



BACHELORARBEIT

Schwache Formulierung der zeitunabhängigen Maxwellgleichungen

und elementare Existenz- und Eindeigkeitstheorie für
elliptische PDEs

Ausgeführt am Institut für Analysis und Scientific Computing der
Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Anton Arnold

durch
Michael Innerberger
1225448

Wien, am 1. Dezember 2015

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
1 Physikalische Grundlagen	4
1.1 Die Maxwellgleichungen	4
1.2 Potentialtheorie und Eichungen	5
1.2.1 Feldgleichungen der elektromagnetischen Potentiale	5
1.2.2 Coulomb-Eichung	6
1.2.3 Der zeitunabhängige Fall	8
1.3 Maxwellgleichungen in Materie	8
1.3.1 Verhalten an Materialgrenzen	9
2 Analytische Grundlagen	11
2.1 Elliptische Lösungstheorie und schwache Lösungen	11
2.2 Sobolevräume	14
2.3 Der Spursatz für $H^1(\mathbb{R}^n)$	16
2.4 Gewichtete Sobolevräume	19
3 Lösungsräume $H(\operatorname{div} 0)$, $H(\operatorname{rot} 0)$	24
3.1 Definition	24
3.2 Spursätze	27
3.3 Hodge-Zerlegungen	29
3.3.1 Geometrie	30
3.3.2 Charakterisierung von Vektorfeldern	31
3.3.3 Zerlegung unter allgemeineren Voraussetzungen	41
4 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen konkreter Probleme	44
4.1 Feld einer Ladungsverteilung im \mathbb{R}^3	44
4.2 Feld in einem Hohlraum	46
4.3 Feld in Anwesenheit dielektrischer Materie	49
Nachwort	51
Literaturverzeichnis	52

Vorwort

Viele wichtige zeitunabhängige Probleme der Physik führen auf elliptische partielle Differentialgleichungen (PDEs). So auch die zeitunabhängigen Maxwellgleichungen, die die Phänomene des statischen Elektromagnetismus beschreiben. Diese lassen sich oft mittels numerischer Verfahren sehr gut approximativ lösen, sofern die Existenz einer eindeutigen Lösung garantiert ist. Deshalb ist die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen auch im Zeitalter der numerischen Lösungsverfahren von großem Interesse.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die zeitunabhängigen Maxwellgleichungen in eine für die numerische Lösung nützliche Form - die schwache Formulierung - zu bringen und im Zuge dessen eine gut verständliche Einführung in Existenz- und Eindeutigkeitstheorie elliptischer partieller Differentialgleichungen zu geben. Dabei werden wir auf einem Grundkurs über PDEs aufbauen, wie er etwa in [8] gegeben ist, und aus einigen Büchern und Fachartikeln zusammenfassen, sowie Resultate und Schreibweisen vereinheitlichen. Die wichtigsten Quellen sind [4], das sich mit der mathematischen Formulierung und Lösung physikalischer Probleme befasst und ein Kapitel über Elektromagnetismus beinhaltet, und [6], in dem es um die numerische Behandlung von strömungsmechanischen Problemen geht, die mit denen des Elektromagnetismus eng verknüpft sind. Es werden dazu Grundkenntnisse über PDEs und Sobolevräume vorausgesetzt, die im Rahmen dieser Arbeit erweitert werden sollen. Weiter werden Kenntnisse über Fouriertransformation, Distributionentheorie und Hilberträume benötigt, um allen Beweisen folgen zu können. Dies lässt sich alles in [8] nachlesen.

Zunächst soll in Kapitel 1 eine Einführung in die physikalische Theorie des statischen Elektromagnetismus gegeben werden. Besonderes Augenmerk liegt hier auf der Methode der elektromagnetischen Potentiale, die sich für mathematische Betrachtungen besonders eignen. In Kapitel 2 wird dann mit den Sobolevräumen und dem Lemma von Lax-Milgram ein allgemeines Werkzeug vorgestellt, das Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen von elliptischen PDEs liefern kann. Den Hauptteil der Arbeit, nämlich das nötige Werkzeug zu entwickeln, um die zeitunabhängigen Maxwellgleichungen in die schwache Formulierung zu bringen, macht Kapitel 3 aus. Schließlich werden in Kapitel 4 noch einige physikalisch relevante Probleme angeführt und die erarbeiteten Resultate darauf angewendet.

1 Physikalische Grundlagen

Am Anfang sollen die physikalischen Grundgleichungen der Elektrodynamik vorgestellt werden, die die Grundlage für die im Folgenden betrachteten Probleme darstellen. Dies soll nur dazu dienen, die behandelten Gleichungen kennenzulernen und manche mathematische Sachverhalte später physikalisch interpretieren zu können. Dazu werden in 1.1 die Maxwellgleichungen im Vakuum postuliert und eine kurze Einführung in die Bedeutung der einzelnen Gleichungen gegeben. Danach widmen wir uns in Abschnitt 1.2 den elektromagnetischen Potentialen, die die Maxwellgleichungen auf eine für unsere Zwecke handlichere Form bringen und betrachten den zeitunabhängigen Fall. Schließlich werden wir in Abschnitt 1.3 auch Materialgesetze miteinbeziehen, da dies einen für naturwissenschaftliche Anwendungen sehr interessanten Fall darstellt. Die folgenden Darstellungen richten sich nach [2, Kapitel 11].

1.1 Die Maxwellgleichungen

Da das Hauptaugenmerk dieser Arbeit auf der mathematischen Untersuchung elektromagnetischer Probleme liegt, sollen deren Grundgleichungen, die Maxwellgleichungen, hier nicht hergeleitet, sondern nur angegeben und eine kurze physikalische Interpretation der auftretenden Terme gegeben werden. Dabei wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auf zu große mathematische Strenge verzichtet. Hier wird das in der theoretischen Physik gebräuchliche Gauß'sche Einheitensystem verwendet, da hier möglichst wenige Konstanten vorkommen und so die Gleichungen selbst im Vordergrund stehen. Für Darstellungen in anderen Einheitensystemen, wie dem weitverbreiteten SI-System, sei auf die Literatur verwiesen.

Es werden vorerst die Maxwellgleichungen im Vakuum in differentieller Form besprochen und später die Spezialfälle und Verallgemeinerungen angeführt, mit denen hier hauptsächlich gearbeitet werden soll. Sie lauten:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{x}, t), \quad (1.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.1b)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \quad (1.1c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t). \quad (1.1d)$$

Hierbei sind $\mathbf{E}, \mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die elektrische, respektive die magnetische Feldstärke (oft auch nur elektrisches, beziehungsweise magnetisches Feld genannt), $\mathbf{j} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die räumliche Stromdichte und $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die räumliche Ladungsdichte. Im Weiteren werden oft die Argumente weggelassen und (nach dem Vorbild vieler physikalischer Arbeiten) mehrdimensionale Vektoren durch fetten Druck gekennzeichnet. Räumliche Strom- und Ladungsdichte sind über die sogenannte *Kontinuitätsgleichung* miteinander verbunden, die aus (1.1a) und (1.1d) folgt:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.2)$$

Die physikalische Interpretation dieser Gleichungen gibt zu verstehen, wie sich die elektrische und magnetische Feldstärke in Anwesenheit von Strom- und Ladungsdichten verhalten und sich gegenseitig beeinflussen. Gleichung (1.1a) besagt, dass die Quellen des elektrischen Feldes durch die räumliche Ladungsverteilung gegeben sind und heißt auch *Gauß'sches Gesetz*. Analog besagt (1.1b), dass das magnetische Feld quellenfrei ist. Das *Faraday'sche Induktionsgesetz*, Gleichung (1.1c), sagt aus, dass ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld einen Wirbelstrom erzeugt, der dieser zeitlichen Änderung entgegenwirkt. Die letzte Gleichung (1.1d) besagt, dass sowohl ein fließender Strom, als auch ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld ein drehendes Magnetfeld erzeugt.

Die Interpretation der Kontinuitätsgleichung (1.2) wird klar, wenn sie in Integralform geschrieben wird. Unter der Voraussetzung hinreichend regulärer Funktionen \mathbf{j} und ρ und Volumina Ω , folgt diese durch Integration und den Gauß'schen Integralsatz:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, dx.$$

Hier bezeichnet \mathbf{n} den normierten äußeren Normalenvektor an den Rand $\partial\Omega$ des Gebietes Ω . An dieser Form ist leicht ersichtlich, dass die zeitliche Abnahme der Gesamtladung in einem Volumen gleich dem Stromfluss durch seine Oberfläche entspricht. Die Kontinuitätsgleichung stellt also eine Art Erhaltungsgleichung für Ladungen dar.

1.2 Potentialtheorie und Eichungen

1.2.1 Feldgleichungen der elektromagnetischen Potentiale

Die Maxwellgleichungen (1.1) sind ein System aus gekoppelten Differentialgleichungen. Um das Problem in eine für die folgenden Betrachtungen praktischere Form zu bringen werden nun die sogenannten *elektromagnetischen Potentiale* eingeführt. Da die folgenden Rechnungen nur zur Motivation dienen sollen, wird der Einfachheit halber angenommen, dass sowohl alle auftretenden Funktionen, als auch Mengen hinreichend regulär sind,

um die jeweiligen Schritte durchzuführen. Diese Überlegungen werden in Abschnitt 3.3 nochmals aufgegriffen und die Voraussetzungen präzisiert.

Betrachtet man zuerst Gleichung (1.1b), so kann man damit annehmen, dass sich das magnetische Feld unter den getroffenen Voraussetzungen als Rotation eines Vektorfeldes schreiben lässt:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.3)$$

Man nennt \mathbf{A} hierbei *Vektorpotential*. In der Tat gilt damit $\text{div } \mathbf{B} = \text{div } \text{rot } \mathbf{A} = 0$, wie man leicht durch explizites Differenzieren mit dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen verifiziert. Setzt man dies in (1.1c) ein, erhält man

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = \mathbf{0}.$$

Somit lässt sich der Ausdruck in Klammern als Gradient eines Skalarfeldes darstellen, womit sich für das elektrische Feld folgende Darstellung ergibt:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}. \quad (1.4)$$

Analog wird ϕ hier *Skalarpotential* genannt. Da man durch dieses Verfahren Potentiale einführt, die eine Lösung der Maxwellgleichungen erleichtern soll, spricht man bei der Behandlung der daraus resultierenden Gleichungen von Potentialtheorie.

Setzt man weiter die Identitäten (1.3) und (1.4) in die verbleibenden Maxwellgleichungen (1.1d) und (1.1a) ein, so folgen mit der Identität $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) = \nabla(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$ und durch Erweitern mit dem Summanden $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi$ die Feldgleichungen der elektromagnetischen Potentiale:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi \right) = -4\pi\rho, \quad (1.5a)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} - \nabla \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (1.5b)$$

Aufgrund des bei der Herleitung der elektromagnetischen Potentiale auftretenden Differentialoperators $\text{rot } \text{rot}$, wird diese Formulierung der Maxwellgleichungen auch manchmal *curl-curl-Formulierung* genannt, nach dem englischen Begriff curl für die Rotation eines Vektorfeldes.

1.2.2 Coulomb-Eichung

Betrachtet man die Gleichungen (1.5) komponentenweise und nimmt die Kontinuitätsgleichung (1.2) hinzu, erhält man insgesamt fünf skalarwertige Gleichungen für die vier Freiheitsgrade von \mathbf{j} und ρ . In diesen Gleichungen muss also eine gewisse Redundanz

stecken. Betrachtet man eine beliebige skalare Funktion Λ , so ändern sich, wie man leicht einsieht, durch die Transformationen

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \\ \phi &\rightarrow \phi + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.6}$$

elektrisches und magnetisches Feld nicht.

Das kann durch eine Eichung, also durch eine zusätzliche Gleichung, die diese Redundanz (teilweise) beseitigt, dazu genutzt werden, um die Gleichungen (1.5) zu vereinfachen. Es gibt viele Möglichkeiten einer Eichung, für den in dieser Arbeit betrachteten statischen Fall wird sich aber die sogenannte *Coulomb-Eichung*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

als die nützlichste erweisen. Durch diese zusätzliche Einschränkung vereinfachen sich die Feldgleichungen der Potentiale zu

$$\Delta\phi = -4\pi\rho,\tag{1.7a}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla\phi.\tag{1.7b}$$

Die erste Gleichung vereinfacht sich also zu einer Poissongleichung, die zweite zu einer inhomogenen Wellengleichung, die nacheinander gelöst werden können.

Eine weitere wichtige Eichung ist die Lorenz-Eichung $\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$. Damit erhält man an Stelle von (1.7) zwei inhomogene Wellengleichungen, die unabhängig voneinander gelöst werden können. Im zeitunabhängigen Fall sind Lorenz- und Coulomb-Eichung ident und führen daher auf die selben Gleichungen.

Durch diese Eichungen bleibt aber oft eine sogenannte Resteichfreiheit zurück. In der Coulomb-Eichung etwa, lässt sich für die wie in (1.6) transformierten Größe \mathbf{A} wegen

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} (\mathbf{A} + \nabla\Lambda) = \operatorname{div} \mathbf{A} + \Delta\Lambda = 0$$

in (1.6) eine Funktion, die $\Delta\Lambda = 0$ erfüllt, einsetzen. Für das skalare Potential ergibt sich aber durch das Wegfallen der zeitlichen Ableitung im zeitunabhängigen Fall keine Resteichfreiheit mehr. Dies wird sich auch in Abschnitt 3.3 widerspiegeln. Wir werden dort sehen, dass ϕ eindeutig bestimmt ist (bis auf eine Konstante, was bei Potentialen immer der Fall ist, weil man die Felder durch Ableitung aus diesen erhält). Für \mathbf{A} müssen aber noch zusätzliche Randbedingungen gefordert werden, damit eine Lösung Λ der Laplacegleichung (und damit auch \mathbf{A}) eindeutig bestimmt ist.

Man beachte außerdem, dass sich durch diese Umformungen zwar Poissongleichungen ergeben, die in [8] schon behandelt wurden. Aufgrund der anderen Funktionenräume und Randbedingungen, die in der Elektro- und Magnetostatik auftreten, wird unsere Herangehensweise an deren Lösung mit der dort definierten Methode eine andere sein.

1.2.3 Der zeitunabhängige Fall

In dieser Arbeit sollen nur statische Probleme der Elektro- und Magnetostatik betrachtet werden. Das heißt, dass \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{j} und ρ keine explizite Zeitabhängigkeit haben. Das gilt dann auch für die Potentiale \mathbf{A} und ϕ . In diesem Fall vereinfachen sich die Maxwellgleichungen im Vakuum erheblich zu

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.8a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.8b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.8c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \quad (1.8d)$$

Auch die Kontinuitätsgleichung nimmt eine einfachere Form an:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

genau wie die Potentialgleichungen in der Coulomb- (oder Lorenz-) Eichung:

$$\Delta\phi = -4\pi\rho, \quad (1.9a)$$

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \quad (1.9b)$$

Hier sind die Zusammenhänge zwischen Feldern und Potentialen durch $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ und $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ gegeben. Die Gleichungen (1.8) und (1.9), die also als Spezialfälle der allgemeinen Maxwellgleichungen im Vakuum folgen, werden die Hauptobjekte der folgenden Untersuchungen sein. Man beachte hier, dass die Definition $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ eine Konvention in der physikalischen Literatur ist. Natürlich lässt sich das elektrische Feld auch durch den positiven Gradienten eines skalaren Potentials definieren. Wir werden später daher das Minus weglassen, da sich die physikalische Konvention in der mathematischen Literatur nicht durchgesetzt hat.

1.3 Maxwellgleichungen in Materie

Will man auch Probleme der Elektro- und Magnetostatik in Anwesenheit von Materie betrachten, müssen die zeitunabhängigen Maxwellgleichungen (1.8) etwas verallgemeinert werden (siehe [2, S.488/517]). Durch Polarisierungs- und Magnetisierungseffekte verändern sich elektrisches und magnetisches Feld in Materie, sodass die neuen Gleichungen lauten:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (1.10a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.10b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.10c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad (1.10d)$$

mit neuen Feldern $\mathbf{D}, \mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Als Bezeichnung für diese Größen haben sich, aufgrund der historisch bedingten Vielzahl an verschiedenen Begriffen, schlicht *D-Feld* und *H-Feld* etabliert. Im Allgemeinen hängen diese Felder nichtlinear vom elektrischen respektive magnetischen Feld ab, die genauen Zusammenhänge ergeben sich aus dem betrachteten Problem und der Modellierung der physikalischen Begebenheiten. Wir werden nun einige physikalische Begriffe für diese Zusammenhänge einführen, die Idealisierungen der realen Gegebenheiten darstellen und so weitere Betrachtungen erheblich vereinfachen (siehe [3, S.72/79]).

Ein Medium heißt *perfektes Medium*, wenn lineare Zusammenhänge zwischen $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ und \mathbf{H} in der Form

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.11a)$$

$$\mu \mathbf{H} = \mathbf{B} \quad (1.11b)$$

existieren. Die Größen ε und μ heißen hierbei Permittivität und Permeabilität. Sind diese Größen in einem Medium konstant, so spricht man im Fall $\varepsilon = \text{const}$ von einem *perfekten dielektrischen Medium*, im Fall $\mu = \text{const}$ von einem *perfekten magnetischen Medium*. Zur Vollständigkeit sei noch der *perfekte Leiter* erwähnt, in dessen Inneren $\mathbf{E} = 0$ gilt und sein magnetisches Analogon, der *Supraleiter*, in dessen Inneren $\mathbf{B} = 0$ gilt.

Zuletzt benötigen wir noch die elektromagnetische Energie, die in diesen Feldern gespeichert ist (siehe [2, S.540]). Diese ist gegeben durch

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \, dx. \quad (1.12)$$

Uns werden hier nur solche Lösungen der Maxwellgleichungen interessieren, bei denen diese Energie endlich ist.

1.3.1 Verhalten an Materialgrenzen

Wenn der Raum nicht von einem einzigen homogenen Medium erfüllt ist, sondern von mehreren verschiedenen Medien, ist es von großem Interesse, wie sich magnetisches und elektrisches Feld an den Grenzflächen zwischen den Medien verhalten. Dieses Verhalten lässt sich aus den Maxwellgleichungen in Materie (1.10) herleiten, indem infinitesimale Volumina und Flächen an den Grenzflächen betrachtet werden (siehe [2, S.491/521]).

Betrachten wir zwei Medien und seien die physikalischen Größen in ersterem mit einem Index 1 gekennzeichnet, die im zweiten mit einem Index 2. Dann lassen sich die Anschlussbedingungen an der Grenzfläche, die wir mit Γ bezeichnen, folgendermaßen schreiben, wobei der Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} vom ersten zum zweiten Medium zeigt:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 4\pi \rho_f, \quad (1.13a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}, \quad (1.13b)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (1.13c)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_f. \quad (1.13d)$$

Hier sind $\rho_f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbf{j}_f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ Flächenladungs- und stromdichten, wobei \mathbf{j}_f immer tangential zu Γ sein muss, also $\mathbf{j}_f \cdot \mathbf{n} = 0$.

2 Analytische Grundlagen

Nach dieser kurzen physikalischen Einführung in die grundlegenden Gleichungen, soll in diesem Kapitel der mathematische Rahmen vorgestellt werden, in dem elliptische partielle Differentialgleichungen im Allgemeinen betrachtet werden.

Mit dem Lemma von Lax-Milgram wird in 2.1 ein Werkzeug vorgestellt, um Existenz- und Eindeutigkeitsfragen von Lösungen elliptischer partieller Differentialgleichungen beantworten zu können. In Abschnitt 2.2 und 2.4 werden die Sobolevräume wiederholt und gewichtete Sobolevräume eingeführt, die der natürliche Rahmen für die in 1.2 eingeführten Potentiale sind. Um auch Randwerte miteinbeziehen zu können, widmet sich Abschnitt 2.3 dem Spurtheorem bestimmter Sobolevräume.

2.1 Elliptische Lösungstheorie und schwache Lösungen

Es soll hier kurz erläutert werden, welches Verfahren uns zur Verfügung steht, um Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für die zeitunabhängigen Maxwellgleichungen treffen zu können und einige vorbereitende Definitionen gegeben werden. Dazu wollen wir kurz den Begriff der elliptischen partiellen Differentialgleichung in Erinnerung rufen ([8, S.24f]).

Definition 2.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine partielle Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f$$

heißt elliptisch, falls die Funktionen a_{ij} von \mathbf{x}, u und ∇u abhängen und die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ symmetrisch und positiv definit ist.

Bemerkung 2.2. Die aus der Einführung der elektromagnetischen Potentiale in Unterabschnitt 1.2.3 im statischen Fall resultierende *Poisson-Gleichung*,

$$\Delta u = -f,$$

ist ein Beispiel für eine elliptische partielle Differentialgleichung. Ihre Darstellung gemäß obiger Definition ist

$$\sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -f$$

mit dem Kronecker-Delta δ_{ij} . Die Matrix $A = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n$ ist also die n -dimensionale Einheitsmatrix, diese ist offensichtlich positiv definit. Dies motiviert, dass der Schwerpunkt dieser Arbeit auf elliptischen Gleichungen liegt. //

Für einige partielle Differentialgleichungen dieser Klasse steht eine Methode zur Verfügung, um Existenz- und Eindeutigkeitsfragen beantworten zu können. Dabei stellt die im folgenden besprochene Methode natürlich nicht die einzige dar. Wie wir sehen werden, benötigt diese auch vergleichsweise viele Voraussetzungen an die hier betrachteten Probleme, um angewendet werden zu können. Wir werden uns trotzdem damit begnügen, da das Hauptaugenmerk ja auf der schwachen Formulierung liegt und diese Methode leicht verständlich und übersichtlich ist. Grundlage hierfür bildet das Lemma von Lax-Milgram, [8, S.63], das hier ohne Beweis angeführt wird:

Satz 2.3 (LAX-MILGRAM). *Sei V ein Hilbertraum und $a : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine koerzive, stetige Bilinearform. Das bedeutet es gibt konstanten $\kappa, K > 0$, sodass*

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \kappa \|v\|_V^2 & \forall v \in V, \\ |a(u, v)| &\leq K \|u\|_V \|v\|_V & \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

Sei weiter $F : V \rightarrow \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional, dann gibt es genau ein $u \in V$, sodass

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

Unser Vorgehen, wenn wir zeigen wollen, dass ein gegebenes Problem eine (eindeutige) Lösung besitzt, wird also aus folgenden Schritten bestehen:

1. Finde einen geeigneten Hilbertraum V , der eine mögliche Lösung beinhaltet.
2. Zeige, dass das gegebene Problem äquivalent zum Problem ist, eine Funktion $u \in V$ zu finden, die

$$a(u, v) = F(v) \tag{2.1}$$

für alle $v \in V$ erfüllt.

3. Zeige Koerzivität und Stetigkeit von a und Stetigkeit von F .

Sind diese Punkte erfüllt, garantiert das Lemma von Lax-Milgram die Existenz einer eindeutigen Lösung. Die Problemstellung, dass eine Funktion gesucht wird, die (2.1) für alle $v \in V$ erfüllt nennt man *schwache Formulierung* des Problems, die Lösungen heißen *schwache Lösungen*.

Bevor wir dieses Schema auf die Probleme des Elektromagnetismus anwenden können, sollen noch zwei Definitionen gegeben werden. Zunächst wird definiert, was es bedeutet, dass eine Menge einen lipschitzstetigen Rand besitzt (siehe [7, S.5] und [1, S.14]).

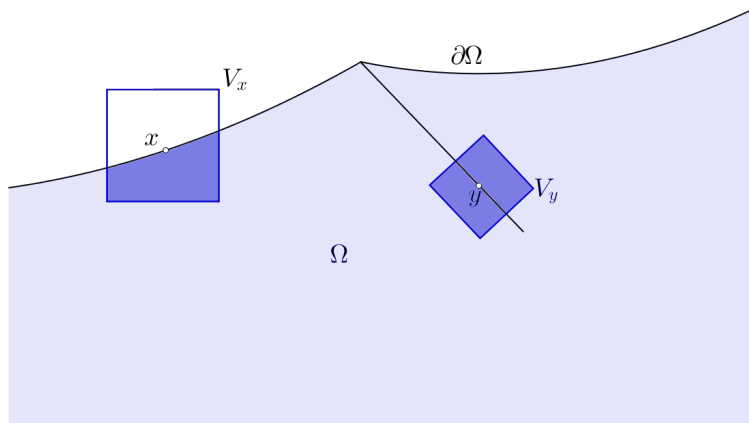


Abbildung 2.1: Zur Illustration eines Lipschitzrandes und Pseudo-Lipschitzrandes.

Definition 2.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so heißt der Rand $\partial\Omega$ Lipschitz, wenn für jedes $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung U von x in \mathbb{R}^n und neue orthogonale Koordinaten $\{y_1, \dots, y_n\}$ existieren, sodass:

(a) U ist ein n -dimensionaler Quader ($a_i \in \mathbb{R}^+$):

$$U = \prod_{i=1}^n (-a_i, a_i),$$

(b) es gibt eine lipschitzstetige Funktion $\varphi : \prod_{i=1}^{n-1} (-a_i, a_i) \rightarrow (-\frac{a_n}{2}, \frac{a_n}{2})$, sodass

$$\begin{aligned} \Omega \cap U &= \{y \in U \mid y_n < \varphi(y_1, \dots, y_{n-1})\}, \\ \partial\Omega \cap U &= \{y \in U \mid y_n = \varphi(y_1, \dots, y_{n-1})\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bemerkung 2.5. Durch diese Definition, genauer durch Gleichung (2.2), wird auch festgelegt, dass die Menge Ω nur auf einer Seite des Randes liegen kann. Diese Annahme wird deshalb im weiteren Text immer implizit vorausgesetzt, wenn von einem Lipschitzrand gesprochen wird. Wird diese Einschränkung fallen gelassen, kann die Menge auch auf beiden Seiten des Randes liegen, hier spricht man von einem *Pseudo-Lipschitzrand*. Diese Situation wird in Abbildung 2.1 illustriert: um den Punkt x existiert eine Umgebung, in der der Rand als Graph einer lipschitzstetigen Funktion dargestellt werden kann. Um y grenzt der Rand auf beiden Seiten an Ω , dieses Randstück ist nur Pseudo-Lipschitz. //

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel stellt die Fouriertransformation dar. Da diese in der Literatur nicht einheitlich definiert ist, soll hier die Form angegeben werden, die in dieser

Arbeit verwendet wird, diese ist aus [9, S.151ff] entnommen. Diese Verteilung der Konstanten hat den Vorteil, dass die Fouriertransformation so eine Isometrie am Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid |\mathbf{x}|^k |D^\alpha f| < \infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und Multiindizes } \alpha\}$ ist.

Definition 2.6. Seien $u, \hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann bezeichnen wir mit

$$\mathcal{F}(u)(\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}) e^{-i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{u})(\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) e^{i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})} d\boldsymbol{\xi}$$

die Fouriertransformierte von u , beziehungsweise die Fourierkotransformierte von \hat{u} .

2.2 Sobolevräume

Nun müssen geeignete Hilberträume gefunden werden, in denen sich die Lösungen unserer Gleichungen darstellen lassen, um die Methode aus dem letzten Abschnitt anwenden zu können. Zunächst wird dafür die Definition der Sobolevräume mit ganzzahligem Exponenten und deren Norm wiederholt (siehe [8, S.54f]). Die partiellen Ableitungen sind hier im distributionellen Sinn aufzufassen.

Definition 2.7 (SOBOLEVNORM). Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist

$$\|f\|_{H^k} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Eine wichtige Teilmenge von $C^\infty(\bar{\Omega})$ sind diejenigen Funktionen mit kompaktem Träger. Diese werden auch Testfunktionen genannt und der Raum der Testfunktionen mit $\mathcal{D}(\Omega)$ bezeichnet. Damit lassen sich die Sobolevräume mit ganzzahligen Exponenten definieren.

Definition 2.8 (SOBOLEVRÄUME). Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für den Raum $X := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \|f\|_{H^k} < \infty\}$ definiere

$$\begin{aligned} H^k(\Omega) &:= \bar{X}, \\ H_0^k(\Omega) &:= \overline{\mathcal{D}(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

wobei die Vervollständigung bezüglich der Sobolevnorm $\|\cdot\|_{H^k}$ zu verstehen ist.

Diese Definition ist etwas abstrakt, weshalb nun eine Charakterisierung für Sobolevfunktionen angegeben wird, die für gegebene Funktionen vergleichsweise leicht zu überprüfen ist.

Lemma 2.9. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann gilt für den Sobolevraum $H^k(\Omega)$, dass

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \|D^\alpha f\|_{L^2} < \infty, |\alpha| \leq k\}. \quad (2.4)$$

Für den Beweis der Äquivalenz von (2.3) und (2.4) sei auf die Literatur verwiesen. Um im nächsten Abschnitt die Randwerte einer Funktion $f \in H^1(\Omega)$ als Funktion auf $\partial\Omega$ geeignet beschreiben zu können, müssen zusätzlich noch Sobolevräume mit allgemeinem reellen Exponenten eingeführt werden (siehe [9, S.208]).

Definition 2.10. Sei $s \in (0, \infty)$, dann ist durch

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2 \mid (1 + |\boldsymbol{\xi}|^{2s})^{1/2} \mathcal{F}(u) \in L^2\},$$

der Sobolevraum mit Exponenten s und der Norm $\|f\|_{H^s} := \|(1 + |\boldsymbol{\xi}|^{2s})^{1/2} \mathcal{F}(u)\|_{L^2}$ gegeben.

Bemerkung 2.11. Es reicht hierbei aus, diese Räume nur für den ganzen \mathbb{R}^n zu definieren (siehe [7, S.20]). Den allgemeinen Fall einer offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ erhält man durch Einschränkung der Funktionen aus $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Für eine kompakte, $n - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit Γ , wie es etwa der Lipschitzrand einer beschränkten Menge ist, lassen sich die Sobolevräume durch die Kartenabbildungen φ aus Definition 2.4 definieren. Sei $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ offen, so ist eine Distribution $f \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ in $H^s(\Gamma_0)$ mit $0 \leq s \leq 1$, wenn $f \circ \varphi \in H^s(\prod_{i=1}^{n-1} (-a_i, a_i) \cap \varphi^{-1}(\Gamma_0 \cap U))$. Anschaulich gesprochen heißt das, dass durch die Kartenabbildung die Frage, ob eine Distribution aus dem Sobolevraum ist, auf das Urbild der Karten verlagert wird. Diese ist aber eine Teilmenge des \mathbb{R}^{n-1} , auf dem die Sobolevräume mit reellen Indizes gerade definiert wurden. Es muss hier beachtet werden, dass die Differenzierbarkeitsordnung s der Sobolevfunktionen durch die Kartenabbildungen beschränkt wird. Da lipschitzstetige Funktionen schon 'sehr nahe' an einmal differenzierbaren Funktionen liegen, lassen sich nur Sobolevräume $H^s(\partial\Omega)$ mit $s \leq 1$ definieren. //

Aus Definition 2.10 ist sofort ersichtlich, dass der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $H^s(\mathbb{R}^n)$ liegt. Mit der Dichtheit von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt auch das folgende Resultat.

Lemma 2.12. Sei $s > 0$, dann liegt $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung 2.13. Eine äquivalente Norm auf $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist $\|(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2} \mathcal{F}(u)\|_{L^2}$. Für $s \geq 1$ folgt dies aus der Konvexität der Funktion $x \mapsto f(x) := x^s$. Als konvexe Funktion erfüllt diese

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

$$f(x + y) \geq f(x) + f(y)$$

mit $x, y \geq 0$. Somit gilt in unserem konkreten Fall

$$1 + |\xi|^{2s} \leq (1 + |\xi|^2)^s \leq 2^{s-1}(1 + |\xi|^{2s}).$$

Für $s < 1$ ist f konkav und es gelten genau umgekehrte Ungleichungen.

Wir werden im Folgenden jeweils die Norm verwenden, die in der gegebenen Situation die praktikabelste ist. //

Zuletzt sollen noch Sobolevräume mit negativen Exponenten vorgestellt werden (siehe [9, S.218]). Diese spielen als Dualräume der Sobolevräume mit positiven Exponenten eine wichtige Rolle. Aus ihnen dürfen die Inhomogenitäten, also Ladungs- und Stromdichte, in den Maxwellgleichungen stammen, damit wir im theoretischen Rahmen dieser Arbeit zeigen können, dass eine Lösung existiert, wie in Kapitel 4 gezeigt wird.

Definition 2.14. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann ist $H^{-k}(\Omega)$ der Dualraum von $H_0^k(\Omega)$.

Sei $s \in (0, \infty)$, so ist $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ der Dualraum von $H^s(\mathbb{R}^n)$ und für eine kompakte Mannigfaltigkeit Γ ist $H^{-s}(\Gamma)$ der Dualraum von $H^s(\Gamma)$.

Für diese Sobolevräume gilt mit positiven reellen Zahlen $r < s$ die Ungleichungskette (vergleiche [8, S.60])

$$\mathcal{D} \subseteq H^s \subseteq H^r \subseteq L^2 \subseteq H^{-r} \subseteq H^{-s} \subseteq \mathcal{D}'.$$

Damit lässt sich in gewissen Fällen leicht entscheiden, ob eine gegebene Funktion in einem bestimmten Funktionenraum liegt.

2.3 Der Spursatz für $H^1(\mathbb{R}^n)$

Nun wird gezeigt, wie sich Funktionen aus Sobolevräumen $H^s(\mathbb{R}^n)$ auf Hyperebenen verhalten. Wie in der Bemerkung nach Definition 2.10 angedeutet, wird dies ausreichend sein, um auch das Verhalten auf bestimmten Mannigfaltigkeiten, die die Ränder von beschränkten Mengen darstellen, zu kennen. Dies ist nötig, um Randwerte für die Maxwellgleichungen betrachten zu können. Dieser Abschnitt folgt [9, S214ff].

Satz 2.15 (SPURSATS FÜR H^1). Sei $s > \frac{1}{2}$ eine reelle Zahl. Dann existiert ein linearer, stetiger Operator $T : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$T\varphi = \varphi|_{x_n=0}$$

gilt. T heißt Spuroperator, oder kurz Spur.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und bezeichne $\mathcal{F}_n(\varphi)$ die Fouriertransformierte bezüglich der n -ten Koordinate von φ . Sei weiter $g(\mathbf{x}') := \varphi(\mathbf{x}', 0)$, wobei $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}$ die ersten $n-1$ Koordinaten von \mathbf{x} sind, dann lässt sich dies (da $e^{i0\xi_n} = 1$) mit Hilfe der Inversionsformel darstellen als

$$g(\mathbf{x}') := \varphi(\mathbf{x}', 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_n(\varphi)(\mathbf{x}', \xi_n) d\xi_n.$$

Durch Anwenden der Fouriertransformation in $n-1$ Koordinaten und Vertauschen der Integrationsreihenfolge erhält man damit

$$\mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\xi}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi)(\boldsymbol{\xi}) d\xi_n.$$

Damit ist es möglich, die $H^{s-1/2}$ -Norm von g abzuschätzen:

$$\begin{aligned} \|g\|_{H^{s-1/2}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\xi}')|^2 (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{s-1/2} d\boldsymbol{\xi}' \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\varphi)(\boldsymbol{\xi})| d\xi_n \right]^2 (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{s-1/2} d\boldsymbol{\xi}' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{s-1/2} \left[\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\varphi)(\boldsymbol{\xi})| (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{-s/2} d\xi_n \right]^2 d\boldsymbol{\xi}' \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{s-1/2} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\varphi)(\boldsymbol{\xi})|^2 (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s d\xi_n \int_{\mathbb{R}} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{-s} d\xi_n d\boldsymbol{\xi}'. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt ist hier die Ungleichung von Hölder eingegangen. Betrachtet man das letzte Integral nach ξ_n , lässt sich dieses aufteilen und für $s > 1/2$ mittels Substitution $\xi_n^2/(1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2) = y^2$ umschreiben:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{-s} d\xi_n &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2 + \xi_n^2)^{-s} d\xi_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2 + (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)y^2)^{-s} (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{1/2} dy \\ &= (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{-s+1/2} \int_{\mathbb{R}} (1 + y^2)^{-s} dy. \end{aligned}$$

Dieses Integral ist nur mehr eine endliche Konstante, abhängig von s . Setzt man dies in die obige Abschätzung ein, erhält man

$$\begin{aligned} \|g\|_{H^{s-1/2}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\xi}')]^2 (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{s-1/2} d\boldsymbol{\xi}' \\ &\leq \tilde{C} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\varphi)(\boldsymbol{\xi})|^2 (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Damit ist also für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gezeigt, dass $\|T\varphi\|_{H^{s-1/2}} \leq C \|\varphi\|_{H^s}$. Da nach Lemma 2.12 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist, lässt sich T zu einem stetigen Operator von $H^s(\mathbb{R}^n)$ nach $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ fortsetzen. \square

Nun ist es noch interessant, ob sich jedes $g \in H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ als Randwert einer Funktion aus $H^s(\Omega)$ schreiben lässt. Die Antwort darauf ist ja, wie der folgende Satz zeigt, indem explizit eine Fortsetzung konstruiert wird. Diese ist natürlich keinesfalls eindeutig.

Satz 2.16. *Sei $s > 1/2$ und T der Spuroperator auf $H^s(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert ein beschränkter linearer Operator $Z : H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$, sodass TZ die Identität auf $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ ist.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 2.15 reicht es, den Operator auf der dichten Teilmenge $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ zu definieren. Für $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ definiere

$$Zg(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2} K_s} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})} \frac{(1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{s-1/2}}{(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s} \mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\xi}') \, d\boldsymbol{\xi}$$

mit $K_s := \int_{\mathbb{R}} (1 + y^2)^{-s} \, dy$. Auf der Menge $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ lässt sich die Integration nach ξ_n explizit ausführen, wodurch der Faktor K_s^{-1} wegfällt. Dies erreicht man mit der Substitution $\xi_n^2/(1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2) = y^2$:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}', 0) &= \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2} K_s} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\boldsymbol{\xi}', \mathbf{x}')} \mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\xi}') \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{s-1/2}}{(1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^s (1 + y^2)^s} (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{1/2} \, dy \, d\boldsymbol{\xi}' \\ &= (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\boldsymbol{\xi}', \mathbf{x}')} \mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\xi}') \, d\boldsymbol{\xi}' \\ &= g(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Somit gilt für Testfunktionen die Beziehung $TZg = g$. Nun muss noch die Stetigkeit gezeigt werden, was durch Einsetzen der Definition von φ und wiederum mit der gleichen Substitution folgt:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\varphi)(\boldsymbol{\xi})|^2 (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^s \, d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{2s-1} |\mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\xi}')|^2 \int_{\mathbb{R}} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{-s} \, d\xi_n \, d\boldsymbol{\xi}' \\ &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\boldsymbol{\xi}'|^2)^{s-1/2} |\mathcal{F}(g)(\boldsymbol{\xi}')|^2 \, d\boldsymbol{\xi}'. \end{aligned}$$

Damit gilt $\|Zg\|_{H^s} \leq C \|g\|_{H^{s-1/2}}$ auf den Testfunktionen. Die Aussage des Satzes folgt wiederum mittels stetiger Fortsetzung. \square

Bemerkung 2.17. Für eine beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, deren Rand $\partial\Omega$ eine kompakte Lipschitz Mannigfaltigkeit ist, lässt sich Satz 2.15 umformulieren. Gemäß der Bemerkung nach Definition 2.10, gilt, dass für eine solche Menge Ω ein stetiger linearer Operator T von $H^s(\Omega)$ nach $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ existiert, der für $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap H^s(\Omega)$ leistet:

$$T\varphi = \varphi|_{\partial\Omega}.$$

Konkret haben wir also festgestellt, dass die Randwerte von Funktionen aus $H^1(\Omega)$ für einen Lipschitzrand $\partial\Omega$ aus $H^{1/2}(\partial\Omega)$ stammen.

Dies motiviert auch eine alternative Darstellung der Norm auf $H^{1/2}$, nämlich

$$\|g\|_{H^{1/2}} = \inf_{\substack{\varphi \in H^1(\Omega) \\ T(\varphi)=g}} \|\varphi\|_{H^1},$$

die wegen Satz 2.16 wohldefiniert ist und sich an geeigneter Stelle als nützlich erweisen wird. Für einen Beweis, dass dies eine Norm auf $H^{1/2}$ ist, sei auf [6, S.8] verwiesen. //

2.4 Gewichtete Sobolevräume

Um für jedes elektrische und magnetische Feld auch das zugehörige Potential im Außenraum einer beschränkten Menge in geeigneter Weise als Element eines Sobolevraumes auffassen zu können, muss noch eine weitere Verallgemeinerung dieses Konzepts eingeführt werden. Die nun eingeführten Räume sind gewichtete Sobolevräume und heißen auch Beppo-Levi Räume. Da es für unsere Zwecke ausreicht, den Fall schwacher Ableitungen erster Ordnung zu betrachten, soll hier auch nur eine Definition dafür gegeben werden. Die Darstellung folgt [5, S.117ff].

Definition 2.18. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Dann definiere

$$W^1(\Omega) := \left\{ f \mid (1 + |\mathbf{x}|^2)^{-1/2} f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\},$$

$$W_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^1}.$$

Die Norm auf diesen Räumen ist gegeben durch $\|f\|_{W^1}^2 := \left\| \frac{1}{(1+|\mathbf{x}|^2)^{1/2}} f \right\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2$.

Man sieht, dass sich $W^1(\Omega)$ von $H^1(\Omega)$ nur im Gewicht in der L^2 -Norm der Funktion unterscheidet, das das Abklingverhalten im Unendlichen ändert, falls Ω unbeschränkt ist. Dies legt strukturelle Ähnlichkeiten der beiden Räume nahe. In der Tat gilt auf jeder beschränkten offenen Teilmenge $\Omega_0 \subseteq \Omega$, dass $W^1(\Omega_0) = H^1(\Omega_0)$. Das folgt, da auf Ω_0 das Gewicht $(1 + |\mathbf{x}|^2)^{-1/2}$ ein endliches, positives Supremum und Infimum besitzt, somit gilt

$$\begin{aligned} C_1 \|f\|_{L^2}^2 &= \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{1}{1 + |\mathbf{x}|^2} \int_{\Omega} |f|^2 \, d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{1 + |\mathbf{x}|^2} \, d\mathbf{x} \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \frac{1}{1 + |\mathbf{x}|^2} \int_{\Omega} |f|^2 \, d\mathbf{x} = C_2 \|f\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

und die Normen $\|\cdot\|_{W^1}$ und $\|\cdot\|_{H^1}$ sind äquivalent.

Damit lässt sich aber ein zu Satz 2.15 analoges Resultat gewinnen und eine Spur für bestimmte Mengen Ω definieren.

Satz 2.19 (SPURSATZ FÜR W^1). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene, unbeschränkte Menge, deren Komplement beschränkt ist. Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator $T : W^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$, sodass*

$$T\varphi = \varphi|_{\partial\Omega}$$

für alle $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W^1(\Omega)$.

Wir werden auf diesem Raum aber eine andere Norm benötigen, um bei den Problemen, bei denen $W^1(\Omega)$ auftritt die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram nachweisen zu können. Zunächst wollen wir dafür ein Hilfsresultat zeigen. Die Menge $B_r(y) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}$ bezeichnet dabei die offene r -Kugel um einen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$. Im folgenden Satz verwenden wir diese Menge mit $n = 3$.

Lemma 2.20. *Sei $R > 0$ und $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^3$. Auf $\Omega := (\overline{B_R(0)})^c$ ist*

$$|u|_{W^1} := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

eine Norm auf $W_0^1(\Omega)$, die äquivalent zu $\|\cdot\|_{W^1}$ ist.

Beweis. Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Trivialerweise gilt die Abschätzung

$$|u|_{W^1} \leq \left\| \frac{u}{(1 + |\mathbf{x}|^2)^{1/2}} \right\|_{L^2} + |u|_{W^1} = \|u\|_{W^1}.$$

Für die Abschätzung in die andere Richtung betrachten wir zuerst eine Funktion $f(r)$, die nur vom Abstand $r := |\mathbf{x}|$ vom Ursprung abhängt und kompakten Träger in (R, ∞) hat. Für diese gilt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_R^\infty |f|^2 \, dr &= - \int_R^\infty r \frac{d|f|^2}{dr} \, dr \\ &= - \int_R^\infty 2rf \frac{df}{dr} \, dr \\ &\leq 2 \left(\int_R^\infty |f|^2 \, dr \right)^{1/2} \left(\int_R^\infty r^2 \left| \frac{df}{dr} \right|^2 \, dr \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichheit mit der Hölderungleichung folgt. Damit ergibt sich insgesamt

$$\int_R^\infty |f|^2 \, dr \leq 4 \int_R^\infty r^2 \left| \frac{df}{dr} \right|^2 \, dr. \quad (2.5)$$

Wertet man nun $\|u(1 + |\mathbf{x}|^2)^{-1/2}\|_{L^2}^2$ in Kugelkoordinaten aus, erhält man

$$\int_{\Omega} \frac{|u|^2}{1 + |\mathbf{x}|^2} \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{|\mathbf{x}|^2} \, d\mathbf{x} = \int_R^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |u|^2 \sin(\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi \, dr.$$

Mit $f(r) := \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |u|^2 \sin(\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi$ und (2.5) ergibt sich durch Vertauschung von Integral und Ableitung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{1 + |\mathbf{x}|^2} \, d\mathbf{x} &\leq 4 \int_R^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| r^2 \sin(\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \\ &= 4 \left\| \frac{\partial u}{\partial r} \right\|_{L^2}^2 \leq 4 \|\nabla u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Somit ist die Äquivalenz von $|\cdot|_{W^1}$ und $\|\cdot\|_{W^1}$ für Testfunktionen gezeigt. Nach Definition ist $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in W_0^1 , womit das Lemma bewiesen ist. \square

Mit Hilfe dieses Lemmas lässt sich zeigen, dass allein die L^2 -Norm der Ableitung einer Funktion eine Norm auf $W^1(\Omega)$ ist.

Satz 2.21. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und Ω^c beschränkt. Dann ist $|\cdot|_{W^1}$ eine zu $\|\cdot\|_{W^1}$ äquivalente Norm auf $W^1(\Omega)$.*

Beweis. Hier gilt wieder, wie im Beweis des vorigen Lemmas, dass $|u|_{W^1} \leq \|u\|_{W^1}$ für alle $u \in W^1(\Omega)$. Für die umgekehrte Abschätzung führen wir einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an, dass für alle $C > 0$ eine Funktion $u \in W^1(\Omega)$ existiert, sodass

$$C |u|_{W^1} < \|u\|_{W^1}.$$

Insbesondere findet man für $C = n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W^1(\Omega)$ existiert, für die $n |u_n|_{W^1} < \|u_n\|_{W^1}$ für alle n gilt. Durch Normierung kann erreicht werden, dass $\|u_n\|_{W^1} = 1$ und somit $|u_n|_{W^1} < \frac{1}{n}$.

Sei nun $R > 0$ so groß, dass Ω^c in $B_R(0)$ enthalten ist. Wir benötigen weiter zwei nicht-negative Funktionen $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, die folgende Eigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= 1 && \text{in } \Omega, \\ \varphi(\mathbf{x}) &= 0 && \text{für } |\mathbf{x}| \geq 2R, \\ \psi(\mathbf{x}) &= 0 && \text{für } |\mathbf{x}| \leq R. \end{aligned}$$

Da für positive $a, b \in \mathbb{R}$ aus $0 \leq (a - b)^2$ durch simples Umformen folgt, dass $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, erhält man für eine Funktion $u \in W^1(\Omega)$

$$|\psi u|_{W^1(B_R(0)^c)}^2 = \int_{B_R(0)^c} |\nabla(\psi u)|^2 \, d\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{B_R(0)^c} (|\psi \nabla u| + |u \nabla \psi|)^2 \, d\mathbf{x} \\
&\leq 2 \left(\int_{B_R(0)^c} |\psi|^2 |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{B_R(0)^c} |\nabla \psi|^2 |u|^2 \, d\mathbf{x} \right).
\end{aligned}$$

Nach der Definition gilt für φ und ψ außerdem $0 \leq \varphi, \psi \leq 1$ im gesamten \mathbb{R}^n und $\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \nabla \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ für $R \leq |\mathbf{x}| \leq 2R$, womit sich die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\psi u|_{W^1(B_R(0)^c)}^2 &\leq 2 \int_{B_R(0)^c} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} + 2 \sup_{B_{2R}(0) \cap \Omega} |\nabla \psi|^2 \int_{B_{2R}(0) \cap \Omega} |u|^2 \, d\mathbf{x} \\
&= 2 |u|_{W^1(B_R(0)^c)}^2 + 2C \|u\|_{L^2(B_{2R}(0) \cap \Omega)}^2
\end{aligned}$$

ergibt. Analog erhält man eine Abschätzung für φu , insgesamt also (da $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$):

$$\begin{aligned}
|\psi u|_{W^1(B_R(0)^c)} &\leq 2 \left(|u|_{W^1(B_R(0)^c)} + C \|u\|_{L^2(B_{2R}(0) \cap \Omega)} \right), \\
|\varphi u|_{W^1(\Omega)} &\leq 2 \left(|u|_{W^1(B_{2R}(0) \cap \Omega)} + C \|u\|_{L^2(B_{2R}(0) \cap \Omega)} \right).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Nun ist nach dem bekannten Satz von Rellich-Kondrachov (siehe etwa [8, S.59]) die Einbettung von $H^1(B_{2R}(0) \cap \Omega)$ nach $L^2(B_{2R}(0) \cap \Omega)$ kompakt, deshalb existiert für die in H^1 beschränkte Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus dem oberen Beweisteil eine Funktion $u \in L^2$, sodass (gegebenenfalls nach Übergang zu einer Teilfolge)

$$u_n \rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega).$$

Da u_n eine Cauchyfolge in L^2 ist und $|u_n - u_m|_{W^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\min(n,m)}$, ist nach der zweiten Abschätzung in (2.6) $(\varphi u_n)_n$ eine Cauchyfolge in $H^1(B_{2R}(0) \cap \Omega)$. Mit Hilfe von Lemma 2.20 folgt mit der ersten Abschätzung aus (2.6), da $\|\cdot\|_{W^1}$ äquivalent zu $|\cdot|_{W^1}$ auf $W_0^1(B_R(0)^c)$ ist, dass $(\psi u_n)_n$ eine Cauchyfolge in $W_0^1(B_R(0)^c)$ ist. Somit existieren $v_1 \in H^1(B_{2R}(0) \cap \Omega)$ und $v_2 \in W_0^1(B_R(0)^c)$, sodass

$$\begin{aligned}
\varphi u_n &\rightarrow v_1 \text{ in } H^1(B_{2R}(0) \cap \Omega) \text{ und} \\
\psi u_n &\rightarrow v_2 \text{ in } W_0^1(B_R(0)^c).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir, wenn wir v_1 und v_2 auf dem Rest von Ω jeweils mit Null fortsetzen, dass $u_n = (\varphi + \psi)u_n \rightarrow v_1 + v_2 =: v$ in $W^1(\Omega)$. Nach der Annahme vom Beginn des Beweises ist $|v|_{W^1} = 0$, woraus folgt, dass v auf Ω konstant sein muss. Da Ω aber unbeschränkt ist und v im Unendlichen verschwinden muss, muss $v = 0$ gelten. Dies steht im Widerspruch zu $\|v\|_{W^1} = 1$. Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Bemerkung 2.22. Um die Nützlichkeit der eben eingeführten Räume zu verdeutlichen, soll ein motivierendes Beispiel aus der Physik gegeben werden. Betrachten wir das Potential im Außenraum einer um den Ursprung kugelsymmetrischen Ladungsverteilung im \mathbb{R}^3 . Dies lässt sich für eine Einheitsladung darstellen als $\phi(\mathbf{x}) = 1/|\mathbf{x}|$ für alle \mathbf{x} in

$\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ mit $R > 0$. In der Einleitung zu diesem Kapitel wurde bemerkt, dass die Sobolevräume der natürliche Rahmen der elektromagnetischen Potentiale sind. Dass aber $\phi \notin H^1(\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0))$ gilt, soll nun gezeigt werden.

Betrachte dazu die L^2 -Norm von ϕ im Außenraum der Ladungsverteilung. Die Integration erfolgt also über $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ und wird in Kugelkoordinaten durchgeführt:

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} r^2 \sin(\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \\ &= 4\pi \int_R^\infty dr. \end{aligned}$$

Dieses Integral divergiert offensichtlich. Nun wollen wir aber, da dieses Potential zu einem zulässigen elektrischen Feld gehört, ϕ als Element eines Sobolevraumes darstellen. Das motiviert die Einführung von Sobolevräumen, bei denen die L^2 -Norm so gewichtet ist, dass ein zu langsames Abklingen im Unendlichen kompensiert wird, wie das bei $W^1(\mathbb{R}^n)$ der Fall ist. Die gewichtete L^2 -Norm berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^2(1+|\mathbf{x}|^2)} \, d\mathbf{x} &= \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{1+r^2} \sin(\vartheta) \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \\ &= 4\pi \int_R^\infty \frac{1}{1+r^2} \, dr = 4\pi [\arctan(r)] \Big|_R^\infty \\ &= 2\pi^2 - 4\pi \arctan(R) < \infty. \end{aligned}$$

//

3 Lösungsräume $H(\operatorname{div} 0)$, $H(\operatorname{rot} 0)$

In diesem Abschnitt werden wir geeignete Funktionenräume vorstellen, in denen sich elektrisches und magnetisches Feld darstellen lassen und deren Struktur und Eigenschaften untersuchen. Zusätzlich wird deren Beziehung zu den Sobolevräumen aus dem letzten Kapitel untersucht, um analog zu Abschnitt 1.2 vorgehen zu können. Um die Wahl dieser Räume zu motivieren, werden Invarianten der zeitunabhängigen Maxwellgleichungen gesucht, also Eigenschaften, die unabhängig vom betrachteten Problem sind. Diese Eigenschaften werden die Gleichungen (b) und (c) von (1.8) sein, da diese nicht von Ladungs- und Stromdichten, oder der Geometrie des betrachteten Gebietes abhängen.

In Abschnitt 3.1 werden diese Räume zunächst definiert und grundlegende Eigenschaften, wie Dichtheit der Testfunktionen, gezeigt. Danach werden in Abschnitt 3.2 Spurtheoreme, ähnlich denen von $H^1(\Omega)$ gezeigt, um Randwerte auf die schwache Formulierung übersetzen zu können. Zuletzt widmet sich Abschnitt 3.3 der Struktur dieser Räume und zeigt, wie in bestimmten Fällen elektrisches und magnetisches Feld Potentiale besitzen, um zu der in Abschnitt 1.2 postulierten Form der Maxwellgleichungen zu gelangen.

3.1 Definition

Wir werden nun eine Verallgemeinerung des Konzeptes der Sobolevräume für die Differentialoperatoren rot und div definieren (vergleiche [4, S.203-208]).

Definition 3.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann seien die Hilberträume

$$\begin{aligned} H(\operatorname{div}, \Omega) &:= \{ \mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \}, \\ H(\operatorname{rot}, \Omega) &:= \{ \mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \operatorname{rot} \mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \} \end{aligned}$$

mit den Normen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div})} &:= \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}, \\ \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{rot})} &:= \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

definiert. Desweiteren seien $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ und $H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$ definiert als Vervollständigungen von $[\mathcal{D}(\Omega)]^3$ bezüglich $\|\cdot\|_{H(\operatorname{div})}$, beziehungsweise $\|\cdot\|_{H(\operatorname{rot})}$.

Analog zu dieser Notation müsste man konsequenterweise für den schon bekannten Sobolevraum $H(\nabla, \Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in [L^2(\Omega)]^3\} = H^1(\Omega)$ schreiben. Im Folgenden wird aber weiterhin die gebräuchlichere Schreibweise $H^1(\Omega)$ verwendet werden.

Bemerkung 3.2. Da in dieser Definition die Menge Ω allgemein gehalten ist, beziehen sich die folgenden Dichtheitsaussagen nicht auf den Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$, sondern vielmehr auf $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) := \{\varphi|_{\Omega} \mid \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$. Für beschränktes Ω müssen die Funktionen also am Rand nicht verschwinden.

Im Folgenden wird bei den eben definierten Räumen die zugrunde liegende Menge meist nicht angeschrieben. //

Die Gestalt der angesprochenen Lösungsräume für elektrisches und magnetisches Feld aus der Überschrift des Abschnitts sollte damit klar sein, wir definieren sie aber hier noch einmal explizit.

Definition 3.3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann seien die Räume

$$\begin{aligned} H(\operatorname{div} 0) &:= \{ \mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \}, \\ H(\operatorname{rot} 0) &:= \{ \mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \} \end{aligned}$$

definiert.

Bemerkung 3.4. Die Gleichheit in dieser Definition ist selbstverständlich im L^2 -Sinn aufzufassen. Daraus folgt sofort, dass auf $H(\operatorname{div} 0)$ durch $\|\cdot\|_{L^2}$ eine zu $\|\cdot\|_{H(\operatorname{div})}$ äquivalente Norm gegeben ist, denn für alle $u \in H(\operatorname{div} 0)$ gilt

$$\|u\|_{H(\operatorname{div})}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{div} u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{L^2}^2.$$

Analog sieht man, dass auch auf $H(\operatorname{rot} 0)$ durch $\|\cdot\|_{L^2}$ eine zu $\|\cdot\|_{H(\operatorname{rot})}$ äquivalente Norm gegeben ist. //

Diese Räume sind aufgrund von (1.1b) und (1.1c) der natürliche Rahmen, um elektrische und magnetische Felder zu betrachten. Es gilt hierbei offensichtlich $H(\operatorname{div} 0) \subseteq H(\operatorname{div})$ und $H(\operatorname{rot} 0) \subseteq H(\operatorname{rot})$, weshalb nun Dichtheitsaussagen der größeren Räume gezeigt werden.

Wir benötigen zunächst ein Hilfsresultat, das wir nicht beweisen werden (siehe [6, S.5]).

Lemma 3.5. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\partial\Omega$ Lipschitz. Für eine Funktion $w \in H^1(\Omega)$ bezeichne \tilde{w} die Fortsetzung von w durch Null auf den gesamten \mathbb{R}^n . Gilt $\tilde{w} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, dann folgt $w \in H_0^1(\Omega)$.

Nun können wir die angedeutete Dichtheitsaussage für $H(\operatorname{div})$ zeigen.

Lemma 3.6. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, dann ist $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ dicht in $H(\operatorname{div})$.*

Beweis. Sei $\mathbf{w} \in H(\operatorname{div})$ orthogonal auf $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$. Es gelte also

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v})_{H(\operatorname{div})} := (\mathbf{w}, \mathbf{v})_{L^2} + (\operatorname{div} \mathbf{w}, \operatorname{div} \mathbf{v})_{L^2} = 0$$

für alle $\mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$. Seien nun \mathbf{w} und $w_0 := \operatorname{div} \mathbf{w}$ auf den ganzen \mathbb{R}^3 durch 0 fortgesetzt und diese Fortsetzungen durch $\tilde{\mathbf{w}}$ und \tilde{w}_0 bezeichnet. Dann gilt analog für alle $\tilde{\mathbf{v}} \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)]^3$

$$(\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{v}})_{L^2} + (\tilde{w}_0, \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}})_{L^2} = 0$$

Fasst man L^2 als Teilmenge von $\mathcal{D}'(\Omega)$ auf und schreibt man das zweite Skalarprodukt auf den dualen Differentialoperator im distributionellen Sinn um, erhält man

$$\langle \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\mathcal{D}'} = \langle \nabla \tilde{w}_0, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\mathcal{D}'},$$

so folgt die Gleichheit $\tilde{\mathbf{w}} = \nabla \tilde{w}_0$ in $[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)]^3$. Damit liegt \tilde{w}_0 in $H^1(\mathbb{R}^3)$ und mit Lemma 3.5 folgt, dass w_0 sogar in $H_0^1(\Omega)$ ist. Nach Definition 2.8 gibt es daher eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$, sodass $\varphi_n \rightarrow w_0$. Damit gilt für alle $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div})$

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v})_{H(\operatorname{div})} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\nabla \varphi_n, \mathbf{v})_{L^2} + (\varphi_n, \operatorname{div} \mathbf{v})_{L^2} = 0,$$

da für Testfunktionen φ_n gilt, dass $-(\nabla \varphi_n, \mathbf{v})_{L^2} = (\varphi_n, \operatorname{div} \mathbf{v})_{L^2}$. Also ist $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ und damit das orthogonale Komplement von $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ in $H(\operatorname{div})$ leer. Offensichtlich ist $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ ein linearer Unterraum von $H(\operatorname{div})$. Da $H(\operatorname{div})$ ein Hilbertraum ist, lässt sich dieser als direkte Summe des Abschlusses und des orthogonalen Komplements von $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ darstellen, womit die Behauptung folgt. \square

Um ein analoges Resultat für $H(\operatorname{rot})$ zu beweisen, benötigen wir zuerst ein Lemma, das eine hinreichende Bedingung dafür angibt, dass eine Funktion in $H_0(\operatorname{rot})$ liegt. Auf den Beweis dieses Lemmas, der Definitionen und Hilfsresultate verwendet, die nicht ins Konzept dieser Arbeit passen, wird hier verzichtet. Hierfür sei etwa auf [6, S.33] verwiesen.

Lemma 3.7. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, dann gilt für jede Funktion $\mathbf{u} \in H(\operatorname{rot})$, die*

$$(\mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_{L^2} - (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2} = 0$$

für alle $\mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ erfüllt, dass $\mathbf{u} \in H_0(\operatorname{rot})$.

Lemma 3.8. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, dann ist $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ dicht in $H(\operatorname{rot})$.*

Beweis. Der Beweis verläuft sehr analog zu dem von Lemma 3.6. Sei $\mathbf{w} \in H(\text{rot})$ orthogonal auf $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$, also

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v})_{H(\text{rot})} := (\mathbf{w}, \mathbf{v})_{L^2} + (\text{rot } \mathbf{w}, \text{rot } \mathbf{v})_{L^2} = 0 \quad (3.1)$$

für alle $\mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$. Für $\mathbf{w}_0 := \text{rot } \mathbf{w}$ gilt damit für alle $\mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v})_{L^2} + (\text{rot } \mathbf{w}_0, \mathbf{v})_{L^2} = 0,$$

also die Gleichheit $\mathbf{w} = -\text{rot } \mathbf{w}_0$ im distributionellen Sinn. Somit ist $\mathbf{w}_0 \in H(\text{rot})$. Mit dieser Gleichheit lässt sich Gleichung (3.1)

$$-(\text{rot } \mathbf{w}_0, \mathbf{v})_{L^2} + (\mathbf{w}_0, \text{rot } \mathbf{v})_{L^2} = 0$$

umschreiben, was laut Lemma 3.7 $\mathbf{w}_0 \in H_0(\text{rot})$ impliziert. Damit existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, sodass $\varphi_n \rightarrow \mathbf{w}_0$. Nun lässt sich (3.1) als Grenzwert

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v})_{H(\text{rot})} = \lim_{n \rightarrow \infty} -(\text{rot } \varphi_n, \mathbf{v})_{L^2} + (\varphi_n, \text{rot } \mathbf{v})_{L^2} = 0$$

anschreiben, was zeigt, dass das orthogonale Komplement von $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ in $H(\text{rot})$ leer ist. Damit folgt die Behauptung. \square

3.2 Spursätze

Nun werden wir Spurtheoreme der eben definierten Räume zeigen (siehe [4, S.204-208]). Diese sind, wie bereits erwähnt, essentiell für die Betrachtung von Randwerten von elektrischen und magnetischen Feldern und deren Übersetzung auf elliptische Randwertprobleme.

Da in diesem Abschnitt Randwerte vektorwertiger Funktionen betrachtet werden, müssen diese Funktionen in geeigneter Weise auf dem Rand ausgewertet werden. Dafür sei im Folgenden für eine Menge mit Lipschitzrand der äußere Normalenvektor auf den Rand mit \mathbf{n} bezeichnet. Für diesen sei ferner $\|\mathbf{n}\| = 1$.

Zunächst sei das Resultat für $H(\text{div})$ gegeben.

Satz 3.9 (SPURSATZ FÜR $H(\text{div})$). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und der Rand $\partial\Omega$ sei Lipschitz und beschränkt. Dann lässt sich die Abbildung*

$$T_n : [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^n \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega) : \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega}$$

stetig zu einer stetigen Abbildung von $H(\text{div})$ nach $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ fortsetzen.

Beweis. Für $\mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^n$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ gilt nach dem Gauß'schen Integralsatz:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}, \nabla \varphi)_{L^2} + (\operatorname{div} \mathbf{v}, \varphi)_{L^2} &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \varphi \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega} T_n \mathbf{v} \, T\varphi \, ds - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \varphi \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega} T_n \mathbf{v} \, T\varphi \, ds.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Da $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt, gilt diese Beziehung auch für alle $\varphi \in H^1$. Damit lässt sich dieses Randintegral wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial\Omega} T_n \mathbf{v} \, T\varphi \, ds \right| &\leq \|\mathbf{v}\|_{L^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2} + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \\
&\leq \|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div})} \|\varphi\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Der Integrand ist hier nur von der Spur $T\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, nicht von φ selbst abhängig. Bildet man das Infimum über alle Funktionen $\psi \in H^1(\Omega)$, die $T\psi = T\varphi$ erfüllen, erhält man mit der Definition der $H^{1/2}$ -Norm aus Bemerkung 2.17

$$\left| \int_{\partial\Omega} T_n \mathbf{v} \, T\varphi \, ds \right| \leq \|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div})} \|T\varphi\|_{H^{1/2}}.$$

Also ist T_n eine stetige Abbildung von $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^n$ mit der $H(\operatorname{div})$ -Norm nach $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Wegen der Dichtheit der Testfunktionen in $H(\operatorname{div})$ lässt sich diese Abbildung stetig auf den gesamten $H(\operatorname{div})$ fortsetzen. Da sich (3.2) auch als Dualitätsprodukt $\langle T_n \mathbf{v}, T\varphi \rangle_{H^{-1/2}}$ auffassen lässt, ist dieser Ausdruck auch für $T_n \mathbf{v} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ definiert. Ist allgemein $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div})$, so lässt sich auch keine bessere Aussage über die Regularität der Spur treffen, deshalb ist T_n eine Abbildung von $H(\operatorname{div})$ nach $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. \square

Ein analoges Resultat lässt sich natürlich auch für $H(\operatorname{rot})$ zeigen.

Satz 3.10 (SPURSATZ FÜR $H(\operatorname{rot})$). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und der Rand $\partial\Omega$ sei Lipschitz und beschränkt. Dann lässt sich die Abbildung*

$$T_\tau : [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3 \rightarrow [H^{1/2}(\partial\Omega)]^3 : \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v} \times \mathbf{n})|_{\partial\Omega}$$

stetig zu einer stetigen Abbildung von $H(\operatorname{rot})$ nach $[H^{-1/2}(\partial\Omega)]^3$ fortsetzen.

Beweis. Für $\mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ und $\varphi \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ gilt, wenn der Gauß'sche Integralsatz komponentenweise angewendet wird:

$$(\mathbf{v}, \operatorname{rot} \varphi)_{L^2} - (\operatorname{rot} \mathbf{v}, \varphi)_{L^2} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \varphi \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \varphi \, d\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Omega} T_\tau \mathbf{v} T\boldsymbol{\varphi} \, ds + \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\Omega} T_\tau \mathbf{v} T\boldsymbol{\varphi} \, ds.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Wegen der Dichtheit von $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ in $[H^1(\Omega)]^3$ gilt dies auch für alle $\boldsymbol{\varphi} \in [H^1]^3$. Das hierbei auftretende Randintegral lässt sich durch

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial\Omega} T_\tau \mathbf{v} T\boldsymbol{\varphi} \, ds \right| &\leq \|\mathbf{v}\|_{L^2} \|\operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}\|_{L^2} + \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_{L^2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2} \\
&\leq \|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{rot})} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1}
\end{aligned}$$

abschätzen. Bemerkte man, dass das Randintegral auf der linken Seite nur von der Spur $T\boldsymbol{\varphi}$ abhängt, lässt sich diese Abschätzung analog zum Beweis von Satz 3.9 verbessern:

$$|\langle T_\tau \mathbf{v}, T\boldsymbol{\varphi} \rangle_{H^{-1/2}}| = \left| \int_{\partial\Omega} T_\tau \mathbf{v} T\boldsymbol{\varphi} \, ds \right| \leq \|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{rot})} \|T\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{1/2}}. \tag{3.4}$$

Damit ist T_τ eine stetige Abbildung von $[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$ nach $[H^{1/2}(\partial\Omega)]^3$. Die Abschätzung (3.4) für das Dualitätsprodukt impliziert aber auch

$$\|T_\tau \mathbf{v}\|_{H^{-1/2}} \leq \|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{rot})}$$

für alle $\mathbf{v} \in [\mathcal{D}(\overline{\Omega})]^3$. Aufgrund der Dichtheitsaussage von Lemma 3.8, lässt sich T_τ wie behauptet mit analoger Argumentation, wie im letzten Beweis, auf eine stetige lineare Abbildung von $H(\operatorname{rot})$ nach $[H^{-1/2}(\partial\Omega)]^3$ fortsetzen. \square

Bemerkung 3.11. Die Bedingung in den eben bewiesenen Spursätzen, dass $\partial\Omega$ beschränkt ist, impliziert nicht, dass auch Ω beschränkt sein muss. Ist etwa Ω^c beschränkt, so sind die Voraussetzungen der Spursätze auch erfüllt. //

Schließlich sei noch erwähnt, dass die Gleichungen (3.2) und (3.3) Verallgemeinerungen der Green'schen Integralsätze auf nicht im klassischen Sinn differenzierbare Funktionen sind und noch öfter auftauchen werden.

3.3 Hodge-Zerlegungen

Wir werden in diesem Abschnitt die Struktur der Räume $H(\operatorname{div} 0)$ und $H(\operatorname{rot} 0)$ genauer untersuchen. Dazu werden wir zeigen, dass unter speziellen Voraussetzungen zu jeder Funktion dieser beiden Räume eindeutige Potentiale existieren. Dies wird die Grundlage für die Beispiele, die in Kapitel 4 gegeben werden und nur die Charakterisierungen aus Unterabschnitt 3.3.2 benutzen, darstellen.

Weiter werden wir in Unterabschnitt 3.3.3 bemerken, dass sich $H(\operatorname{div} 0)$ und $H(\operatorname{rot} 0)$ ganz allgemein in eine orthogonale Summe von einem der Sobolevräume aus Kapitel 2 und einem Rest zerlegen lassen. Diese Zerlegungen werden auch als Hodge-Zerlegungen bezeichnet. Dieser Fall spielt aber hier nur eine untergeordnete Rolle, weshalb die entsprechenden Ergebnisse nur zitiert werden. Im Folgenden sei, sofern nicht anders angegeben, vorausgesetzt, dass Ω beschränkt und der Rand $\partial\Omega$ Lipschitz ist.

3.3.1 Geometrie

Zunächst werden wir gewisse Aspekte der Geometrie eines allgemeinen beschränkten Gebietes betrachten, dessen Rand Lipschitz ist. Genauer sollen hier zwei Eigenschaften beleuchtet werden, nämlich einfacher Zusammenhang und Zusammenhang des Randes, die entscheidend für die folgenden Zerlegungen sind. Zusätzlich soll hier die Schreibweise für die nächsten Abschnitte erklärt werden. Die Darstellung, welche in vielen Quellen über Potentialtheorie verwendet wird, richtet sich nach [1, S.14f].

Für ein allgemeines beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand können die folgenden zwei Beobachtungen gemacht werden:

- (a) Der Rand $\partial\Omega$ muss nicht zusammenhängend sein, wodurch auch Ω^c nicht zusammenhängend ist. Dabei sollen die Zusammenhangskomponenten von $\partial\Omega$ mit Γ_i , $0 \leq i \leq I$ bezeichnet werden und diejenigen von $\bar{\Omega}^c$ mit Ω_i . Hierbei soll die Indizierung so gewählt werden, dass $\partial\Omega_i = \Gamma_i$ und Ω_0 die einzige unbeschränkte Menge ist. Falls nötig, kann statt dieser unbeschränkten Menge Ω_0 auch eine beschränkte betrachtet werden, indem man $\tilde{\Omega}_0 := \Omega_0 \cap \mathcal{B}$ mit einer offenen Kugel $\mathcal{B} \supseteq \bar{\Omega}$ setzt.
- (b) Das Gebiet Ω muss nicht einfach zusammenhängend sein. Dazu gibt es eine endliche Menge von hinreichend glatten Mannigfaltigkeiten Σ_j , $1 \leq j \leq J$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

- (i) Der Rand von Σ_j ist in $\partial\Omega$ enthalten für alle j ,
- (ii) es gilt $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$ für $i \neq j$,
- (iii) die offene Menge

$$\mathring{\Omega} := \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^J \Sigma_j$$

ist Pseudo-Lipschitz und einfach zusammenhängend.

Die Mannigfaltigkeiten Σ_j werden *Schnitte* genannt und jede Menge von Schnitten, die (i)-(iii) erfüllen heißt *zulässig*.

Diese abstrakte Situation ist in Abbildung 3.1 an einem Beispiel dargestellt. Man beachte, dass es bei den beiden Fällen Unterschiede in der Indizierung gibt, da bei einer

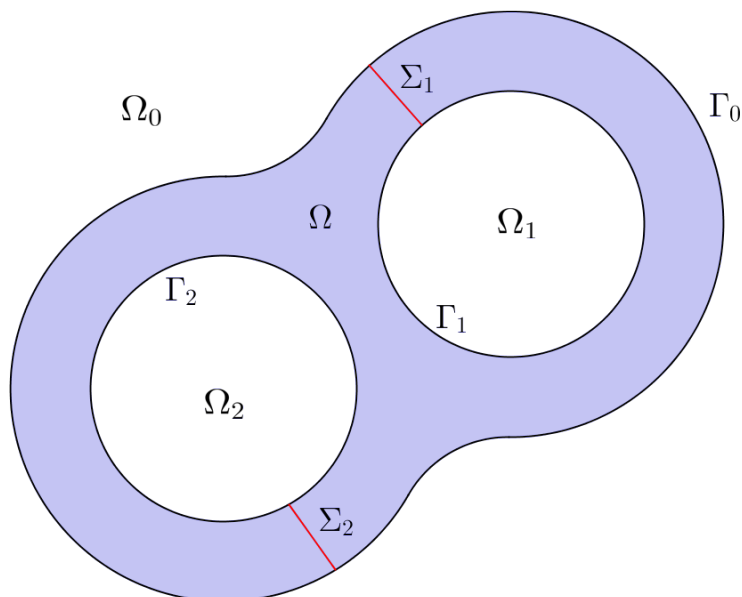


Abbildung 3.1: Darstellung der Bezeichnungen dieses Abschnitts.

einfach zusammenhängenden Menge keine Schnitte notwendig sind ($J = 0$), es aber immer mindestens einen Rand geben muss ($I = 0$). Weiter ist bei dieser vereinfachten, zweidimensionalen Abbildung zu beachten, dass im zweidimensionalen Fall $J = I$ gilt. In drei Dimensionen ist dies hingegen nicht so (man denke etwa an einen Torus).

Wir werden im Folgenden zudem eine abkürzende Schreibweise für den *Sprung* einer Funktion an einem Schnitt einführen (siehe [4, S.218]). Seien dazu mit Σ_j^+ und Σ_j^- die zwei Seiten des Schnitts, sodass der Normalvektor an Σ_j von der positiven zur negativen Seite zeigt, und mit $T_{\Sigma_j^+}$ und $T_{\Sigma_j^-}$ die zugehörigen Spurooperatoren bezeichnet. Dann ist für $u \in H^1(\mathring{\Omega})$ durch

$$[u]_{\Sigma_j} := T_{\Sigma_j^+} u - T_{\Sigma_j^-} u$$

der Sprung der Funktion u durch den Schnitt Σ_j definiert. Diese Definition lässt sich analog auf alle Situationen übertragen, in denen Funktionen auf beiden Seiten einer $(n - 1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit betrachtet werden, die in einem gewissen Sinn Spuren auf dieser zulassen.

3.3.2 Charakterisierung von Vektorfeldern

Wir werden hier zunächst Charakterisierungen unter den Einschränkungen, dass Ω einfach zusammenhängend ist, oder gewisse Bedingungen an die Randwerte auf den Zusammenhangskomponenten von $\partial\Omega$ gefordert werden, zeigen. Zunächst soll $H(\text{div } 0)$ betrachtet werden (siehe [6, S.13ff] und [1, S.15ff]).

Dafür benötigen wir den Raum aller Funktionen aus $H^1(\Omega)$, die bis auf eine Konstante

eindeutig sind, den Faktorraum bezüglich aller konstanten Funktionen. Wir identifizieren den abgeschlossenen Unterraum aller konstanten Funktionen mit \mathbb{R} und schreiben für diesen Faktorraum $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, seine Elemente werden mit $v + \mathbb{R}$, wobei $v \in H^1(\Omega)$ ist, bezeichnet. Die für uns interessanten Eigenschaften dieses Raumes werden im folgenden Lemma zusammengefasst, für einen Beweis sei auf die Literatur zu diesem Abschnitt verwiesen.

Lemma 3.12. *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit Lipschitzrand. Dann ist $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ mit der Quotientennorm*

$$\|v + \mathbb{R}\|_{H^1/\mathbb{R}} := \inf_{z \in \mathbb{R}} \|v + z\|_{H^1} \quad \text{für } v \in H^1(\Omega)$$

ein Banachraum. Außerdem ist die Abbildung

$$v \mapsto |v + \mathbb{R}|_{H^1/\mathbb{R}} := \|\nabla v\|_{L^2}$$

eine zur Quotientennorm äquivalente Norm.

In diesem Raum lässt sich eine eindeutige Lösung des folgenden Neumann-Problems finden.

Lemma 3.13. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit Lipschitzrand. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ für das Neumann-Problem*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= g & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

für $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ mit $\langle g, 1 \rangle_{H^{-1/2}} = \int_{\partial\Omega} g \, ds = 0$. Diese ist eindeutig bis auf eine Konstante.

Beweis. Wir wollen das Lemma von Lax-Milgram, Satz 2.3, anwenden und setzen dazu $V := H^1(\Omega)/\mathbb{R}$. Die benötigte Bilinearform auf V definieren wir durch

$$a(u + \mathbb{R}, v + \mathbb{R}) := (\nabla u, \nabla v)_{L^2}.$$

Diese ist offensichtlich wohldefiniert, da Konstanten bei Gradientenbildung verschwinden. Nach Lemma 3.12 ist die Bilinearform auch stetig und koerziv, denn:

$$\begin{aligned} |a(u + \mathbb{R}, v + \mathbb{R})| &= |(\nabla u, \nabla v)_{L^2}| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} = |u + \mathbb{R}|_{H^1/\mathbb{R}} |v + \mathbb{R}|_{H^1/\mathbb{R}}, \\ a(u + \mathbb{R}, u + \mathbb{R}) &= \|\nabla u\|_{L^2}^2 = |u + \mathbb{R}|_{H^1/\mathbb{R}}^2. \end{aligned}$$

Als nächstes definieren wir ein lineares Funktional auf V durch

$$F : V \rightarrow \mathbb{R} : v + \mathbb{R} \mapsto \langle g, \nabla v \rangle_{H^{-1/2}}.$$

Auch dieses Funktional ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten und deshalb wohldefiniert. Denn für $\langle g, T(v+c) \rangle_{H^{-1/2}} = \langle g, Tv \rangle_{H^{-1/2}} + c \langle g, 1 \rangle_{H^{-1/2}}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ verschwindet der letzte Summand nach Voraussetzung. Die Stetigkeit von F folgt aus der Stetigkeit des Spuroperators T aus Satz 2.15:

$$|F(v + \mathbb{R})| \leq \|g\|_{H^{-1/2}} \|Tv\|_{H^{1/2}} \leq C \|g\|_{H^{-1/2}} \|v\|_{H^1}.$$

Da diese Ungleichung für alle $v \in v + \mathbb{R}$ gilt, kann die letzte Norm hier durch $\|v + \mathbb{R}\|_{H^1/\mathbb{R}}$ ersetzt werden, womit F stetig ist. Nach dem Lemma von Lax-Milgram existiert deshalb eine eindeutige Lösung des Problems:

Finde $u + \mathbb{R} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, sodass

$$a(u + \mathbb{R}, v + \mathbb{R}) = F(v + \mathbb{R}) \text{ für alle } v + \mathbb{R} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Nun ist dieses Ergebnis noch als die zu beweisende Aussage zu interpretieren, wobei wir Funktionen mit ihren Äquivalenzklassen identifizieren, um die Argumentation übersichtlicher zu gestalten. Dazu bemerken wir, dass, wenn wir in (3.5) nur $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ fordern,

$$-\langle \Delta u, v \rangle_{\mathcal{D}'} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2} = \langle g, Tv \rangle_{H^{-1/2}} = 0$$

erhalten, da Testfunktionen am Rand verschwinden. Also gilt die Gleichheit $-\Delta u = 0$ im distributionellen Sinn und somit auch in L^2 , da die Nullfunktion trivialerweise quadratintegrierbar ist. Damit ist der erste Teil gezeigt und es bleibt die Randbedingung zu interpretieren. Dazu fassen wir ∇u aufgrund von $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = 0$ als Funktion in $H(\operatorname{div} 0)$ auf. Für diese gilt nach dem Beweis von Satz 3.9 die Identität

$$(\operatorname{div} \nabla u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2} = \langle T_n(\nabla u), Tv \rangle_{H^{-1/2}}$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$. Mit $\Delta u = 0$ und $(\nabla u, \nabla v)_{L^2} = \langle g, Tv \rangle_{H^{-1/2}}$ folgt schließlich

$$\langle g, Tv \rangle_{H^{-1/2}} = \langle T_n(\nabla u), Tv \rangle_{H^{-1/2}}$$

für alle $v \in H^1(\Omega)$ und damit nach Satz 2.16 auch für alle Funktionen in $H^{1/2}(\partial\Omega)$, womit wir $T_n u = g$ erhalten. Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Nun können wir zeigen, dass für jede Funktion aus $H(\operatorname{div} 0)$ (also für jedes magnetische Feld) ein entsprechendes Vektorpotential existiert.

Satz 3.14. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div} 0)$, sodass mit der Bezeichnung aus Abschnitt 3.3.1*

$$\langle T_n(\mathbf{u}), 1 \rangle_{H^{-1/2}} = 0 \text{ auf } \Gamma_i, \quad 0 \leq i \leq I \quad (3.6)$$

gilt. Dann existiert ein Vektorpotential $\mathbf{A} \in [H^1(\Omega)]^3$, sodass $\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ und $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ in Ω . Umgekehrt gilt (3.6) für jede Funktion $\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ mit $\mathbf{A} \in [H^1(\Omega)]^3$.

Beweis. Sei $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div} 0)$, sodass (3.6) erfüllt wird. Dann existieren nach Lemma 3.13 Lösungen $\chi_i \in H^1(\Omega_i)$ für die Probleme

$$\begin{aligned} -\Delta \chi_i &= 0 \quad \text{in } \Omega_i, \\ \nabla \chi_i \cdot \mathbf{n} &= T_n(\mathbf{u}) \quad \text{auf } \partial \Omega_i, \end{aligned}$$

für alle $0 \leq i \leq I$ mit der zusätzlichen Bedingung $\nabla \chi_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ auf $\partial \mathcal{B}$. Die Menge \mathcal{B} ist hierbei die Kugel, die in Punkt (a) der Erläuterungen der Geometrie in Unterabschnitt 3.3.1 definiert wurde. Definiere nun die Funktion

$$\bar{\mathbf{u}} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{in } \Omega, \\ \nabla \chi_i & \text{in } \Omega_i, \\ \mathbf{0} & \text{auf } \mathcal{B}^c. \end{cases}$$

Nach Konstruktion gilt $\bar{\mathbf{u}} \in H(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$ und $\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0$ im gesamten \mathbb{R}^3 (da $\operatorname{div} \nabla \chi_i = \Delta \chi_i$ und die Übergangsbedingungen auf den Rändern der betrachteten Teilgebiete entsprechend gewählt wurden). Setzt man die Bedingungen $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ und $\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ geeignet auf den ganzen \mathbb{R}^3 fort und transformiert mittels Fouriertransformation, sind diese (mit $\mathcal{F}(\mathbf{A}) =: \hat{\mathbf{A}}$ und $\mathcal{F}(\bar{\mathbf{u}}) =: \hat{\mathbf{u}}$) äquivalent zu

$$\begin{aligned} i\xi_1 \hat{A}_1 + i\xi_2 \hat{A}_2 + i\xi_3 \hat{A}_3 &= 0, \\ \hat{u}_1 = i\xi_2 \hat{A}_3 - i\xi_3 \hat{A}_2, \quad \hat{u}_2 = i\xi_3 \hat{A}_1 - i\xi_1 \hat{A}_3, \quad \hat{u}_3 = i\xi_1 \hat{A}_2 - i\xi_2 \hat{A}_1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Hier geht implizit $\bar{\mathbf{u}} \in H(\operatorname{div} 0)$ ein, denn wäre $\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} \neq 0$, wäre auch $i\xi_1 \hat{u}_1 + i\xi_2 \hat{u}_2 + i\xi_3 \hat{u}_3 \neq 0$ im Widerspruch zu den obigen Gleichungen. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} i\xi_2 \hat{u}_3 - i\xi_3 \hat{u}_2 &= \xi_3(\xi_3 \hat{A}_1 - \xi_1 \hat{A}_3) - \xi_2(\xi_1 \hat{A}_2 - \xi_2 \hat{A}_1) \\ &= -\xi_1(\xi_2 \hat{A}_2 + \xi_3 \hat{A}_3) + \hat{A}_1(\xi_2^2 + \xi_3^2) \\ &= (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \hat{A}_1. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung für die anderen Komponenten ergibt schließlich

$$\hat{A}_1 = i \frac{\xi_2 \hat{u}_3 - \xi_3 \hat{u}_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, \quad \hat{A}_2 = i \frac{\xi_3 \hat{u}_1 - \xi_1 \hat{u}_3}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, \quad \hat{A}_3 = i \frac{\xi_1 \hat{u}_2 - \xi_2 \hat{u}_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}. \quad (3.8)$$

Definiert man die Funktion \mathbf{A} nun als Fourierkotransformierte der so erhaltenen Funktion, bleibt noch zu zeigen, dass deren Einschränkung auf Ω in $[H^1(\Omega)]^3$ liegt. Betrachte zunächst die partiellen Ableitungen von \mathbf{A} , indem wir die Fouriertransformierte betragsmäßig abschätzen:

$$|\xi_j \hat{A}_1| = \frac{|\xi_j \xi_3 \hat{u}_3 - \xi_j \xi_2 \hat{u}_2|}{|\xi|^2} \leq |\boldsymbol{\xi}|^2 \frac{|\hat{u}_3| + |\hat{u}_2|}{|\xi|^2} \leq \sum_{i=1}^3 |\hat{u}_i|,$$

für $1 \leq j \leq 3$, für die anderen Komponenten von $\hat{\mathbf{A}}$ gelten analoge Abschätzungen. Damit sind alle Ausdrücke $|\xi_j \hat{A}_i|$ für $1 \leq i, j \leq 3$ durch $\sum_{i=1}^3 |\hat{u}_i| \leq 3|\hat{\mathbf{u}}|$ beschränkt. Da aufgrund der Isometrieeigenschaft der Fouriertransformation bezüglich der L^2 -Norm

$$\|\partial_j A_i\|_{L^2} = \|\mathcal{F}(\partial_j A_i)\|_{L^2} = \left\| \xi_j \hat{A}_i \right\|_{L^2} \leq \|\hat{\mathbf{u}}\|_{L^2}$$

gilt und $\bar{\mathbf{u}}$ (also auch $\hat{\mathbf{u}}$) in L^2 ist, ist $\nabla \mathbf{A}$ in $[L^2(\Omega)]^{3 \times 3}$.

Zuletzt betrachtet man eine Testfunktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit kompaktem Träger, die in einer Umgebung von 0 gleich 1 ist. Schreibt man $\hat{\mathbf{A}}$ als

$$\hat{\mathbf{A}} = \varphi \hat{\mathbf{A}} + (1 - \varphi) \hat{\mathbf{A}},$$

bemerkt man, dass $\varphi \hat{\mathbf{A}}$ kompakten Träger hat. Da somit $\varphi \hat{\mathbf{A}}$ multipliziert mit beliebigen Polynomen quadratintegrierbar ist, ist die Fourierkottransformierte $\mathcal{F}^{-1}(\varphi \hat{\mathbf{A}})$ analytisch auf \mathbb{R}^3 und ihre Einschränkung auf die beschränkte Menge Ω in $[L^2(\Omega)]^3$. Schließlich verschwindet $(1 - \varphi) \hat{\mathbf{A}}$ in einer Umgebung von 0, womit die einzige Stelle, an der der Nenner der Brüche in (3.8) verschwindet, ausgenommen wird. Damit ist (da die explizite Gestalt von $\hat{\mathbf{A}}$ bekannt ist) $(1 - \varphi) \hat{\mathbf{A}}$ in $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$. Dies gilt dann auch für $\mathcal{F}^{-1}((1 - \varphi) \hat{\mathbf{A}})$, diese ist also insbesondere in $[L^2(\Omega)]^3$. Insgesamt folgt also mit der Linearität der Fourierkottransformation $\mathbf{A} \in [H^1(\Omega)]^3$. Damit ist die eine Richtung der Behauptung gezeigt.

Die andere Richtung folgt durch Nachrechnen. Sei $\mathbf{A} \in [H^1(\Omega)]^3$. Es gilt $\mathbf{u} := \text{rot } \mathbf{A} \in L^2$ und aufgrund der Vertauschbarkeit der distributionellen Ableitungen $\text{div } \mathbf{u} = \text{div rot } \mathbf{A} = 0$. Für die Randintegrale sei $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ so, dass φ in einer Umgebung von Γ_i gleich 1 ist und auf allen Γ_k mit $k \neq i$ verschwindet. Damit gilt nach der verallgemeinerten Green'schen Formel aus dem Beweis von Satz 3.9:

$$\langle T_n(\mathbf{u}), 1 \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_i)} = \langle T_n(\text{rot}(\varphi \mathbf{A})), 1 \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = (\text{div rot}(\varphi \mathbf{A}), 1)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Somit ist der Beweis vollständig. □

Bemerkung 3.15. Die Bedingung $\text{div } \mathbf{A} = 0$ ist eine Eichbedingung, wie sie in Abschnitt 1.2 angesprochen wurde. Sie geht in Gleichung (3.7) im Beweis ein und garantiert die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems für die Fouriertransformierten der Komponenten von \mathbf{A} . Wie erwähnt ist diese Bedingung nicht eindeutig in dem Sinne, dass natürlich jede Gleichung für die Fouriertransformierte gewählt werden, die die eben erwähnte Eigenschaft besitzt. Über die Fourierkottransformation bekommt man dann die gängige Darstellung für Eichbedingungen über \mathbf{A} .

Man beachte, dass das Vektorpotential in Satz 3.14 im Allgemeinen nicht eindeutig ist. Dies ist die in Abschnitt 1.2 angesprochene Resteichfreiheit. Wie in [6, S.46-50] gezeigt wird, kann das Vektorpotential unter gewissen Umständen auch eindeutig gewählt werden, werden entsprechende Randbedingungen für \mathbf{A} gefordert. //

Nun widmen wir uns den Potentialen von $H(\text{rot } 0)$, also den elektrischen Feldern. Für hinreichend reguläre Funktionen und Mengen mit hinreichend glattem Rand ist die Existenz von Potentialen durch den Satz von Stokes gesichert. Dieser ist ein Standardresultat der Analysis, siehe etwa [6, S.31].

Satz 3.16 (STOKES). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathbf{u} \in [C^1(\Omega)]^3$, sodass $\text{rot } \mathbf{u} = 0$. Dann existiert eine Funktion $\phi \in C^2(\Omega)$ mit $\mathbf{u} = \nabla \phi$.*

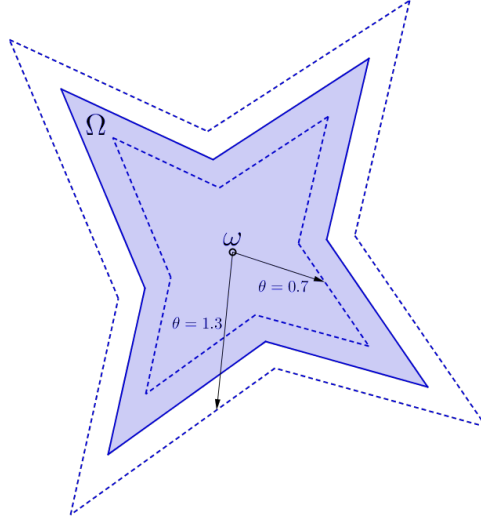


Abbildung 3.2: Illustration des Begriffs sternförmig. Die gestrichelten Linien stellen die um θ skalierten Mengen dar.

Der folgende Beweis der Existenz eines Potentials ϕ für Funktionen aus $H(\text{div})(\text{rot } 0)$ beruht auf diesem Satz und benutzt eine spezielle geometrische Eigenschaft, die wir hier definieren wollen (siehe [6, S.20ff]).

Definition 3.17. Eine beschränkte, offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig bezüglich $\omega \in \Omega$, wenn $\theta\bar{\Omega} \subset \Omega$ für alle $\theta \in [0, 1)$ und $\bar{\Omega} \subset \theta\Omega$ für alle $\theta \in (1, \infty)$ gilt, wenn ω als Koordinatenursprung gewählt wird.

Die Bezeichnung sternförmig wird dadurch motiviert, dass diese Bedingung insbesondere bei Mengen gegeben ist, die wie ein Stern geformt sind (wie etwa in Abbildung 3.2 zu sehen ist).

Wir benötigen außerdem ein Hilfsresultat, das wir hier nicht beweisen werden, da der Beweis äußerst technisch ist und nicht wesentlich zum Verständnis der wichtigen Aspekte dieser Arbeit beiträgt (siehe [6, S.20ff]).

Lemma 3.18. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\partial\Omega$ lipschitzstetig, dann gilt:

- (i) Es gibt eine endliche Familie $\{\Omega_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ von offenen, sternförmigen und lipschitzstetigen Mengen, sodass $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$.
- (ii) Für jede Teilmenge $K \subseteq \Omega$ mit positivem Maß existiert eine Konstante $C_K > 0$, die nur von Ω und K abhängt, sodass

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_K (\|u\|_{L^2(K)} + \|\nabla u\|_{H^{-1}(\Omega)})$$

für alle $u \in L^2(\Omega)$ gilt.

Als letztes Hilfsresultat benötigen wir noch ein hinreichendes Kriterium dafür, dass eine Funktion in $L^2(\Omega)$ liegt, wenn wir wissen, dass sie lokal quadratintegrierbar ist, also in $L^2_{\text{loc}}(\Omega) := \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid u \in L^2(K) \text{ für alle kompakten } K \subseteq \Omega\}$ liegt.

Lemma 3.19. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend und $\partial\Omega$ lipschitzstetig. Gilt*

$$u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) \text{ und } \nabla u \in [H^{-1}(\Omega)]^n, \quad (3.9)$$

so gilt $u \in L^2(\Omega)$.

Beweis. Definiere als X die Menge aller Funktionen u , die (3.9) erfüllen. Für eine beliebige kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ mit positivem Maß und $u \in X$ definieren wir

$$\|u\|_K := \|u\|_{L^2(K)} + \|\nabla u\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass $\|\cdot\|_K$ eine Norm auf X ist. Aus Lemma 3.18 (ii) folgt, dass $\|\cdot\|_K$ und $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ äquivalent auf $L^2(\Omega)$ sind. Es ist also $L^2(\Omega)$ versehen mit $\|\cdot\|_K$ ein Banachraum. Somit bleibt zu zeigen, dass $L^2(\Omega)$ bezüglich $\|\cdot\|_K$ dicht in X ist. Betrachte zunächst eine offene Menge Ω , die sternförmig bezüglich $\omega \in \Omega$ ist. Man muss nun das Koordinatensystem so verschieben, dass ω der Koordinatenursprung ist. Für $\theta > 1$ lassen sich die Distributionen auf Ω durch eine Koordinatentransformation auf $\theta\Omega$ erweitern. Für eine hinreichend glatte Funktion φ auf Ω definiert man diese als

$$\varphi_\theta(\mathbf{x}) := \varphi(\mathbf{x}/\theta).$$

Diese Koordinatentransformation lässt sich durch

$$\langle u_\theta, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\theta\Omega)} := \theta^n \langle u, \varphi_{1/\theta} \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\theta\Omega)$$

auf eine Abbildung $u \in \mathcal{D}'(\Omega) \mapsto u_\theta \in \mathcal{D}'(\theta\Omega)$ erweitern. Diese Transformation hat gewisse Eigenschaften, die für unsere Zwecke interessant sind. Mit der (distributionellen) Kettenregel erhält man zunächst

$$\nabla u_\theta = \frac{1}{\theta}(\nabla u)_\theta, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Des Weiteren folgt aus $\lim_{\theta \searrow 1} \langle u_\theta - u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'} = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, dass für $\theta \searrow 1$

$$\begin{aligned} \|u_\theta - u\|_{L^2} &\rightarrow 0, \quad \forall u \in L^2(\Omega), \\ \|u_\theta - u\|_{H^{-1}} &\rightarrow 0, \quad \forall u \in H^{-1}(\Omega). \end{aligned}$$

Dies folgt, da die Testfunktionen dicht in L^2 und H_0^1 sind. Damit gilt $\lim_{\theta \searrow 1} \langle u_\theta - u, \varphi \rangle = 0$ für alle φ aus L^2 und H_0^1 im L^2 - beziehungsweise H^{-1} -Sinn, sofern $u_\theta - u$ in L^2 respektive H^{-1} liegt.

Zuletzt gilt für $u \in X$, dass $u_\theta \in L^2(\Omega)$ für $\theta > 1$, da in diesem Fall $u_\theta \in L^2_{\text{loc}}(\theta\Omega)$ und $\overline{\Omega}$ eine kompakte Teilmenge von $\theta\Omega$ ist. Mit diesen Eigenschaften gilt nun für $u \in X$, dass

$$\|u_\theta - u\|_K = \|u_\theta - u\|_{L^2(K)} + \|\nabla(u_\theta - u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \rightarrow 0$$

für $\theta \searrow 1$. Somit existiert für alle $u \in X$ eine Folge aus $L^2(\Omega)$, die gegen u konvergiert. Damit haben wir im Fall einer sternförmigen Menge die Dichtheit von $L^2(\Omega)$ in X gezeigt. Für den Fall einer allgemeinen lipschitzstetigen Menge Ω reicht es, anzumerken, dass sich diese wegen Lemma 3.18 (i) als endliche Vereinigung sternförmiger Mengen schreiben lässt, für die die Behauptung jeweils gilt. \square

Schließlich können wir das klassische Stokes'sche Theorem 3.16 auf $H(\text{rot } 0)$ -Funktionen verallgemeinern. Dazu fügen wir die Ergebnisse, die bis jetzt gesammelt wurden zusammen (siehe [6, S.31f]).

Satz 3.20. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene, beschränkte und einfach zusammenhängende Menge mit Lipschitzrand. Es ist $\mathbf{u} \in H(\text{rot } 0)$ genau dann, wenn es eine - bis auf eine Konstante eindeutige - Funktion $\phi \in H^1(\Omega)$ gibt, sodass*

$$\mathbf{u} = \nabla \phi$$

gilt.

Beweis. Gibt es eine Funktion $\phi \in H^1(\Omega)$, sodass $\mathbf{u} = \nabla \phi$, ergibt eine einfache Rechnung $\text{rot } \mathbf{u} = \text{rot } \nabla \phi = 0$.

Für die andere Richtung zeigt man zuerst, dass unter den getroffenen Voraussetzungen $\mathbf{u} = \nabla \phi$ für ein $\phi \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt und wendet dann Lemma 3.19 an, um zu zeigen, dass $\phi \in L^2(\Omega)$. Damit gilt $\phi \in H^1(\Omega)$.

Da Ω lipschitzstetig ist, gibt es eine Folge lipschitzstetiger Mengen $(\Omega_i)_{i=1}^{\infty}$, sodass $\Omega_i \subset \Omega_j$ für $i < j$ und

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i.$$

Sei nun $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ für $\varepsilon > 0$ ein Mollifier. Das heißt, es gibt eine nichtnegative Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ mit Träger in $B_1(0)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mathbf{x} = 1, \\ \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right).$$

Bezeichne weiter mit $\tilde{\mathbf{u}}$ die Fortsetzung von \mathbf{u} durch Null auf ganz \mathbb{R}^3 . Für die Faltung mit dem Mollifier φ_ε gilt bekannterweise $\tilde{\mathbf{u}} * \varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ und

$$\text{rot}(\tilde{\mathbf{u}} * \varphi_\varepsilon) = \text{rot } \tilde{\mathbf{u}} * \varphi_\varepsilon, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{\mathbf{u}} * \varphi_\varepsilon) = \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^3).$$

Wählt man ε nun so klein, dass

$$\bigcup_{x \in \Omega_k} B_\varepsilon(x) \subset \Omega$$

für festes $k \geq 1$, so gilt $\operatorname{rot}(\tilde{\mathbf{u}} * \varphi_\varepsilon) = 0$ in Ω_k . Nach dem Satz von Stokes, Satz 3.16, gibt es eine Funktion $\phi_\varepsilon \in C^2(\Omega_k) \subseteq H^1(\Omega_k)$, sodass $\tilde{\mathbf{u}} * \varphi_\varepsilon = \nabla \phi_\varepsilon$ auf Ω_k . Nach den oben genannten Glättungseigenschaften des Mollifiers gibt es ein $\phi_k \in H^1(\Omega_k)$ mit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon = \phi_k \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{u}} = \nabla \phi_k$$

auf Ω_k . Dieser Grenzwert ist eigentlich im Sinne von $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ aufzufassen, was hier aber nicht explizit angeschrieben wird.

Nun gilt $\nabla \phi_k = \nabla \phi_{k+1}$ auf Ω_k , woraus folgt, dass $\phi_k - \phi_{k+1}$ konstant auf Ω_k ist. Die ϕ_k sind aber nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Diese kann man für alle $k \geq 1$ so wählen, dass die Differenz $\phi_k - \phi_{k+1}$ auf Ω_k verschwindet. Es ist aber $\bar{\Omega}_k$ kompakt und $\phi_k \in L^2(\Omega_k)$. Damit existiert eine Funktion $\phi \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, die $\mathbf{u} = \nabla \phi \in L^2(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$ erfüllt. Nach der Argumentation vom Beginn des Beweises, ist damit die Behauptung gezeigt. \square

Bemerkung 3.21. Lässt man die Einschränkung an Ω aus Satz 3.20, einfach zusammenhängend zu sein fallen, ergibt sich wie bereits erwähnt eine leicht abgeänderte Darstellung für $H(\operatorname{rot} 0)$. Wir wollen hier ein physikalisch motiviertes Beispiel betrachten, um aufzuzeigen, welche Unterschiede sich dann ergeben (vergleiche [2, S.524] und [4, S.219]).

Betrachte eine zylinderförmige Menge $\Omega := [B_1^{\mathbb{R}^2}(0) \setminus \{(0,0)\}] \times (0,1)$, wobei die Koordinaten so benannt werden, dass die Zylinderachse mit der z -Achse zusammenfällt, wie in Abbildung 3.3 dargestellt ist. Ein gleichförmiger Strom entlang der z -Achse würde ein magnetisches Feld erzeugen, das in Ω proportional zu

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y, -x, 0)^T$$

ist. Da der erzeugende Strom nicht in Ω enthalten ist, schreiben sich die magnetostatischen Maxwellgleichungen hier als

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Es gilt also $\mathbf{B} \in H(\operatorname{rot} 0) \cap H_0(\operatorname{div} 0)$ in Ω . Der Zylinder hat aber ein Loch, sodass dieser nicht mehr einfach zusammenhängend ist und sich Satz 3.20 nicht unmittelbar anwenden lässt. Nimmt man aber den Schnitt $\Sigma_1 := (-1,0) \times \{0\} \times (0,1)$ aus dem Zylinder aus, so ist

$$\mathring{\Omega} := \Omega \setminus \Sigma_1$$

einfach zusammenhängend. In $\mathring{\Omega}$ ist nun $\phi(\mathbf{x}) := \arctan(\frac{y}{x})$ so, dass

$$\begin{aligned} \nabla \phi(\mathbf{x}) &= \left(-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \frac{y}{x^2}, \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x}, 0 \right)^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y, -x, 0)^T = \mathbf{B}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

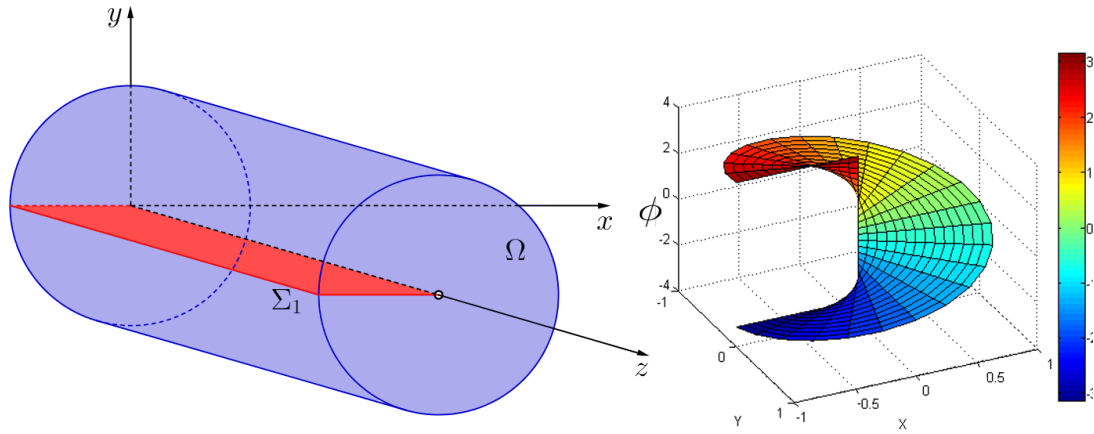


Abbildung 3.3: Links ist eine Darstellung der Situation aus Bemerkung 3.21 (der Schnitt ist rot dargestellt). Man beachte, dass die z -Achse aus dem Zylinder ausgenommen ist. Rechts ist das zugehörige Potential $\phi(x,y)$ geplottet.

Da ϕ aber genau im Bereich des Schnittes Σ_1 einen Sprung aufweist, wie in Abbildung 3.3 zu sehen ist, kann dieses Potential nicht in $H^1(\Omega)$ liegen.

Bei näherer Betrachtung stellt sich heraus, dass

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \operatorname{div} \mathbf{B} \\ &= \nabla \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (-y, x, 0)^T + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{div} (-y, x, 0)^T \\ &= \frac{-yx+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{aligned}$$

in $\overset{\circ}{\Omega}$ und mit dem äußeren Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y, 0)^T$ auf $\partial\Omega$

$$T_n(\nabla\phi) = \nabla\phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \frac{-yx+xy}{x^2+y^2} = 0$$

gilt. Nehmen wir hier noch den konstanten Sprung von ϕ und den trivialen Sprung

$$[\nabla\phi \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma_1} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{1} \cdot \mathbf{n} = 0$$

von $\nabla\phi$ an Σ_1 hinzu (wobei hier \mathbf{n} hier den Normalenvektor an Σ_1 bezeichnet), erfüllt ϕ offensichtlich die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0, \text{ in } \overset{\circ}{\Omega}, \\ T_n(\nabla\phi) &= 0, \text{ auf } \partial\Omega, \\ [\phi]_{\Sigma_1} &= \text{const}, \\ [\nabla\phi \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma_1} &= 0. \end{aligned}$$

In der Tat lässt sich in dieser Situation das orthogonale Komplement von ∇H^1 in $H(\text{rot } 0)$ als $H(\text{rot } 0) \cap H_0(\text{div } 0)$ schreiben und durch Gradienten von Funktionen charakterisieren, die diese Differentialgleichung erfüllen. Dies wird im nächsten Unterabschnitt behandelt. Hierbei ist $\nabla H^1 := \{\nabla u \mid u \in H^1(\Omega)\}$, $\text{rot } [H^1]^3$ ist analog definiert. Für $H(\text{div } 0)$ ergibt sich eine ähnliche Situation, wenn man die Einschränkungen von Satz 3.14 fallen lässt, dass die Randintegrale verschwinden müssen. //

3.3.3 Zerlegung unter allgemeineren Voraussetzungen

Der Vollständigkeit halber soll nun erwähnt werden, wie die Zerlegungen aussehen, wenn der betrachteten Menge Ω die Einschränkungen aus Satz 3.14 und 3.20 nicht mehr auferlegt werden und von Ω nur mehr Offenheit, Beschränktheit und Zusammenhang gefordert werden. Da dies für die noch folgenden Beispiele nur bedingt von Bedeutung ist, werden die entsprechenden Ergebnisse hier nur zitiert (siehe [4, S.219/222]). Hier wird zusätzlich noch angenommen, dass der Rand eine C^2 -Mannigfaltigkeit ist, also statt durch Lipschitzstetige, durch zweimal stetig differenzierbare Funktionen parametrisiert werden kann. Mit den eben definierten Bezeichnungen ∇H^1 und $\text{rot } [H^1]^3$ gilt der folgende Satz.

Satz 3.22. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Dann gilt*

$$\begin{aligned} H(\text{rot } 0) &= \nabla H^1 \oplus \mathbb{H}_{\text{rot}}, \\ H(\text{div } 0) &= \text{rot } [H^1]^3 \oplus \mathbb{H}_{\text{div}} \end{aligned}$$

mit den Funktionenräumen

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{\text{rot}} &:= H(\text{rot } 0) \cap H_0(\text{div } 0), \\ \mathbb{H}_{\text{div}} &:= H_0(\text{rot } 0) \cap H(\text{div } 0). \end{aligned}$$

Für diese gilt mit der Notation aus Unterabschnitt 3.3.1 $\dim \mathbb{H}_{\text{rot}} = J$ und $\dim \mathbb{H}_{\text{div}} = I$.

Funktionen aus $H(\text{rot})$ und $H(\text{div})$ lassen sich also in diesem allgemeinen Fall durch eine Summe von einem Vektor-, oder Skalarpotential und einem Rest aus den Räumen \mathbb{H}_{rot} und \mathbb{H}_{div} darstellen. In dieser Darstellung ist eine Vorgehensweise analog zu der in Abschnitt 1.2 nicht mehr möglich und man erhält in dieser Form keine Gleichungen für die elektromagnetischen Potentiale mehr.

In diesem Fall lässt sich jedoch eine Zerlegung des $L^2(\Omega)$ in eine orthogonale Summe beweisen (siehe [6, S.40f]): Für jede Funktion $\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3$ existieren $\phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ und $\mathbf{A} \in [H^1(\Omega)]^3$ mit $TA_k = 0$ auf Γ_0 und $TA_k = \text{const}$ auf Γ_i für $k = 1, 2, 3$ und $1 \leq i \leq I$, sodass

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \text{rot } \mathbf{A}.$$

Diese Zerlegung findet vor allem bei Problemstellungen in der Strömungsmechanik Anwendung und ist dort Grundlage von numerischen Algorithmen. Für eine diesbezüglich weiterführende Betrachtung sei auf [6] verwiesen.

Bemerkung 3.23. Wie in Bemerkung 3.21 angedeutet, können die Funktionenräume \mathbb{H}_{rot} und \mathbb{H}_{div} auch durch die Menge aller Gradienten $\nabla\phi$ von Funktionen ϕ identifiziert werden, die Lösungen bestimmter Differentialgleichungen sind. Diese sollen durch folgendes Schema dargestellt werden (mit $\phi_1 \in H^1(\mathring{\Omega})$ und $\phi_2 \in H^1(\Omega)$). Hierbei wird unter den Mengen von Gradienten $\nabla\phi$ aufgelistet, welche Eigenschaften die Funktion ϕ für den jeweiligen Raum erfüllen muss:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{\text{rot}} &= \{\nabla\phi_1\} : & \mathbb{H}_{\text{div}} &= \{\nabla\phi_2\} : \\ \Delta\phi_1 &= 0 \text{ in } \mathring{\Omega}, & \Delta\phi_2 &= 0 \text{ in } \Omega, \\ T_n(\nabla\phi_1) &= 0 \text{ auf } \partial\Omega, & T\phi_2 &= \text{const auf } \Gamma_i \text{ für } 0 \leq i \leq I, \\ [\phi_1]_{\Sigma_j} &= \text{const für } 1 \leq j \leq J, \\ [\nabla\phi_1 \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma_j} &= 0 \text{ für } 1 \leq j \leq J. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben nur dann Lösungen, die nichttriviale Gradienten besitzen, falls $J, I > 0$, womit die Aussage über die Dimension von \mathbb{H}_{rot} und \mathbb{H}_{div} aus Satz 3.22 plausibel wird. Dies soll hier natürlich nur zur Motivation und nicht zum Beweis dienen. Eine eingehendere Diskussion dieser Funktionenräume findet man etwa in [4, ch.IX, Part A], oder in [1]. //

In dem Fall, dass die betrachtete Menge Ω unbeschränkt ist ergibt sich eine zu Satz 3.22 analoge Situation. Hier soll ebenfalls nur eine kurze Darstellung gegeben werden, die entsprechenden Resultate findet man in [4, S.228-232].

Eine Zerlegung von $W^1(\Omega)$ für eine unbeschränkte Menge Ω erhält man, wenn $\overline{\Omega}^c$, also das Komplement des Abschlusses der betrachteten Menge Ω , die Voraussetzungen von Satz 3.22 erfüllt. Die erhaltene Zerlegung ist analog zu der aus Satz 3.22, jedoch tritt an die Stelle des Raumes H^1 der zu unbeschränkten Mengen gehörende Sobolevraum W^1 :

$$\begin{aligned} H(\text{rot } 0) &= \nabla W^1 \oplus \mathbb{H}_{\text{rot}}, \\ H(\text{div } 0) &= \text{rot } W^1 \oplus \mathbb{H}_{\text{div}}. \end{aligned}$$

Einzig die Aussage über die Dimensionen von \mathbb{H}_{div} und \mathbb{H}_{rot} gilt hier nicht mehr. Außerdem muss beachtet werden, dass auch in den definierenden Gleichungen der Räume \mathbb{H}_{rot} und \mathbb{H}_{div} in Bemerkung 3.23 statt $H^1(\Omega)$ und $H^1(\mathring{\Omega})$ die Räume $W^1(\Omega)$ und $W^1(\mathring{\Omega})$ treten.

Die Voraussetzungen für diese Zerlegungen werden insbesondere vom gesamten \mathbb{R}^3 erfüllt. Dieser ist einfach zusammenhängend und hat keinen Rand. Deshalb entfallen bei den Zerlegungen die zusätzlichen Räume \mathbb{H}_{rot} und \mathbb{H}_{div} und es kann eine sehr einfache Charakterisierung angegeben werden, die bei den Beispielen des nächsten Kapitels Anwendung findet.

Satz 3.24. Sei $\mathbf{u} \in [L^2(\mathbb{R}^3)]^3$.

- (i) Wenn $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ gilt, dann existiert ein eindeutiges Potential $\phi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, sodass $\mathbf{u} = \nabla \phi$.
- (ii) Wenn $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ gilt, dann existiert ein Vektorpotential $\mathbf{A} \in [W^1(\mathbb{R}^3)]^3$, sodass $\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Das Vektorpotential ist eindeutig, falls $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ gefordert wird.

Zuletzt kann noch der Fall betrachtet werden, dass die Menge Ω nicht zusammenhängend, sondern eine endliche Vereinigung offener, zusammenhängender und beschränkter Mengen ist, lässt sich auf Satz 3.22 zurückführen. Dieser Fall ist für die Betrachtungen in Kapitel 4 ebenfalls nicht von Bedeutung und bietet zudem wenig zusätzliche Einsichten, hierzu sei auf die Literatur (etwa [4, ch.XI §1]) verwiesen.

4 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen konkreter Probleme

In diesem Kapitel werden wir einige häufig auftretende Probleme betrachten. Der Übersichtlichkeit halber werden wir uns auf elektrostatische Phänomene beschränken, für die Magnetostatik gelten analoge Resultate, wenn statt der Ladungsverteilung ρ eine Stromverteilung \mathbf{j} mit $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ betrachtet wird. Dies soll die Anwendung der erarbeiteten Methoden an Beispielen verdeutlichen. Dabei orientieren wir uns an [4, Ch. XI, §2].

Zunächst werden wir in Abschnitt 4.1 das Problem einer Ladungsverteilung im Vakuum betrachten, um die Grundzüge der in Abschnitt 2.1 vorgestellten Lösungsmethode, angewandt auf elektromagnetische Probleme, zu verstehen. Danach soll in Abschnitt 4.2 speziell auf Randbedingungen eingegangen werden. Zuletzt beschäftigt sich Abschnitt 4.3 mit dem Problem elektrischer Ladungen in Anwesenheit von dielektrischer Materie.

4.1 Feld einer Ladungsverteilung im \mathbb{R}^3

Wir wollen uns nun mit dem einfachsten der elektromagnetischen Probleme befassen, dem einer gegebenen elektrischen Ladungsverteilung im Vakuum, das den ganzen \mathbb{R}^3 ausfüllt. Dieses Problem sei mit (P1) bezeichnet. Rufen wir dazu die Maxwellgleichungen in Erinnerung, die sich für unser konkretes Problem als

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathbb{R}^3, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \quad (4.2)$$

mit gegebener Ladungsverteilung $\rho \in W^{-1}(\mathbb{R}^3)$ schreiben lassen. Weiter schränken wir ein, dass wir nur Lösungen mit endlicher Energie betrachten, was konkret bedeutet, dass (siehe [2, S. 434])

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}|^2 \, dx < \infty. \quad (4.3)$$

Eine etwaige Lösung dieses Problems muss also wegen (4.3) in $L^2(\mathbb{R}^3)$ liegen. Zusammen mit (4.1) erhalten wir, dass eine Lösung, falls sie existiert aus $H(\operatorname{rot} 0)$ sein muss. Aufgrund der Charakterisierungen aus dem letzten Kapitel können wir nun die schwache Formulierung von (P1) aufstellen.

Lemma 4.1. Für jede Lösung $\mathbf{E} \in H(\text{rot } 0)$ von (P1) existiert genau eine Funktion $\phi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, die

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = -4\pi \langle \rho, \psi \rangle_{W^{-1}} \quad \text{für alle } \psi \in W^1(\mathbb{R}^3) \quad (4.4)$$

erfüllt. Umgekehrt gilt für jede Funktion $\phi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, die (4.4) erfüllt, dass ihr Gradient $\nabla \phi =: \mathbf{E}$ das Problem (P1) löst.

Beweis. Sei $\mathbf{E} \in H(\text{rot } 0)$ so, dass (P1) erfüllt wird. Nach Satz 3.24 existiert ein eindeutiges $\phi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, sodass $\mathbf{E} = \nabla \phi$. Gleichung (4.2) wird damit zu

$$\Delta \phi = 4\pi \rho.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit einer Testfunktion $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\Delta \phi) \psi \, d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = 4\pi \langle \rho, \psi \rangle_{W^{-1}},$$

indem wir im ersten Schritt den Integralsatz von Gauß angewendet haben. Da nach Definition die Testfunktionen dicht in $W_0^1(\mathbb{R}^3) = W^1(\mathbb{R}^3)$ liegen, gilt diese Gleichung auch für alle $\psi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, womit ϕ (4.4) erfüllt.

Für die andere Richtung betrachten wir ein $\phi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, das (4.4) erfüllt. Damit gilt sofort $\nabla \phi \in L^2(\Omega)$. Weiter gilt aufgrund der Vertauschbarkeit distributioneller Ableitungen $\text{rot } \nabla \phi = 0$. Zuletzt lassen sich die Schritte aus dem ersten Teil des Beweises in umgekehrter Reihenfolge durchführen, um auf $\text{div } \nabla \phi = 4\pi \rho$ zu kommen. \square

Wir haben also die schwache Formulierung von (P1) gefunden: Finde $\phi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, sodass (4.4) gilt. In dieser Formulierung gilt

$$\begin{aligned} a(\phi, \psi) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x}, \\ F(\psi) &:= -4\pi \langle \rho, \psi \rangle_{W^{-1}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

für $\phi, \psi \in W^1(\mathbb{R}^3)$. Nun bleibt noch zu zeigen, dass die schwache Formulierung eine eindeutige Lösung besitzt.

Satz 4.2. Für $\rho \in W^{-1}(\mathbb{R}^3)$ existiert eine eindeutige Funktion $\phi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, sodass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = -4\pi \langle \rho, \psi \rangle_{W^{-1}} \quad \text{für alle } \psi \in W^1(\mathbb{R}^3).$$

Beweis. Wir wollen das Lemma von Lax-Milgram anwenden. Dazu zeigen wir Steitigkeit und Koerzivität von a und Stetigkeit von F aus (4.5):

$$\begin{aligned} |a(\phi, \psi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi \cdot \nabla\psi| \, d\mathbf{x} \leq \|\nabla\phi\|_{L^2} \|\nabla\psi\|_{L^2} = |\phi|_{W^1} |\psi|_{W^1}, \\ a(\phi, \phi) &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi|^2 \, d\mathbf{x} = |\phi|_{W^1}^2, \\ |F(\psi)| &= 4\pi |\langle \rho, \psi \rangle_{W^{-1}}| \leq 4\pi \|\rho\|_{W^{-1}} \|\psi\|_{W^1}, \end{aligned}$$

für $\phi, \psi \in W^1(\mathbb{R}^3)$. Nach Satz 2.21 reicht dies aus, um die Voraussetzungen vom Lax-Milgram Lemma, 2.3, nachzuprüfen. Somit folgt aus diesem die Aussage des Satzes. \square

Satz 4.2 zusammen mit Lemma 4.1 garantieren also die eindeutige Lösbarkeit von (P1), sofern die Ladungsverteilung aus $W^{-1}(\mathbb{R}^3)$ stammt. Man beachte, dass vor allem Punktladungen, die in der Physik häufig betrachtet werden, nicht in diesem Raum liegen. Punktladungen werden also von dieser Theorie mathematisch nicht erfasst.

Zuletzt sei noch bemerkt, dass für eine gegebene Stromverteilung $\mathbf{j} \in [W^{-1}(\mathbb{R}^3)]^3$ mit $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ das zugehörige magnetostatische Problem mit analoger Argumentation gelöst werden kann. Der Hilbertraum, der in der schwachen Formulierung verwendet wird, ist hier die Menge $\{\mathbf{A} \in [W^1(\mathbb{R}^3)]^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{A} = 0\}$, denn Satz 3.24 liefert für jedes magnetische Feld \mathbf{B} mit endlicher Energie

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{B}|^2 \, d\mathbf{x},$$

für das $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ gilt, ein eindeutiges Potenzial aus diesem Raum. Die entsprechende Bilinearform ist

$$a(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{A}}) := \left(\operatorname{rot} \mathbf{A}, \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{A}} \right)_{L^2},$$

was wegen $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \nabla \operatorname{div} - \Delta$ und $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ wiederum auf analoge Gleichungen führt.

4.2 Feld in einem Hohlraum

Nun wollen wir ein Problem betrachten, das nur auf einer beschränkten Menge gestellt ist, wodurch Randbedingungen hinzukommen. Sei dazu Ω eine offene, beschränkte und einfach zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^3 mit zusammenhängendem Lipschitzrand. Wir nehmen an, dass diese Menge durch ein nicht näher spezifiziertes Medium begrenzt ist, auf dessen Oberfläche, die an Ω grenzt, sich eine Flächenladung $\rho_f \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ befindet, die $\langle \rho_f, 1 \rangle_{H^{-1/2}} = 0$ erfüllt. Es könnte sich hierbei etwa um ein polarisiertes, elektrisch neutrales Medium handeln (es werden Ladungen nicht hinzugefügt, oder weggenommen, sondern nur verschoben). Ω selbst sei mit Vakuum und einer Ladungsdichte $\rho \in L^2(\Omega)$ mit $\int_{\Omega} \rho \, d\mathbf{x} = 0$ ausgefüllt. Dieses Problem bezeichnen wir mit (P2).

Die Randbedingungen aus Unterabschnitt 1.3.1 lassen sich wegen des Spursatzes 3.9 für $H(\text{div})$ durch den Spuroperator ausdrücken. Die Gleichungen für (P2) lauten damit:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi\rho && \text{in } \Omega, \\ T_n \mathbf{E} &= 4\pi\rho_f && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Zusammen mit der Einschränkung, dass die Energie endlich sein muss, erhalten wir wiederum $\mathbf{E} \in H(\text{rot } 0)$. Das Potential, das wir erhalten werden, ist wegen der Beschränktheit der betrachteten Menge und der Randbedingung, die nur etwas über die Ableitung aussagt, nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Der Hilbertraum der schwachen Formulierung ist also $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, wir werden aber im Folgenden Elemente $\phi + \mathbb{R}$ daraus mit einem Repräsentanten ϕ identifizieren, um die Übersichtlichkeit zu wahren.

Lemma 4.3. *Für jede Lösung $\mathbf{E} \in H(\text{rot } 0)$ von (P2) existiert genau eine Funktion $\phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, die*

$$\int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, d\mathbf{x} = 4\pi \langle \rho_f, T\psi \rangle_{H^{-1/2}} - 4\pi (\rho, \psi)_{L^2} \quad \text{für alle } \psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \quad (4.7)$$

erfüllt. Umgekehrt gilt für jede Funktion $\phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, die (4.7) erfüllt, dass ihr Gradient $\nabla\phi =: \mathbf{E}$ das Problem (P2) löst.

Beweis. Da $\mathbf{E} \in H(\text{rot } 0)$ und Ω als einfach zusammenhängend angenommen wurde, folgt aus Satz 3.20 zunächst die Existenz eines eindeutigen $\phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, sodass $\mathbf{E} = \nabla\phi$. Wir erhalten also wegen (4.6)

$$\Delta\phi = 4\pi\rho.$$

Multiplizieren wir dies mit einer Funktion $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ und integrieren über Ω , können wir, weil wir $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \in L^2(\Omega)$, also $\mathbf{E} \in H(\text{div})$, vorausgesetzt haben, den verallgemeinerten Green'schen Integralsatz (3.2) anwenden. Dies liefert

$$(\nabla\phi, \nabla\psi)_{L^2} + (\Delta\phi, \psi)_{L^2} = \langle T_n(\nabla\phi), T\psi \rangle_{H^{-1/2}}$$

und nach Einsetzen der Differentialgleichungen für das Problem (P2)

$$(\nabla\phi, \nabla\psi)_{L^2} = 4\pi \langle \rho_f, T\psi \rangle_{H^{-1/2}} - 4\pi (\rho, \psi)_{L^2}.$$

Dies gilt aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ in $H^1(\Omega)$ auch für alle $\psi \in H^1(\Omega)$, womit der erste Teil der Behauptung gezeigt ist. Die andere Richtung folgt wieder analog zu Lemma 4.1 und indem man diese Schritte rückwärts nachvollzieht. \square

Die schwache Formulierung von (P2) lautet also: Finde $\phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, sodass (4.7) gilt. Mit den Bezeichnungen aus dem Satz von Lax-Milgram gilt

$$a(\phi, \psi) := \int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, d\mathbf{x},$$

$$F(\psi) := 4\pi \langle \rho_f, T\psi \rangle_{H^{-1/2}} - 4\pi (\rho, \psi)_{L^2}.$$

Damit lässt sich die Lösbarkeit zeigen.

Satz 4.4. Für $\rho_f \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ und $\rho \in L^2(\Omega)$ existiert eine eindeutige Funktion $\phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, sodass

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = 4\pi \langle \rho_f, T\psi \rangle_{H^{-1/2}} - 4\pi (\rho, \psi)_{L^2} \text{ für alle } \psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Beweis. Die Stetigkeit und Koerzivität der Bilinearform wurden schon im Beweis von Lemma 3.13 gezeigt. Nun müssen wir zunächst überprüfen, dass das Funktional F wohldefiniert und stetig ist. Die Wohldefiniertheit folgt aus den Voraussetzungen für Ladungsdichte ρ und Flächenladungsdichte ρ_f (mit $c \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} F(\psi + c) &= 4\pi \langle \rho_f, T(\psi + c) \rangle_{H^{-1/2}} - 4\pi (\rho, \psi + c)_{L^2} \\ &= F(\psi) + 4\pi c \langle \rho_f, 1 \rangle_{H^{-1/2}} - 4\pi c (\rho, 1)_{L^2} \\ &= F(\psi). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Die Stetigkeit des Funktionals folgt mit der Stetigkeit des Spuroperators:

$$\begin{aligned} |F(\psi)| &\leq 4\pi (\|\rho_f\|_{H^{-1/2}} \|T\psi\|_{H^{1/2}} + \|\rho\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2}) \\ &\leq 4\pi (C \|\rho_f\|_{H^{-1/2}} \|\psi\|_{H^1} + \|\rho\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2}) \\ &\leq 4\pi (C \|\rho_f\|_{H^{-1/2}} + \|\rho\|_{L^2}) \|\psi\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Da diese Abschätzung für alle ψ in einer Äquivalenzklasse von $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ gilt, gilt diese auch für das Infimum der Funktionen aus der Klasse, also auch für die Quotientennorm $\|\psi\|_{H^1/\mathbb{R}}$ von ψ . Mit dem Lemma von Lax-Milgram folgt die Behauptung. \square

Wiederum haben wir hier die eindeutige Lösbarkeit von (P2) gezeigt, falls Flächenladungsdichte und Ladungsverteilung ladungsneutral sind. Der entsprechende magnetostatische Fall ist wieder analog zu behandeln, wobei die Flächenstromdichte zusätzlich die Kontinuitätsgleichung auf der Oberfläche und die betrachtete Menge Ω die Voraussetzungen von Satz 3.14 erfüllen muss.

Natürlich sind die Voraussetzungen, die hier an die Quellterme gestellt wurden sehr restriktiv (wir hätten auch fordern können, dass $\langle \rho_f, 1 \rangle_{H^{-1/2}} = (\rho, 1)_{L^2}$, wie man in (4.8) sieht). Das ist aber in diesem Fall notwendig, um mit der in dieser Arbeit vorgestellten Methode die Lösbarkeit zeigen zu können. Im Nachwort wird auf dieses Problem noch einmal kurz eingegangen.

4.3 Feld in Anwesenheit dielektrischer Materie

Zuletzt betrachten wir noch eine Kombination aus den vorigen Problemen und beziehen noch dielektrische Materie mit ein. Dazu sei eine beschränkte und offene Teilmenge Ω_1 von \mathbb{R}^3 gegeben. Zusätzlich sei das Innere des Komplements mit $\Omega_2 := (\Omega_1^c)^\circ$ bezeichnet. Diese beiden Bereiche sollen von *perfekten dielektrischen Medien* ausgefüllt sein, mit Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Weiter wird an der Grenzfläche $\Gamma = \partial\Omega_1 = \partial\Omega_2$ eine Flächenladungsdichte $\rho_f \in H^{-1/2}(\Gamma)$ vorgegeben. Dies sei Problem (P3).

Aus den beiden vorhergehenden Abschnitten und mit den linearen Materialgesetzen (1.11), die für perfekte dielektrische Medien gelten, ist nun klar, wie die Gleichungen in diesem Fall aussehen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \mathbf{0} && \text{in } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div}(\varepsilon_1 \mathbf{E}) &= 0 && \text{in } \Omega_1, \\ \operatorname{div}(\varepsilon_2 \mathbf{E}) &= 0 && \text{in } \Omega_2, \\ T_n(\varepsilon_2 \mathbf{E}) - T_n(\varepsilon_1 \mathbf{E}) &= 4\pi \rho_f && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Wiederum zusammen mit der Annahme endlicher Energie folgt

$$\|\mathbf{E}\|_{L^2}^2 \leq \frac{8\pi}{\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \left(\frac{\varepsilon_1}{8\pi} \int_{\Omega_1} |\mathbf{E}|^2 \, d\mathbf{x} + \frac{\varepsilon_2}{8\pi} \int_{\Omega_2} |\mathbf{E}|^2 \, d\mathbf{x} \right) < \infty,$$

wobei der Ausdruck in der Klammer die Energie in diesem Fall ist. Somit gilt $\mathbf{E} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $\mathbf{E} \in H(\operatorname{rot} 0)$ im gesamten \mathbb{R}^3 .

Lemma 4.5. *Für jede Lösung $\mathbf{E} \in H(\operatorname{rot} 0)$ von (P3) existiert genau eine Funktion $\phi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, die*

$$\varepsilon_1 \int_{\Omega_1} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = 4\pi \langle \rho_f, T\psi \rangle_{H^{-1/2}} \quad \text{für alle } \psi \in W^1(\mathbb{R}^3) \quad (4.9)$$

erfüllt. Umgekehrt gilt für jede Funktion $\phi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, die (4.9) erfüllt, dass ihr Gradient $\nabla \phi =: \mathbf{E}$ das Problem (P3) löst.

Beweis. Der Beweis verläuft sehr analog zum Beweis von Lemma 4.3. Wiederum liefert Satz 3.24 die Existenz eines Potentials $\phi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, woraus mit dem verallgemeinerten Green'schen Integralsatz (3.2) die Gleichheit

$$\varepsilon_1 \int_{\Omega_1} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = 4\pi \langle \rho_f, T\psi \rangle_{H^{-1/2}}$$

für alle $\psi \in W^1(\Omega)$ folgt. Die umgekehrte Richtung erhält man durch Umkehr dieser Beweisschritte, wobei hier sukzessive das Potential ϕ erst aus $\mathcal{D}(\Omega_1)$ und dann aus $\mathcal{D}(\Omega_2)$

gewählt werden muss, damit die Divergenzfreiheit auf Ω_1 und Ω_2 separat gezeigt werden kann. \square

Die schwache Formulierung lautet hier: Finde $\phi \in W^1(\mathbb{R}^3)$, sodass (4.9) gilt. Es ergibt sich eine unwesentlich kompliziertere Situation, als in den vorausgegangenen Problemen:

$$a(\phi, \psi) := \varepsilon_1 \int_{\Omega_1} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x},$$

$$F(\psi) := 4\pi \langle \rho_f, T\psi \rangle_{H^{-1/2}}.$$

Wie gehabt, kann damit leicht die Lösbarkeit bewiesen werden.

Satz 4.6. Für $\rho_f \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ existiert eine eindeutige Funktion $\phi \in H^1(\Omega)$, sodass

$$\varepsilon_1 \int_{\Omega_1} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + \varepsilon_2 \int_{\Omega_2} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = 4\pi \langle \rho_f, T\psi \rangle_{H^{-1/2}} \text{ für alle } \psi \in H^1(\Omega).$$

Beweis. Wir müssen wieder die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram überprüfen. Für die Bilinearform gilt

$$|a(\phi, \psi)| \leq \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\nabla \psi\|_{L^2},$$

$$a(\phi, \phi) \geq \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \|\nabla \phi\|_{L^2}^2,$$

woraus die gewünschten Eigenschaften mit der Äquivalenz von $|\cdot|_{W^1}$ und $\|\cdot\|_{W^1}$ auf $W^1(\Omega)$ folgen. Für das Funktional erhalten wir wegen der Stetigkeit des Spuoperators

$$|F(\psi)| = 4\pi \langle \rho_f, T\psi \rangle_{H^{-1/2}} \leq 4\pi \|\rho_f\|_{H^{-1/2}} \|\psi\|_{W^1}.$$

Damit sind die Voraussetzungen erfüllt und die Behauptung gezeigt. \square

Sind die Vorbereitungen also erst erledigt, folgen Lösbarkeits- und Eindeutigkeitsaussagen für verschiedene Probleme relativ schnell. Die in diesem Kapitel behandelten Beispiele decken schon einen beachtlichen Teil aller im statischen Elektromagnetismus häufig auftretenden Probleme ab. Weitere Probleme, die eine Kombination aus den eben gegebenen Beispielen sind, lassen sich natürlich analog lösen.

Nachwort

Es fällt natürlich auf, dass wir einiges an Arbeit in Vorbereitungen investieren mussten, um Aussagen zu erhalten, die für einen Physiker nur bedingt interessant sind. Ein Physiker mag mit einer nicht ganz so stringenten Arbeitsweise in vielen Situationen schneller zu einem befriedigenderem Ergebnis kommen, es muss aber hierbei beachtet werden, dass dieses aufgrund der fehlenden mathematischen Strenge eventuell falsch oder unbrauchbar sein kann. Es muss daher oft ein Mittelweg aus beiden Ansätzen gefunden werden. Hier wurde aber nur auf die mathematische Betrachtungsweise eingegangen.

In dieser Arbeit konnte deshalb und aufgrund des geringen Umfangs natürlich nur ein sehr kleiner Teil der praxisrelevanten Fragestellungen behandelt werden. Eine Frage, die sich nach dem erfolgreichen Nachweis der Existenz einer Lösung unmittelbar stellt, ist die der Regularität der Lösung bei gegebenen regulären Daten. Dieses Thema wurde hier komplett ausgelassen, eine umfangreiche Darstellung der Regularität der in Abschnitt 3.3 angegebenen Zerlegungen findet sich etwa in [4, ch.IX.A §1.4].

Wie in Abschnitt 4.2 angesprochen, sind die Voraussetzungen, die gestellt werden müssen, um im Rahmen der hier entwickelten Theorie eine Lösung zu garantieren, oft sehr restriktiv. Das resultiert aus der Kombination von Poissongleichung und Randwerten für die Ableitungen, die mit dem Lax-Milgram Lemma mitunter sehr mühsam zu behandeln ist. Ein anderer Zugang ist die Formulierung als sogenanntes Sattelpunktproblem. Dadurch lassen sich anscheinend die hier betrachteten Gleichungen fallweise um einiges besser behandeln als mit der Lax-Milgram Methode. Zusätzlich werden weniger Voraussetzungen an das reale Problem benötigt. Dieser Zugang wird etwa in [6, §4.2] vorgestellt.

Generell lassen sich noch viele weiterführende Aussagen, vor allem Einbettungsaussagen über die Funktionenräume $H(\text{div})$ und $H(\text{rot})$ und diverse Unterräume beweisen. Diese sind für numerische Betrachtungen interessant, insofern sie die Auswahl der verwendeten numerischen Lösungsmethode und deren Konvergenzraten beeinflussen. Für solche Betrachtungen sei auf [4, ch.IX.A §1] und [6, ch.I §2,§3] verwiesen.

Zuletzt sei noch erwähnt, dass es in der Potentialtheorie neben der Lösung mittels Lax-Milgram auch noch eine Integraldarstellung für viele Probleme gibt, die sich auch oft sehr gut zur numerischen Berechnung eignen. Dieses Thema wird etwa in [5, ch.XI.B §2] angeschnitten.

Literaturverzeichnis

- [1] AMROUCHE, CHERIF, CHRISTINE BERNARDI, MONIQUE DAUGE und VIVETTE GIRAULT: *Vector Potentials in Three-dimensional Non-smooth Domains*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 21:823–864, 1998.
- [2] BARTELMANN, MATTHIAS, BJÖRN FEUERBACHER, TIMM KRÜGER, DIETER LÜST, ANTON REBHAN und ANDREAS WIPF: *Theoretische Physik*. Springer Spektrum, 2015.
- [3] DAUTRAY, ROBERT und JACQUE-LOUIS LIONS: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Volume 1: Physical Origins and Classical Methods*. Berlin [et al.]: Springer, 1990.
- [4] DAUTRAY, ROBERT und JACQUE-LOUIS LIONS: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Volume 3: Spectral Theory and Applications*. Berlin [et al.]: Springer, 1990.
- [5] DAUTRAY, ROBERT und JACQUE-LOUIS LIONS: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Volume 4: Integral Equations and Numerical Methods*. Berlin [et al.]: Springer, 1990.
- [6] GIRAULT, VIVETTE und PIERRE-ARNAUD RAVIART: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Berlin [et al.]: Springer, 1986.
- [7] GRISVARD, PIERRE: *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Monographs and studies in mathematics ; 24. Pitman, 1985.
- [8] JÜNGEL, ANSGAR: *Partielle Differentialgleichungen*. Vorlesungsmanuskript. [<http://www.asc.tuwien.ac.at/~juengel/scripts/PDE.pdf>; 02.08.2015].
- [9] RENARDY, MICHAEL und ROBERT C. ROGERS: *An Introduction to Partial Differential Equations*. Berlin [et al.]: Springer, Second Edition Auflage, 2004.