t \geq 2T$. Zudem folgt

$$E(R_2, \infty, 2T+2\rho) \leq kp(T-2\rho)E(R_1, \infty, T+2\rho)$$

aus (4.8), wenn wir Lemma 4.1.3 auf R_1 zum Zeitpunkt $T+2\rho$ anwenden. Iterieren wir diesen Prozess, so folgt für $t \geq nT$

$$R_0 = \sum_{j=1}^{n} F_j + R_n \quad \text{und} \quad u = F_0 + R_0. \tag{4.9}$$

Lemma 4.1.2 liefert uns $F_j \equiv 0$ für $r \leq t - jT - \rho$. Für R_j erhalten wir

$$E(R_j, \infty, jT+2\rho) \leq kp(T-2\rho)E(R_{j-1}, \infty, (j-1)T+2\rho)$$

aus Lemma 4.1.3. Setzen wir diese Ungleichungen zusammen, so ergibt sich

$$E(R_n, \infty, nT+2\rho) \leq k^n(p(T-2\rho))^n E(R_0, \infty, 2\rho).$$

Wegen $\Lambda R_n = 0$ auf $\mathcal{B} \times [nT+2\rho, \infty)$ ist die Energie von R_n konstant für $t \geq nT+2\rho$. Aus Lemma 4.1.2 folgt

$$E(R_n, \infty, t) = E(R_n, \infty, nT+2\rho) \leq k\exp(n(\log(kp(T-2\rho))))E(u, \infty, 0)$$

für $t \geq nT+2\rho$. Sei $r_0 \geq \rho$, sodass $D \subseteq U_{r_0}((0,0,0))$. Angenommen es gilt $t - nT - \rho \geq r_0$, dann ergibt sich

$$E(u, D, t) = E(R_n, D, t) \leq E(R_n, \infty, t) \leq k\exp(n\log(kp(T-2\rho)))E(u, \infty, 0)$$

aus (4.9). Wir wählen T nun so groß, dass $\log(kp(T-2\rho)) = -\alpha T$ für ein $\alpha > 0$. Das ist möglich, weil $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$. Wir wollen t und n so bestimmen, dass $t - nT - \rho \geq r_0$ erfüllt ist. Sei also t so, dass $\frac{t-r_0-\rho}{T} \geq 1$ gilt, und $n := \frac{t-r_0-\rho}{T} - \delta \in \mathbb{N}$, wobei $0 \leq \delta < 1$. Mit dieser Wahl der Parameter folgt $t - nT - \rho \geq r_0$ und $t \geq nT + 2\rho$. Daher erhalten wir

$$E(u, D, t) \leq k\exp(-\alpha t + \alpha(r_0 + \rho + \delta T))E(u, \infty, 0),$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. $\square$

Literaturverzeichnis

[Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[Ika00] Mitsuru Ikawa. *Hyperbolic partial differential equations and wave phenomena*, volume 189 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. Translated from the 1997 Japanese original by Bohdan I. Kurpita, Iwanami Series in Modern Mathematics.

[Jon50] Burton W. Jones. *The Arithmetic Theory of Quadratic Forms.* Carcus Monograph Series, no. 10. The Mathematical Association of America, Buffalo, N. Y., 1950.

[Jüa] A. Jüngel. *Eine Einführung in die Halbgruppentheorie.* Vorlesungsskriptum zur Lehrveranstaltung „Eine Einführung in die Halbgruppentheorie“, Technische Universität Wien, 2001.

[Jüb] A. Jüngel. *Partielle Differentialgleichungen.* Vorlesungsskriptum zur Lehrveranstaltung „Partielle Differentialgleichungen“, Technische Universität Wien, 2019.

[MO19] Marin Marin and Andreas Öchsner. *Essentials of partial differential equations.* Springer, Cham, 2019. With applications.

[Mor61] Cathleen S. Morawetz. The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:561–568, 1961.

[Mor66] Cathleen S. Morawetz. Exponential decay of solutions of the wave equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 19:439–444, 1966.

[SG] S. Sivaji Ganesh. *Wave Equation- II.* Vorlesungsskriptum zur Lehrveranstaltung „Partial differential equations“, IIT Bombay, 2015.