



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

BACHELORARBEIT

# Helmholtz-Hodge-Zerlegung

Grundlagen, Analysis und Anwendung in der  
Strömungsmechanik

Ausgeführt am Institut für Analysis und Scientific Computing der  
Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von  
Univ.Prof. Dip.-Ing. Dr.tech.  
Anton Arnold

durch  
Nacim Seddiki  
1225604

Wien, am 6. Oktober 2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1	Notation und Geometrie . . . . .	3
1.1.1	Geometrische Aspekte . . . . .	4
1.1.2	Lipschitz-Gebiete . . . . .	5
1.2	Grundlegende Funktionenräume . . . . .	7
1.2.1	Testfunktionen und Distributionen . . . . .	7
1.2.2	Die Räume $H^k(\Omega), k \in \mathbb{N}_0$ . . . . .	9
1.2.3	Die Räume $H^k(\Omega), k \in \mathbb{R}$ . . . . .	10
1.2.4	Sobolev-Räume auf $\partial\Omega$ . . . . .	11
1.3	Spezielle Differentialoperatoren . . . . .	12
1.4	Greensche Formel . . . . .	13
1.5	Regularisierung mittels Konvolution . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Motivation - Helmholtz-Hodge-Zerlegung für Hölder-stetige Vektorfelder</b>	<b>16</b>
2.1	Die Navier-Stokes-Gleichung . . . . .	16
2.2	Helmholtz-Hodge-Zerlegung für Hölder-stetige Vektorfelder . . . . .	18
2.2.1	Vorgehensweise für $L^2$ -Vektorfelder . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Die Räume <math>H(\operatorname{div}, \Omega), H(\operatorname{curl}, \Omega), H(\operatorname{curl}, \Omega)</math></b>	<b>22</b>

3.1	Grundlegende Definitionen und Eigenschaften . . . . .	22
3.2	Spurtheoreme und Greensche Formeln . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Skalarpotentiale</b>	<b>31</b>
4.1	Das Bild von <b>grad</b> . . . . .	31
4.2	Der Kern von <b>grad</b> . . . . .	33
4.3	Helmholtz-Hodge-Zerlegung . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Vektorpotentiale und Stromfunktionen</b>	<b>35</b>
5.1	Geometrische Eigenschaften . . . . .	35
5.2	Das Bild von <b>curl</b> . . . . .	36
5.3	Der Kern von <b>curl</b> . . . . .	44
5.3.1	Der zweidimensionale Fall . . . . .	44
5.3.2	Der dreidimensionale Fall . . . . .	46
5.4	Divergenzfreie Vektorpotentiale . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Anwendung</b>	<b>55</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	55
6.2	Die Stokes-Gleichung . . . . .	56
6.3	Abschließende Bemerkung . . . . .	59

# Kapitel 1

## Einleitung und Grundlagen

Ziel dieser Arbeit ist die sogenannte Helmholtz-Hodge-Zerlegung vorzustellen. Hierbei handelt es sich um eine orthogonale Zerlegung des Hilbertraumes  $L^2(\Omega)^n$ , welche in einer engen Verbindung mit *Divergenz-* und *Rotationsoperatoren* steht. Insbesondere ist dies von Nutzen, wenn obige Operatoren in kanonischer Weise in der Problemstellung auftreten (z.B. Navier-Stokes-Gleichung in der Strömungsmechanik oder Maxwell-Gleichungen in der Elektrodynamik).

Als mathematische Grundlage dient die Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen", gelesen im Wintersemester 2015 von Prof. Anton Arnold (Skript zur Vorlesung: [Jü13]) an der Technischen Universität Wien.

Im nun folgenden Teil dieses Kapitels werden die wichtigsten Definitionen, Resultate und Hilfsmittel vorgestellt, welche als Basis für jegliches weitere Vorgehen zu verstehen sind. Im Wesentlichen handelt es sich hierbei um eine kurze Zusammenfassung von Kapitel 2, Seite 49-114 in [Neč12] und Kapitel 1, Seite 1-17 in [GR86].

### 1.1 Notation und Geometrie

Zur notationellen Vereinfachung, und um skalare von vektorwertigen Größen besser unterscheiden zu können, werden letztere immer fett gedruckt angeschrieben. Des Weiteren wird vereinbart, dass für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \quad \text{und} \quad |\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Somit ist unter  $x_i$  immer die  $i$ -te Komponente eines Vektors zu verstehen. Diese Art der Indizierung gilt selbstverständlich auch, falls für Funktionen oder Operatoren hervorgehoben werden soll, dass diese aus mehreren Komponenten bestehen. Für Produkträume sei hier vereinbart, dass auf diesen immer die Summennorm betrachtet wird. In gleicher Weise gilt dies für Skalarprodukte und kanonische Paarungen auf Produkträumen.

Es wird für Funktionenräume von stetig differenzierbaren Funktionen die Standardnotation verwendet. Dies bedeutet, dass  $C^{k,\mu}(\Omega_1, \Omega_2)$  die Menge aller  $k$ -fach Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen von  $\Omega_1$  nach  $\Omega_2$  mit Exponenten  $\mu$  bezeichnet. In Analogie wird der Raum aller  $k$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen mit  $C^k(\Omega_1, \Omega_2)$  und der Raum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit  $C^\infty(\Omega_1, \Omega_2)$  angeschrieben. Wenn  $\Omega_2$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist, so wird dies nicht explizit angegeben.

### 1.1.1 Geometrische Aspekte

Als erster wichtiger Schritt sollen nun die geometrischen Eigenschaften der zu betrachtenden Grundmenge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  festgelegt werden. Es bezeichnet  $\partial\Omega$  den Rand von  $\Omega$ .

**Definition 1.1.1** ( $C^{k,\mu}$ -Gebiet) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt<sup>1</sup>, offen und zusammenhängend,  $k \in \mathbb{R}$  und  $\mu \in \mathbb{R}_0^+$ .  $\Omega$  heißt ein  $C^{k,\mu}$ -Gebiet (resp.  $C^k$ -Gebiet) wenn für alle  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  eine Umgebung  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}}$  und ein System orthogonaler Koordinaten  $\mathbf{y}_{\mathbf{x}} = (y_{\mathbf{x},1}, \dots, y_{\mathbf{x},n-1}, y_{\mathbf{x},n})^T := (\mathbf{y}'_{\mathbf{x}}, y_{\mathbf{x},n})^T$  existieren, welche folgende Eigenschaften besitzen:

- i)  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}}$  ist bzgl. den neuen Koordinaten  $\mathbf{y}_{\mathbf{x}}$  ein Hyperquader, das heißt es existieren  $a_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, \dots, n$ , sodass gilt:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} : -a_i < y_i < a_i, i = 1, \dots, n\}.$$

- ii) Es existiert eine Funktion  $\phi_{\mathbf{x}} \in C^{k,\mu}(\mathcal{O}', [-\frac{a_n}{2}, \frac{a_n}{2}])$  (resp.  $C^k(\mathcal{O}', [-\frac{a_n}{2}, \frac{a_n}{2}])$ ), wobei

$$\mathcal{O}'_{\mathbf{x}} := \{\mathbf{y}' : -a_i < y_i < a_i, i = 1, \dots, n-1\}$$

gilt, sodass

$$\begin{aligned} \Omega \cap \mathcal{O}_{\mathbf{x}} &= \{\mathbf{y} \in \mathcal{O}_{\mathbf{x}} : y_{\mathbf{x},n} < \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}'_{\mathbf{x}})\}, \\ \partial\Omega \cap \mathcal{O}_{\mathbf{x}} &= \{\mathbf{y} \in \mathcal{O}_{\mathbf{x}} : y_{\mathbf{x},n} = \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}'_{\mathbf{x}})\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

erfüllt ist (vgl. Abbildung 1.1). Ist  $\Omega$  ein  $C^{0,1}$ -Gebiet, so wird  $\Omega$  auch als *Lipschitz-Gebiet* bezeichnet.

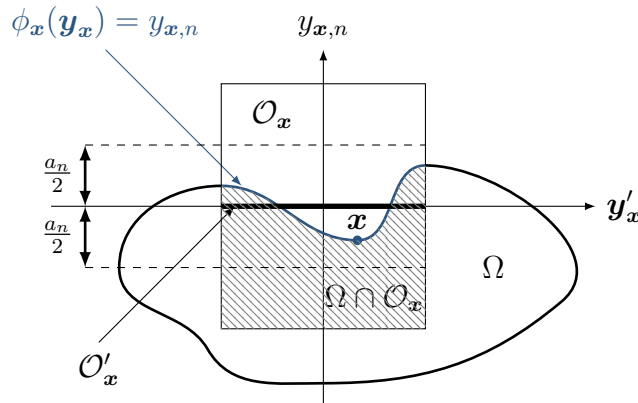


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung eines  $C^{k,\mu}$ -Gebietes

<sup>1</sup>Es ist üblich, in der Definition eines  $C^{k,\mu}$ -Gebietes zu fordern, dass die betrachtete Menge beschränkt ist. Da in dieser Arbeit nur beschränkte Gebiete betrachtet werden sollen, wurde diese zusätzliche Eigenschaft in Definition 1.1.1 vom Autor hinzugefügt.

Sei  $\Omega$  ein  $C^{k,\mu}$ -Gebiet. Anschaulich bedeutet dies, dass sich  $\partial\Omega$  lokal als Graph einer Funktion (hier: graph  $\phi_{\mathbf{x}}$  in der Umgebung  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}}$  für jedes  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ) darstellen lässt. Wesentlich ist hierbei, dass  $\bar{\Omega}$  lokal einen  $C^{k,\mu}$ -Hypographen bzgl.  $\phi_{\mathbf{x}}$  bildet, daher kann  $\bar{\Omega}$  nur unterhalb von graph  $\phi_{\mathbf{x}}$  liegen. Diese Eigenschaft ist auch in Abbildung 1.1 ersichtlich und wird in Definition 1.1.1 durch (1.1) gefordert.

*Anmerkung 1.1.2* Definition 1.1.1 lässt sich auf mehrere Arten verallgemeinern. So kann man die Forderung, dass  $\Omega$  beschränkt ist, durch die Voraussetzung, dass  $\partial\Omega$  kompakt ist ersetzen. Des Weiteren kann man auf die Voraussetzung, dass  $\Omega$  zusammenhängend ist, verzichten, jedoch spricht man in diesem Fall nicht mehr von einem  $C^{k,\mu}$ -Gebiet, sondern von einer  $C^{k,\mu}$ -Menge (siehe z.B. Definition 3.28., Seite 89f in [McL00]).  $\square$

*Anmerkung 1.1.3* Sei  $\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}') := (\mathbf{y}', \phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}'))$ , so bildet  $(\mathcal{O}_{\mathbf{x}}, \Phi_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in \partial\Omega}$  einen Atlas von  $\partial\Omega$ . Aufgrund der Beschränktheit von  $\Omega$  ist  $\partial\Omega$  kompakt. Insbesondere impliziert dies, dass endlich viele  $\mathbf{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  existieren, sodass

$$\mathcal{O}_j := \mathcal{O}_{\mathbf{x}_j}, \quad \mathcal{O}'_j := \mathcal{O}'_{\mathbf{x}_j}, \quad \Phi_j := \Phi_{\mathbf{x}_j}, \quad j = 1, \dots, N,$$

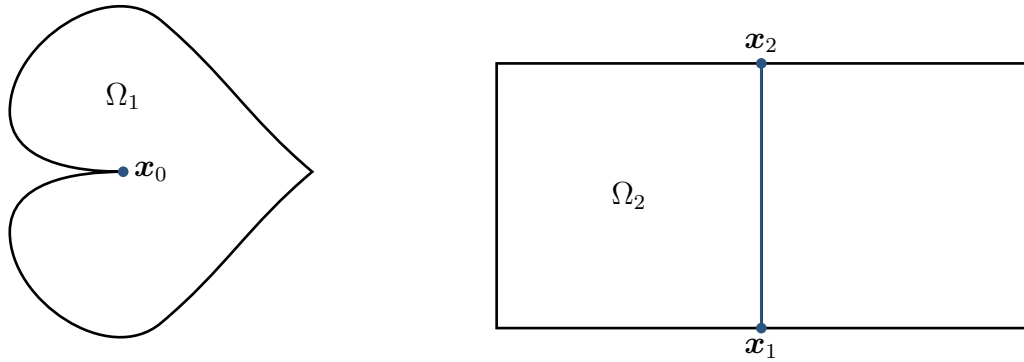
$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j$$

gilt. Somit bildet schon  $(\mathcal{O}_j, \Phi_j)_{j=1, \dots, N}$  einen Atlas von  $\partial\Omega$ . Diese Tatsache ist insofern nützlich, als dass man mit dem eben konstruierten endlichen Atlas leicht Normen für Sobolevräume auf  $\partial\Omega$  konstruieren kann (vgl. Abschnitt 1.2.4).  $\square$

## 1.1.2 Lipschitz-Gebiete

Von großer praktischer Bedeutung sind Lipschitz-Gebiete. Diese lassen im Vergleich mit  $C^1$ -Gebieten und Gebieten höherer Ordnung „Ecken“ zu, besitzen jedoch noch genügend Regularität, sodass der nach außen gerichtete (normierte) Normalvektor fast überall auf  $\partial\Omega$  existiert (vgl. Lemma 4.2., Seite 84 in [Neč12]). Dieser wird hier und in allen weiteren Kapiteln immer mit  $\mathbf{n}$  bezeichnet.

Obwohl die Menge aller Lipschitz-Gebiete sehr reichhaltig ist, lassen sich trotzdem sehr einfache Mengen konstruieren, welche die gewünschten Eigenschaften nicht erfüllen. In Abbildung 1.2 sind zwei Mengen dargestellt, welche keine Lipschitz-Gebiete sind.



(a)  $\Omega_1$  kann in keiner Umgebung von  $\mathbf{x}_0$  als (b)  $\Omega_2$  kann für keinen Punkt auf der Strecke  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  als Hypograph dargestellt werden. Zusätzlich ist  $\Omega_2$  nicht zusammenhängend.

Abbildung 1.2: Beispiele zu Mengen, die keine Lipschitz-Gebiete sind

Ein Lipschitz-Gebiet  $\Omega$  bietet darüber hinaus die praktische Eigenschaft, dass es sich durch endlich viele (strikt) sternförmige Lipschitz-Gebiete überdecken lässt (vgl. Proposition 1.1.5). Diese Eigenschaft kann sich bei der Beweisführung als nützlich erweisen (vgl. Beweis von Lemma 3.2.8).

**Definition 1.1.4.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Menge. Dann heißt  $\Omega$  *sternförmig* bezüglich  $\mathbf{y}$ , wenn für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  gilt:

$$\{\theta \mathbf{x} + (1 - \theta) \mathbf{y}, \theta \in [0, 1]\} \subseteq \Omega.$$

Die Menge  $\Omega$  heißt *strikt sternförmig* bezüglich  $\mathbf{y}$ , wenn für alle  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  gilt:

$$\{\theta \mathbf{x} + (1 - \theta) \mathbf{y}, \theta \in [0, 1)\} \subseteq \Omega.$$



(a) Eine (strikt-) sternförmige Menge

(b) Eine nicht sternförmige Menge

Abbildung 1.3: Beispiele zu sternförmigen Mengen

In Abbildung 1.3a ist eine strikt sternförmige Menge illustriert. Jede (strikt-) sternförmige Menge ist insbesondere einfach zusammenhängend, daher ist die Menge aus Abbildung 1.3b ein Beispiel für eine nicht sternförmige Menge.

**Proposition 1.1.5.** Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet. Dann existiert eine endliche und offene Überdeckung  $(O_i)_{i=1,\dots,N}$  von  $\bar{\Omega}$  mit den Eigenschaften:

- i)  $\Omega_i := O_i \cap \Omega$  ist ein Lipschitz-Gebiet.
- ii)  $\Omega_i$  ist strikt sternförmig.

(vgl. Proposition 2.5.4, Seite 69 in [CDA02]).

## 1.2 Grundlegende Funktionenräume

Im Folgenden sollen die wichtigsten Funktionenräume, welche in dieser Bachelorarbeit betrachtet werden, vorgestellt werden. Obwohl vieles aus diesem Abschnitt als bekannt angesehen werden kann, ist dies zwecks Einführung einer geeigneten Notation von Nöten. Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Menge und  $\lambda^n$  das  $n$ -dimensionale Lebesgue-Maß<sup>2</sup>. Den Ausgangspunkt für alle Betrachtungen wird der Raum

$$L^2(\Omega) := \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} |v|^2 d\lambda^n < \infty \right\}$$

bilden. Hier und im Weiteren werden alle benötigten Eigenschaften von  $L^2(\Omega)$  als bekannt vorausgesetzt. Das Skalarprodukt auf  $L^2(\Omega)$  wird mit

$$(v, w) := \int_{\Omega} vw d\lambda^n,$$

und die induzierte Norm mit  $\|\cdot\|$  bezeichnet.

### 1.2.1 Testfunktionen und Distributionen

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $C_0^\infty(\Omega)$  der Raum aller beliebig oft klassisch differenzierbaren Funktionen von  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompakten Träger. Der Träger einer stetigen Funktion  $\varphi$  wird mit  $\text{supp } \varphi$  bezeichnet. Die Elemente aus  $C_0^\infty(\Omega)$  werden auch Testfunktionen genannt. Für  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  und einen Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  sei

$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi,$$

wobei  $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . Ziel ist es nun, eine sinnvolle Topologie auf  $C_0^\infty(\Omega)$  vorzustellen. Hierzu sei durch

$$p_{m,K}(\varphi) := \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{\mathbf{x} \in K} |D^\alpha \varphi(\mathbf{x})|, \quad m \in \mathbb{N}_0, K \subseteq \Omega \text{ kompakt},$$

---

<sup>2</sup>Im Folgenden wird immer angenommen, dass alle betrachteten Mengen und Funktionen messbar bzgl.  $\lambda^n$  sind.



eine Familie von Seminormen auf  $C_0^\infty(\Omega)$  gegeben. Trivialerweise ist  $p_{m,K}$  auf dem Faktorraum  $X_{m,K} := C_0^\infty(\Omega)/\ker p_{m,K}$  eine Norm und induziert somit eine Normtopologie  $\mathcal{T}_{m,K}$ . Des Weiteren sei  $\pi_{m,K} : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow X_{m,K}$  die Projektion auf die jeweilige Äquivalenzklassen im Faktorraum. Es bezeichne  $\mathcal{T}$  die initiale Topologie auf  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich der Familie  $(X_{m,K}, \pi_{m,K})_{m \in \mathbb{N}_0, K \subseteq \Omega \text{ kompakt}}$  (vgl. Abbildung 1.4).

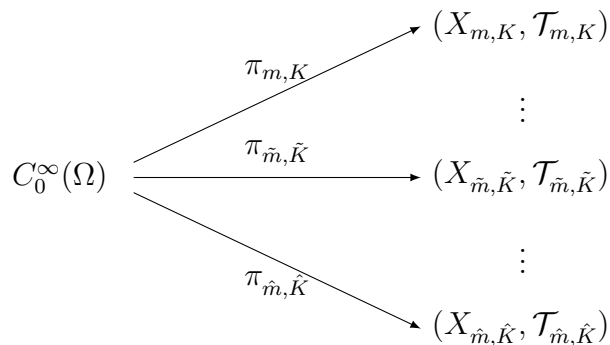


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung der Konstruktion einer Topologie auf  $C_0^\infty(\Omega)$  (vgl. Seite 67 in [WKB14])

**Definition 1.2.6.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und bezeichne  $\mathcal{T}$  obige Topologie auf  $C_0^\infty(\Omega)$ . Dann sei

$$\mathcal{D}(\Omega) := (C_0^\infty(\Omega), \mathcal{T}).$$

Aufgrund der Wahl der Topologie ist  $\mathcal{D}(\Omega)$  ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum (vgl. Satz 5.1.4, Seite 67 in [WKB14]). Folgende Proposition liefert eine handliche Charakterisierung für Konvergenz auf  $\mathcal{D}(\Omega)$ :

**Proposition 1.2.7.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$  eine Folge, so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  äquivalent zu:

- i) Es existiert eine kompakte Menge  $K_0 \subseteq \Omega$  mit  $\text{supp } \varphi_n \subseteq K_0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{m, K_0}(\varphi_n - \varphi) = 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}_0$ .

(vgl. Korollar, Seite 29 in [Yos80])

**Definition 1.2.8 (Raum der Distributionen)** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Der Raum der Distributionen ist gegeben durch den topologischen Dualraum von  $\mathcal{D}(\Omega)$  und wird mit  $\mathcal{D}(\Omega)'$  bezeichnet. Des Weiteren bezeichne  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{D}(\Omega)' \times \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  die kanonische Paarung beider Räume.

Durch

$$\langle D^\alpha v, \varphi \rangle := -1^{|\alpha|} \langle v, D^\alpha \varphi \rangle, \quad v \in \mathcal{D}(\Omega)', \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

(vgl. Seite 50, Kapitel 2 in [Neč12]) lassen sich Differentialoperatoren auf  $\mathcal{D}(\Omega)'$  definieren, wobei  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  ein beliebiger Multiindex ist. Es ist hier hervorzuheben, dass die Wahl der Topologie auf  $\mathcal{D}(\Omega)$  die Stetigkeit von Differenzialoperatoren im distributionellen Sinne impliziert.

## 1.2.2 Die Räume $H^k(\Omega)$ , $k \in \mathbb{N}_0$

Jede Funktion  $v \in L^2(\Omega)$  kann mittels  $(v, \cdot) : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  als Distribution aufgefasst werden. Somit ist es sinnvoll distributionelle Ableitungen von  $v$  zu bilden. Dies führt zu folgender Begriffsbildung:

**Definition 1.2.9.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $v \in L^2(\Omega)$  und  $\alpha$  ein Multiindex. Man sagt  $D^\alpha v \in L^2(\Omega)$ , wenn,

$$\exists f \in L^2(\Omega) : \langle D^\alpha v, \cdot \rangle = (f, \cdot)$$

gilt.

*Anmerkung 1.2.10* Aufgrund des Fundamentallemmas der Variationsrechnung kann es höchstens ein solches  $f$  geben. Für hinreichend glatte Funktionen kann immer die Ableitung im klassischen Sinne als entsprechendes  $f$  gewählt werden.  $\square$

**Definition 1.2.11** (*Sobolevräume  $H^k(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$* ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Der Sobolev-Raum  $H^k(\Omega)$  sei gegeben durch:

$$H^k(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

Durch

$$(v, u)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha v, D^\alpha u)$$

wird ein Skalarprodukt auf  $H^k(\Omega)$  definiert und die induzierte Norm wird mit  $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$  bezeichnet. Es ist hier hervorzuheben, dass  $H^k(\Omega)$  ein Hilbertraum ist.

Trivialerweise ist  $C_0^\infty(\Omega) \subseteq H^k(\Omega)$  erfüllt, jedoch ist  $C_0^\infty(\Omega)$  im Allgemeinen nicht dicht in  $H^k(\Omega)$ . Folgendes ist jedoch gültig:

**Proposition 1.2.12.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, so ist der Raum  $C^\infty(\overline{\Omega}) := \{\varphi|_\Omega : \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$  dicht in  $H^k(\Omega)$ , das heißt es gilt:

$$H^k(\Omega) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{H^k(\Omega)},$$

(vgl. Theorem 1.2., Seite 5 in [GR86]).

Dies motiviert, den Abschluss der Testfunktionen bzgl.  $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$  zu betrachten.

**Definition 1.2.13** (Sobolevräume  $H_0^k(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Der Sobolev-Raum  $H_0^k(\Omega)$  sei gegeben durch

$$H_0^k(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^k(\Omega)}.$$

Eine in der Praxis sehr nützliche Methode um festzustellen, ob ein Element  $v$  im Raum  $H_0^k(\Omega)$  liegt, liefert folgende Proposition:

**Proposition 1.2.14.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $v \in H^k(\Omega)$  und  $\tilde{v}$  eine Fortsetzung von  $v$  auf  $\mathbb{R}^n$ , welche  $\tilde{v}|_{\Omega^c} = 0$  erfüllt. Gilt  $\tilde{v} \in H^k(\mathbb{R}^n)$ , so folgt  $v \in H_0^k(\Omega)$ , (vgl. Theorem 1.2., Seite 5 in [GR86]).

### 1.2.3 Die Räume $H^k(\Omega)$ , $k \in \mathbb{R}$

**Definition 1.2.15** (Sobolevräume  $H^k(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$ ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $k \in \mathbb{R}^+$ , mit  $k = m + \sigma$ , wobei  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $\sigma \in (0, 1)$  gelten soll. Der Raum  $H^k(\Omega)$  sei gegeben durch:

$$H^k(\Omega) := \left\{ v \in H^m(\Omega) : \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha v(\mathbf{x}) - D^\alpha v(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2\sigma}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} < \infty, |\alpha| = m \right\}.$$

Ein Skalarprodukt auf  $H^k(\Omega)$  ist durch

$$(v, u)_{H^k(\Omega)} := (v, u)_{H^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha v(\mathbf{x}) - D^\alpha v(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2\sigma}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

definiert, und die induzierte Norm wird mit  $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$  bezeichnet. Es sei hier angemerkt, dass die Räume  $H^k(\Omega)$  auch für ein nicht ganzzahliges  $k$ , Hilberträume bezüglich obigen Skalarprodukts sind.

In analoger Weise ergibt sich für den nicht ganzzahligen Fall folgende Definition:

**Definition 1.2.16** (Sobolevräume  $H_0^k(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{R}^+$ ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $k \in \mathbb{R}^+$ . Der Sobolev-Raum  $H_0^k(\Omega)$  sei gegeben durch

$$H_0^k(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{H^k(\Omega)}.$$

*Anmerkung 1.2.17* Proposition 1.2.12 bleibt ohne weitere Einschränkungen auch für  $k > 0$  gültig. Um die Gültigkeit von Proposition 1.2.14 zu gewährleisten muss jedoch gefordert werden, dass  $\Omega$  beschränkt ist (vgl. Seite 6 in [GR86]).  $\square$

**Definition 1.2.18.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $k \in \mathbb{R}^+$ .  $H^{-k}(\Omega)$  sei definiert als der topologische Dualraum von  $H_0^k(\Omega)$ , das heißt:

$$H^{-k}(\Omega) := (H_0^k(\Omega))'.$$

## 1.2.4 Sobolev-Räume auf $\partial\Omega$

Im Hinblick auf Randauswertungen jeglicher Art ist es oftmals nötig, Sobolevräume auf  $\partial\Omega$  zu betrachten. Zur Definition von solchen Räumen kann man, sofern vorhanden, einen Atlas von  $\partial\Omega$  verwenden.

**Definition 1.2.19** (*Sobolevräume  $H^s(\partial\Omega)$* ) Sei  $k \in \mathbb{N}_0, s \leq k + 1$  und  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $C^{k,1}$ -Gebiet. Unter Verwendung der Notation von Definition 1.1.1 und Anmerkung 1.1.3 ist eine Distribution  $v$ , welche auf  $\partial\Omega$  definiert ist, genau dann ein Element des Raumes  $H^s(\partial\Omega)$ , wenn

$$v \circ \Phi_{\mathbf{x}} \in H^s(\mathcal{O}'_{\mathbf{x}} \cap \Phi_{\mathbf{x}}^{-1}(\partial\Omega \cap \mathcal{O}_{\mathbf{x}})),$$

für alle  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  und alle Wahlmöglichkeiten von  $\Phi_{\mathbf{x}}$  und  $\mathcal{O}_{\mathbf{x}}$ , welche Definition 1.1.1 erfüllen, gilt.

*Anmerkung 1.2.20* Eine mögliche Wahl für ein Skalarprodukt, mit dem  $H^s(\partial\Omega)$  zu einem Hilbertraum wird, kann mit Hilfe jenes endlichen Atlas  $(\mathcal{O}_j, \Phi_j)_{j=1, \dots, N}$  aus Anmerkung 1.1.3 konstruiert werden. Für  $v, u \in H^s(\partial\Omega)$  sei  $(v, u)_{H^s(\partial\Omega)}$  definiert durch:

$$(v, u)_{H^s(\partial\Omega)} := \sum_{j=1}^N (v \circ \Phi_j, u \circ \Phi_j)_{H^s(\mathcal{O}'_j \cap \Phi_j^{-1}(\partial\Omega \cap \mathcal{O}_j))}. \quad (1.2)$$

◻

Als wichtige Anwendung ergibt sich nun folgendes Spurtheorem:

**Proposition 1.2.21** (*Spuroperator*) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $C^{k-1,1}$ -Gebiet. Der lineare Operator

$$\tilde{\gamma} : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{D}(\partial\Omega) : v \mapsto v|_{\partial\Omega}$$

besitzt für  $\frac{1}{2} < s \leq k$  eine eindeutige stetige und lineare Fortsetzung  $\gamma : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ . Darüber hinaus besitzt  $\gamma$  eine beschränkte Rechtsinverse (vgl. Satz 5.5, Seite 95 und Satz 5.7, Seite 99 in [Neč12]).

*Anmerkung 1.2.22* Proposition 1.2.21 kann auf Normalableitungen verallgemeinert werden. Als wesentliches Resultat sei hier der Operator

$$C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{D}(\partial\Omega) : v \mapsto \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}$$

erwähnt, welcher eine stetige Fortsetzung  $H^1(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$  besitzt. Für den allgemeinen Fall (Normalableitungen höheren Grades) sei auf Satz 5.5, Seite 95 in [Neč12] verwiesen.  $\square$

Zur Vereinfachung der Notation sei hier vereinbart, dass für  $\mathbf{v} \in H^s(\Omega)^m, m \in \mathbb{N}, \gamma\mathbf{v}$  als

$$\gamma\mathbf{v} := (\gamma v_1, \dots, \gamma v_m)$$

aufzufassen ist.

*Anmerkung 1.2.23* Für die Praxis ist die durch (1.2) induzierte Norm oftmals ungeeignet. Mit Hilfe des Spuroperators  $\gamma$  aus Proposition 1.2.21 ist es jedoch möglich, eine äquivalente Norm auf  $H^{k-1/2}(\partial\Omega)$  durch

$$\|\mu\|_{H^{k-1/2}(\partial\Omega)} := \inf_{\substack{v \in H^k(\Omega) \\ \gamma v = \mu}} \|v\|_{H^k(\Omega)}$$

zu definieren, wobei  $\Omega$  ein  $C^{k-1,1}$ -Gebiet ist.  $\square$

### 1.3 Spezielle Differentialoperatoren

Im Folgenden sollen hier die wichtigsten Differentialoperatoren im distributionellen Sinne vorgestellt werden.

**Definition 1.3.24** (*Gradient*) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und sei  $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Der *Gradient* ist definiert durch:

$$\text{grad} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)^n : v \mapsto \left( \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)^T.$$

**Definition 1.3.25** (*Laplace-Operator*) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und sei  $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Der *Laplace-Operator* ist definiert durch:

$$\Delta : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) : v \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}.$$

**Definition 1.3.26** (*Divergenz*) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und sei  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}'(\Omega)^n$ . Der *Divergenzoperator* ist definiert durch:

$$\text{div} : \mathcal{D}'(\Omega)^n \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) : \mathbf{v} \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

**Definition 1.3.27** (*Rotation*) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \{2, 3\}$  eine offene Menge und sei  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}'(\Omega)^n, n \in \{2, 3\}$ . Der *Rotationsoperator* ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{curl} : \mathcal{D}'(\Omega)^3 &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)^3 : \mathbf{v} \mapsto \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) && \text{für } n = 3, \\ \mathbf{curl} : \mathcal{D}'(\Omega)^2 &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) : \mathbf{v} \mapsto \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} && \text{für } n = 2. \end{aligned}$$

*Anmerkung 1.3.28* Divergenz und Rotation werden alternativ auch als *Quelldichte* bzw. *Wirbelldichte* eines Vektorfeldes bezeichnet. Nähere Informationen zur physikalischen Interpretation finden sich für den Fall differenzierbarer Vektorfelder in [Fli08], Seite 4-8.  $\square$

Sei  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}'(\Omega)^n, \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^n$  und bezeichne  $\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle v_i, \varphi_i \rangle$  die kanonische Paarung von  $\mathcal{D}'(\Omega)^n$  und  $\mathcal{D}(\Omega)^n$ , so ist es möglich die *formal adjungierten* Operatoren von obigen Differenzialoperatoren zu bilden. Durch Einsetzen der Definition der distributionellen Ableitung ist unmittelbar ersichtlich:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{grad} v, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \langle v, -\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle, \\ \langle \Delta v, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \langle v, \Delta \boldsymbol{\varphi} \rangle, \\ \langle \operatorname{div} \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \langle \mathbf{v}, -\mathbf{grad} \boldsymbol{\varphi} \rangle, \\ \langle \mathbf{curl} \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{curl} \boldsymbol{\varphi} \rangle, \\ \langle \mathbf{curl} \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_2}, -\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_1} \right)^T \rangle. \end{aligned}$$

Als Motivation für nachfolgende Definition kann der formal adjungierte Operator von  $\mathbf{curl}$  betrachtet werden:

**Definition 1.3.29.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Menge und sei  $v \in \mathcal{D}(\Omega)'$ . Dann sei  $\mathbf{curl} v$  definiert durch:

$$\mathbf{curl} v := \left( \frac{\partial v}{\partial x_2}, -\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^T.$$

## 1.4 Greensche Formel

Als weiteres wichtiges Hilfsmittel wird hier die Greensche Formel vorgestellt, welche eine Verallgemeinerung des Integralsatzes von Gauß auf schwache Ableitungen darstellt.

**Satz 1.4.30** (*Greensche Formel*) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-Gebiet und  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$  der Spuroperator auf  $\partial\Omega$ . Darüber hinaus seien  $v, w \in H^1(\Omega)$ . Dann

gilt:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} w \, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} \gamma v \, \gamma w \, n_i \, ds - \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial x_i} \, d\lambda^n,$$

(vgl. Theorem 1.1, Seite 117 in [Neč12]).

Zur Erhaltung der Übersichtlichkeit sei hier vereinbart, dass der Operator  $\gamma$  in Randintegralen und kanonischen Paarungen weggelassen wird. Aus dem Zusammenhang sollte ersichtlich sein, dass die jeweiligen Ausdrücke als Spur aufzufassen sind.

## 1.5 Regularisierung mittels Konvolution

Im folgenden Abschnitt soll ein wichtiges Hilfsmittel zur Regularisierung von Funktionen vorgestellt werden. Die hier präsentierten Informationen finden sich mitsamt Beweisen auf Seite 52f und 54f in [Neč12] und auf Seite 47 in [Blu13].

**Definition 1.5.31** (*Mollifier*) Eine Familie von Funktionen  $(\eta_\epsilon)_{\epsilon>0}$  heißt Mollifier, wenn eine Funktion  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  existiert, die folgende Eigenschaften besitzt:

- i)  $\eta_\epsilon(x) = \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \cdot \epsilon^{-n}$ ,
- ii)  $\text{supp } \eta \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq 1\}$ ,
- iii)  $\eta \geq 0$ ,
- iv)  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, d\lambda^n = 1$ .

Es ist möglich, Mollifier explizit anzugeben (siehe z.B. Seite 52 in [Neč12]). Somit ist auch die Existenz von Mollifiern gewährleistet. Für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  erhält man eine Regularisierung von  $v \in L^2(\Omega)$  durch Konvolution mit dem Mollifier. Es bezeichne  $\tilde{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  jene Fortsetzung von  $v$  auf  $\mathbb{R}^n$ , welche  $\tilde{v} = 0$  auf  $\Omega^c$  erfüllt. Die gewünschte Regularisierung von  $v$  ist durch

$$\eta_\epsilon * v(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tilde{v}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

gegeben. In folgender Proposition sind die wichtigsten Eigenschaften zusammengefasst:

**Proposition 1.5.32.** Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $v \in L^2(\Omega)$ ,  $(\eta_\epsilon)_{\epsilon>0}$  ein Mollifier und

$$\Omega_\epsilon := \{\mathbf{x} \in \Omega : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) < \epsilon\},$$

wobei für jedes feste  $\mathbf{x} \in \Omega$

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) := \inf\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{y} \in \partial\Omega\}$$

gelten soll. Dann folgt:

- i) Es gilt  $\eta_\epsilon * v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ .

ii) Im Grenzwert gilt:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta_\epsilon * v = v \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

iii) Ist  $v$  konstant in  $\Omega$ , so ist  $\eta_\epsilon * v$  konstant in  $\Omega_\epsilon$ .

iv) Gilt zusätzlich  $D^\alpha v \in L^2(\Omega)$  für einen Multiindex  $\alpha$ , so folgt:

$$D^\alpha(\eta_\epsilon * v) = \eta_\epsilon * (D^\alpha v) \quad \text{und} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} D^\alpha(\eta_\epsilon * v) = (D^\alpha v) \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

*Anmerkung 1.5.33* Für  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n$  sei  $\eta_\epsilon * \mathbf{v} := (\eta_\epsilon * v_1, \dots, \eta_\epsilon * v_n)^T$ . Obige Proposition bleibt für  $\mathbf{v}$  gültig. In diesem Fall kann  $D^\alpha$  durch  $\text{div}$ , **curl** oder  $\text{curl}$  ersetzt werden, sofern die entsprechenden Dimensionen beachtet werden.  $\square$



# Kapitel 2

## Motivation - Helmholtz-Hodge-Zerlegung für Hölder-stetige Vektorfelder

Als Motivation für die Helmholtz-Hodge-Zerlegung dient die Navier-Stokes-Gleichung, welche im folgenden Abschnitt vorgestellt wird. Eine Einführung zum Themengebiet der Strömungsmechanik findet sich auf Seite 1-39 in [CM93] oder auf Seite 33-48 in [Arn15]. Die hier vorgestellten Resultate sind aus diesen Quellen entnommen.

### 2.1 Die Navier-Stokes-Gleichung

Ziel ist es, in einer physikalisch sinnvollen Art und Weise das Verhalten von Flüssigkeiten und Gasen wiederzugeben. Zur Beschreibung des Fluids werden Euler-Koordinaten verwendet. Das Geschwindigkeitsvektorfeld  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  gibt die Geschwindigkeit jenes Partikels im Fluid an, welches sich zum Zeitpunkt  $t$  an der Position  $\mathbf{x}$  befindet. Oftmals wird in diesem Zusammenhang der Begriff der *substantiellen Ableitung* bzw. *Materialableitung*

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} := \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} + \left( \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v_1}{\partial x_i}, \dots, \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right)^T$$

verwendet. Diese berücksichtigt die zeitliche Änderung der Position der Partikel im Fluid und entspricht im Wesentlichen der Kettenregel, angewandt auf  $\frac{d}{dt} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t))$  (vgl. Seite 4f in [CM93]).

Um ein Fluid physikalisch sinnvoll beschreiben zu können, sind die drei folgenden Prinzipien von entscheidender Bedeutung:

- i) Massenerhaltung,
- ii) Impulserhaltung,

iii) Energieerhaltung.

Die Navier-Stokes-Gleichung beschreibt hierbei die Erhaltung des Impulses. Insbesondere werden Scherkräfte innerhalb des Fluides berücksichtigt. Anzumerken ist, dass die Scherkräfte (näherungsweise) durch einen Spannungstensor beschrieben werden können, welcher hier nur linear von der Matrix  $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,2,3}$  abhängen soll. Fluide, die dieser Einschränkung genügen, werden als *newtonsche Fluide* bezeichnet. Beispiele newtonscher Fluide sind unter anderem Wasser oder diverse Öle.

Die Navier-Stokes-Gleichung für ein kompressibles Fluid lautet:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{grad} p - (\lambda + \mu)\mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu\Delta\mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

wobei sich die Operatoren  $\mathbf{grad}$  und  $\Delta : \mathbf{v} \mapsto (\Delta v_1, \dots, \Delta v_3)^T$  nur auf die Ortskoordinate beziehen. Die physikalische Benennung der einzelnen Elemente der Gleichung ist in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

$t \in [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}_0^+$	...	Zeitkoordinate
$\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$	...	Ortskoordinaten
$\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$	...	Geschwindigkeitsvektorfeld
$\rho(t, \mathbf{x})$	...	Dichte des Fluids
$\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$	...	externe Kräfte
$p(t, \mathbf{x})$	...	Druck
$\mu$	...	erster Viskositätskoeffizient
$\lambda$	...	Volumensviskosität

Tabelle 2.1: Komponenten und Variablen der Navier-Stokes-Gleichung

Es werden speziell inkompressible homogenen Fluide betrachtet. Diese charakterisieren sich dadurch, dass keine Quellen oder Senken im Fluid auftreten und die Dichte  $\rho$  konstant ist. Daher soll

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{und} \quad \rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0 = \textit{konst.}$$

gelten. Somit ergibt sich die Navier-Stokes-Gleichung für ein inkompressibles homogenes Fluid zu:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{grad} p - \mu\Delta\mathbf{v} &= \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Es ist hier anzumerken, dass die Prinzipien der Energie- und Massenerhaltung durch die zusätzlichen Annahmen auch erfüllt werden. Heuristisch gesehen erscheint dies auch plausibel, da durch (2.2) vier Gleichungen für die vier Variablen  $v_1, v_2, v_3$  und  $p$  gegeben sind.

Als mögliche Randbedingung wird hier und im Folgenden die Haftbedingung

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

betrachtet.

Aus mathematischer Sicht ist es sinnvoll, Größen zu betrachten, welche dimensionslos sind. Im Fall der Navier-Stokes-Gleichung ist dies durch Umskalierung möglich. Sei  $L$  eine typische Längeneinheit,  $V$  eine typische Geschwindigkeit, und  $T := L/V$  eine typische Zeiteinheit. Für die skalierten Größen

$$\tilde{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \tilde{\mathbf{v}} := \frac{\mathbf{v}}{V} \quad \text{und} \quad \tilde{t} := \frac{t}{T}$$

ergeben sich aus (2.2) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{\mathbf{v}}}{D\tilde{t}} + \mathbf{grad} \tilde{p} - \frac{\mu}{\rho_0 LV} \Delta \tilde{\mathbf{v}} &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} &= 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{p} := \frac{1}{\rho_0 V^2} p \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{f}} := \frac{L}{V^2} \mathbf{f}$$

gilt. Die dimensionslose Größe

$$Re := \frac{\rho_0 LV}{\mu}$$

wird auch *Reynolds-Zahl* genannt. In dimensionslosen Variablen erhält man durch Weglassen der Tilde:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{grad} p - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} &= \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

## 2.2 Helmholtz-Hodge-Zerlegung für Hölder-stetige Vektorfelder

In diesem Abschnitt soll die Helmholtz-Hodge-Zerlegung für Hölder-stetige Vektorfelder vorgestellt werden. Die Zerlegung induziert einen Projektionsoperator  $\mathbb{P}$ . Ziel ist es, diesen auf die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung für homogene Fluide anzuwenden, um so eine vom Druck  $p$  unabhängige Evolutionsgleichung zu erhalten.

**Satz 2.2.1** (*Helmholtz-Hodge-Zerlegung für Hölder-stetige Vektorfelder*) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  ein  $C^{2,\alpha}$ -Gebiet ( $0 < \alpha < 1$ ) und  $\mathbf{v} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmtes  $\mathbf{u} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  und ein (bis auf eine additive Konstante) eindeutig bestimmtes  $p \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  mit den Eigenschaften:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{grad} p \quad \text{auf } \overline{\Omega}, \tag{2.4}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{2.5}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2.6}$$

**Beweis:** Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt:

i) Sei angenommen, dass  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{grad} p$  gilt. Unter Berücksichtigung von (2.5) und (2.6) gilt:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{grad} p = \Delta p \quad \text{und} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}.$$

Zusammenfassend lässt sich folgern, dass  $p$  folgendes Neumann-Problem löst:

Gesucht ist eine Funktion  $p \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  mit:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \operatorname{div} \mathbf{v} \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Umgekehrt kann man  $p$  als Lösung von (2.7) wählen, sofern obiges Problem tatsächlich lösbar ist. Aus der gegebenen Regularität von  $\Omega$  und  $\mathbf{v}$  folgt  $\operatorname{div} \mathbf{v} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  und  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ , wodurch das gegebene Neumann-Problem tatsächlich eine Lösung  $p \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  besitzt<sup>1</sup>. Es kann  $\mathbf{u} := \mathbf{v} - \mathbf{grad} p$  gesetzt werden, wobei (2.5) und (2.6) durch die Wahl von  $p$  impliziert werden.

ii) Es ist die Eindeutigkeit von der gefundenen Zerlegung zu zeigen. Hierfür ist eine allgemeine Grundüberlegung anzustellen. Sei  $\mathbf{u} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ , mit den Eigenschaften (2.5) und (2.6), und  $p \in C^2(\overline{\Omega})$  gegeben. Es gilt  $\operatorname{div} (p\mathbf{u}) = \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{u} + p \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{u}$ . Somit folgt mittels partieller Integration:

$$(\mathbf{grad} p, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{grad} p \cdot \mathbf{u} \, d\lambda^n = \int_{\Omega} \operatorname{div} (p\mathbf{u}) \, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} p\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0.$$

Es sind  $\mathbf{grad} p$  und  $\mathbf{u}$  im  $L^2$ -Sinn orthogonal.

iii) Seien  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{grad} p_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{grad} p_2$  zwei gewünschte Zerlegungen. Es lässt sich schließen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{grad} (p_1 - p_2) &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) &= 0, \\ (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n} &= 0. \end{aligned}$$

Aus der  $L^2$ -Orthogonalität von  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  und  $\mathbf{grad} p_1 - p_2$  folgt:

$$0 = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{grad} (p_1 - p_2), \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2.$$

Zusammenfassend ergibt sich  $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{grad} p_1 - p_2 = \mathbf{0}$  womit die Eindeutigkeit bewiesen ist. Da  $\Omega$  zusammenhängend ist folgt, dass  $p_1 - p_2$  eine konstante Funktion ist.

---

<sup>1</sup>Vgl. Satz, Seite 2 in [Nar13]. Das Problem  $\Delta p = f, \partial p / \partial \mathbf{n} = g$  besitzt für  $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  und  $g \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  genau dann eine (bis auf eine Konstante) eindeutige Lösung, wenn  $\int_{\Omega} f \, d\lambda^n = \int_{\partial\Omega} g \, ds$  erfüllt ist. Aufgrund der Wahl von  $f$  und  $g$  ist dies hier durch den Integralsatz von Gauß gewährleistet. Anzumerken ist, dass  $g \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  als Fortsetzung von  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  auf  $\Omega$  gewählt werden muss.

□

**Definition 2.2.2** (*Projektionsoperator*) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 2$  ein  $C^{2,\alpha}$ -Gebiet ( $0 < \alpha < 1$ ) und  $\mathbf{v} \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Dann sei der Projektionsoperator  $\mathbb{P}$  durch

$$\mathbb{P} : C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) : \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{grad} p \mapsto \mathbf{u}$$

definiert.

*Anmerkung 2.2.3* Die Eindeutigkeit von  $\mathbf{u}$  in Satz 2.2.1 impliziert die Wohldefiniertheit des Projektionsoperators  $\mathbb{P}$ . ◻

**Korollar 2.2.4.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \geq 2$  ein  $C^{2,\alpha}$ -Gebiet ( $0 < \alpha < 1$ ) und  $\mathbb{P}$  der Projektionsoperator aus Definition 2.2.2, dann besitzt dieser folgende Eigenschaften:

- i)  $\mathbb{P}$  ist linear.
- ii) Für alle  $\mathbf{u} \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  mit  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  und  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0$  gilt:

$$\mathbb{P}\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

- iii) Für  $p \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  gilt:

$$\mathbb{P}(\mathbf{grad} p) = 0.$$

**Beweis:** Die gewünschten Resultate sind eine unmittelbare Konsequenz aus der Linearität von  $\text{div}$ ,  $\mathbf{grad}$  und  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n}$  und der Eindeutigkeit der Helmholtz-Hodge-Zerlegung. ◻

Angenommen alle Voraussetzungen von Satz (2.2.1) seien erfüllt. Durch Anwendung von  $\mathbb{P}$  auf (2.3) erhält man unter Verwendung von Korollar 2.2.4:

$$\mathbb{P}\left(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} + \mathbf{grad} p - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v}\right) = \mathbb{P}(\mathbf{f})$$

Aus  $\text{div } \partial_t \mathbf{v} = \partial_t \text{div } \mathbf{v} = 0$  und  $(\partial_t \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = \partial_t (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0$  lässt sich  $\mathbb{P}(\partial_t \mathbf{v}) = \partial_t \mathbf{v}$  schließen. Aus der Linearität des Operators  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{P}(\mathbf{grad} p) = 0$  folgt:

$$\partial_t \mathbf{v} = \mathbb{P}\left(-(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}\right). \quad (2.8)$$

Obige Gleichung stellt nun die gesuchte Evolutionsgleichung dar. Es sei hier hervorgehoben, dass diese vom Druck unabhängig ist. Die Evolutionsgleichung ist darüber hinaus auch für numerische Algorithmen von Interesse. Mehr Informationen hierfür finden sich z.B. in [Cho69].

## 2.2.1 Vorgehensweise für $L^2$ -Vektorfelder

Im Beweis von Satz 2.2.1 wurde die Orthogonalität von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{grad} p$  verwendet. Dies legt die Vermutung nahe, dass die Helmholtz-Hodge-Zerlegung für Hölder-stetige Vektorfelder auf einem allgemeineren Konzept basiert. Es wird sich herausstellen, dass sich unter geeigneten Voraussetzungen an  $\Omega$  sogar jedes  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n$  in der Form

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{grad} p$$

schreiben lässt, wobei  $\mathbf{u} \in H \subseteq L^2(\Omega)^n$  und  $\mathbf{grad} p \in H^\perp, p \in \tilde{H}$ , für eine geeignete Wahl von Hilberträumen  $H$  und  $\tilde{H}$  gelten soll. Diese müssen genügend Regularität bieten, sodass  $\operatorname{div} \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  und  $\mathbf{grad} p$ , in einem geeigneten Sinn definiert sind und trotzdem noch  $L^2(\Omega)^n = H \oplus H^\perp$  gilt. Es wird sich später herausstellen dass  $H = H_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$  (siehe Definition 4.0.1) und  $\tilde{H} = H^1(\Omega)$  gilt.

Im Gegensatz zum Beweis von Satz 2.2.1 wird hier jedoch nicht die Strategie verfolgt,  $\mathbf{u}$  oder  $p$  durch Lösen einer partiellen Differentialgleichung zu konstruieren, sondern es wird das orthogonale Komplement von  $\mathbf{grad} H^1(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)^n$  direkt bestimmt (vgl. Proposition 4.1.2).

Im Kapitel 5 werden der zwei- und dreidimensionale Fall betrachtet und der Raum  $H_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$  in Verbindung mit dem Rotationsoperator gebracht. Betrachtet man den regulären Fall als Motivation so gilt  $\operatorname{div} \mathbf{curl} \phi = 0$  für ein hinreichend glattes  $\phi$ . Es sei hier vorweggenommen, dass sich Funktionen aus dem Raum  $H_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$  tatsächlich als  $\mathbf{curl} \phi$  darstellen lassen, wobei  $\phi$  aus einem geeigneten Hilbertraum stammt (dieser ist durch  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  gegeben, siehe Definition 3.1.1). Diese Tatsache wird sich aus dem allgemeineren Problem der Konstruktion von Vektorpotentialen und Stromfunktionen ableiten.

Als erster Schritt werden im nächsten Kapitel die benötigten Hilberträume definiert. Wesentlich wird sein, dass man auf diesen Hilberträumen Randwerte in einem geeigneten Sinn erklären muss. Dies bedeutet, dass Spurooperatoren konstruiert werden müssen.

# Kapitel 3

## Die Räume

$$H(\operatorname{div}, \Omega), H(\mathbf{curl}, \Omega), H(\operatorname{curl}, \Omega)$$

In diesem Abschnitt werden nun die benötigten Hilberträume und die dazugehörigen Spurooperatoren eingeführt. Die folgenden Definitionen und Resultate sind aus [DL90], Seite 203-209 entnommen.

### 3.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

**Definition 3.1.1.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge.

$$\begin{aligned} H(\operatorname{div}, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}. \\ H(\mathbf{curl}, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \mathbf{curl} \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3\} && \text{für } n = 3. \\ H(\operatorname{curl}, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 : \operatorname{curl} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\} && \text{für } n = 2. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Notation sei hier vereinbart, dass unter  $(\cdot, \cdot)$  immer das Skalarprodukt auf  $L^2(\Omega)^n$  bzw.  $L^2(\Omega)$  zu verstehen ist. Die induzierte Norm wird in beiden Fällen mit  $\|\cdot\|$  bezeichnet. Auf den oben definierten Räumen lassen sich durch

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{H(\operatorname{div}, \Omega)} &:= (\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, \operatorname{div} \mathbf{w}), \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{H(\mathbf{curl}, \Omega)} &:= (\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{w}) \text{ und} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{H(\operatorname{curl}, \Omega)} &:= (\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\operatorname{curl} \mathbf{v}, \operatorname{curl} \mathbf{w}) \end{aligned}$$

Skalarprodukte definieren. Die Bilinearität ist eine direkte Konsequenz aus der Linearität

aller beteiligten Operatoren und der von  $(\cdot, \cdot)$ . Da für  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \mathbf{v}) &> 0, \\ (\operatorname{div} \mathbf{v}, \operatorname{div} \mathbf{v}) &\geq 0, \\ (\mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{v}) &\geq 0 && \text{für } n = 3, \\ (\operatorname{curl} \mathbf{v}, \operatorname{curl} \mathbf{v}) &\geq 0 && \text{für } n = 2, \end{aligned}$$

gilt, sind obige Bilinearformen positiv definit und stellen somit tatsächlich Skalarprodukte dar. Die induzierten Normen werden mit  $\|\cdot\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}$ ,  $\|\cdot\|_{H(\mathbf{curl}, \Omega)}$  und  $\|\cdot\|_{H(\operatorname{curl}, \Omega)}$  bezeichnet.

**Satz 3.1.2.** Die Räume  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ ,  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  und  $H(\operatorname{curl}, \Omega)$  sind Hilberträume.

**Beweis:** Sei  $(\mathbf{v}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ . Da für ein Element  $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  die Ungleichungen  $\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}$  und  $\|\operatorname{div} \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}$  gelten, sind  $(\mathbf{v}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  und  $(\operatorname{div} \mathbf{v}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folgen in  $L^2(\Omega)$ . Da diese Räume vollständig sind gilt:

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n : \mathbf{v}_m &\rightarrow \mathbf{v}, \\ \exists w \in L^2(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v}_m &\rightarrow w. \end{aligned}$$

Dies impliziert auch die Konvergenz gegen  $\mathbf{v}$  bzw.  $w$  im distributionellen Sinn. Nun ist nur noch zu zeigen, dass  $\operatorname{div} \mathbf{v} = w$  im distributionellen Sinn gilt, wodurch insbesondere  $\operatorname{div} \mathbf{u} \in L^2(\Omega)$  folgt. Dies ist mit Hilfe des formal adjungierten Operators möglich. Für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  folgt:

$$\langle w, \varphi \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \operatorname{div} \mathbf{v}_m, \varphi \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mathbf{v}_m, -\mathbf{grad} \varphi \rangle = \langle \mathbf{v}, -\mathbf{grad} \varphi \rangle = \langle \operatorname{div} \mathbf{v}, \varphi \rangle,$$

wodurch die Gleichheit impliziert wird. In analoger Weise kann man die Vollständigkeit von  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  und  $H(\operatorname{curl}, \Omega)$  auf jene von  $L^2(\Omega)^n$ ,  $n \in \{2, 3\}$  zurückführen und hierbei auf den formal adjungierten Operator zurückgreifen.  $\square$

## 3.2 Spurtheoreme und Greensche Formeln

Zielsetzung ist es, Spuroperatoren für die Räume  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ ,  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  und  $H(\operatorname{curl}, \Omega)$  zu definieren.

**Definition 3.2.3.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge.

$$\begin{aligned} H_0(\operatorname{div}, \Omega) &:= \overline{\mathcal{D}(\Omega)^n}^{H(\operatorname{div}, \Omega)}, \\ H_0(\mathbf{curl}, \Omega) &:= \overline{\mathcal{D}(\Omega)^3}^{H(\mathbf{curl}, \Omega)} && \text{für } n = 3, \\ H_0(\operatorname{curl}, \Omega) &:= \overline{\mathcal{D}(\Omega)^2}^{H(\operatorname{curl}, \Omega)} && \text{für } n = 2. \end{aligned}$$

**Satz 3.2.4** (*Spurtheorem für  $H(\operatorname{div}, \Omega)$* ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-Gebiet. Dann gilt:



- i) Der Raum  $C^\infty(\overline{\Omega})^n$  ist dicht in  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ .
- ii) Der Operator  $\tilde{\gamma}_n : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n}$ , welcher für  $\mathbf{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})^n$  definiert ist, besitzt eine stetige lineare Fortsetzung  $\gamma_n : H(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ .
- iii) Es gilt  $\ker \gamma_n = H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ .

Es wird  $\gamma_n \mathbf{v}$  als *Normalkomponente* von  $\mathbf{v}$  auf  $\partial\Omega$  bezeichnet.

**Beweis:**

i) Zu zeigen ist, dass das orthogonale Komplement von  $C^\infty(\overline{\Omega})^n \subseteq H(\operatorname{div}, \Omega)$  nur aus dem Nullvektor besteht. Da  $\overline{C^\infty(\overline{\Omega})} = (C^\infty(\overline{\Omega})^\perp)^\perp$  gilt, würde  $(C^\infty(\overline{\Omega})^n)^\perp = \{\mathbf{0}\}$  die Dichtheit von  $C^\infty(\overline{\Omega})^n$  unmittelbar implizieren. Sei  $\mathbf{v} \in (C^\infty(\overline{\Omega})^n)^\perp$ , das heißt es gilt:

$$(\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi})_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C^\infty(\overline{\Omega})^n.$$

Sei  $v_0 := \operatorname{div} \mathbf{v}$ . Es seien  $\tilde{\mathbf{v}}$  und  $\tilde{v}_0$  die Fortsetzungen von  $\mathbf{v}$  und  $v_0$  auf  $\mathbb{R}^n$ , welche  $\tilde{\mathbf{v}}|_{\Omega^c} = \mathbf{0}$  und  $\tilde{v}_0|_{\Omega^c} = 0$  erfüllen. Da  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n$  und  $v_0 \in L^2(\Omega)$  reguläre Distributionen darstellen, gilt:

$$0 = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi})_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = \langle \tilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\varphi} \rangle + \langle \tilde{v}_0, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\varphi} \rangle + \langle -\mathbf{grad} \tilde{v}_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n.$$

Dies impliziert  $\mathbf{grad} \tilde{v}_0 = \tilde{\mathbf{v}}$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)^n$  und somit  $\tilde{v}_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ . Aus Proposition 1.2.14 ii) folgt insbesondere  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ . Aus der Dichtheit von  $\mathcal{D}(\Omega)$  in  $H_0^1(\Omega)$  folgt die Existenz einer Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  welche in der  $H_0^1$ -Norm gegen  $v_0$  konvergiert. Zusammenfassend ergibt sich für alle  $\mathbf{w} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ :

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( (\mathbf{grad} \varphi_k, \mathbf{w}) + \underbrace{(\varphi_k, \operatorname{div} \mathbf{w})}_{= -(\mathbf{grad} \varphi_k, \mathbf{w})} \right) = 0.$$

Hieraus folgt  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  und somit i).

ii) Aufgrund der Greenschen Formel (vgl. Satz 1.4.30) gilt:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{grad} w) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, w) = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) w \, ds \quad \forall \mathbf{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})^n, w \in H^1(\Omega), \quad (3.1)$$

und daher folgt die Abschätzung:

$$\left| \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) w \, ds \right| \leq \|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \|w\|_{H^1} \quad \forall \mathbf{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})^n, w \in H^1(\Omega).$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen ist der Spuroperator  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$  stetig und surjektiv (siehe Proposition 1.2.21). Hieraus folgt insbesondere, dass obiges Randintegral nur von der Spur  $\gamma w =: \mu$  abhängt. Da

$$\|\mu\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{w \in H^1(\Omega) \\ \gamma w = \mu}} \|w\|_{H^1(\Omega)}, \quad (3.2)$$

gilt, folgt die Abschätzung

$$\left| \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) w \, ds \right| \leq \|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \|\mu\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}. \quad (3.3)$$

Ungleichung (3.3) zeigt, dass  $\tilde{\gamma}_n$  ein stetiger Operator mit Werten aus  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  ist. Es gilt zu beachten, dass hier für jedes feste  $\mathbf{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})^n$  die Funktion  $\tilde{\gamma}_n \mathbf{v}$  mit dem linearen Funktional  $H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \mu \mapsto \int_{\partial\Omega} (\tilde{\gamma}_n \mathbf{v}) \mu \, ds$  identifiziert wird. Die Dichtheit von  $C^\infty(\overline{\Omega})^n$  in  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  ermöglicht nun die stetige Fortsetzung von  $\tilde{\gamma}_n$ , welche mit  $\gamma_n$  bezeichnet wird.

iii) Für  $\mathbf{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})^n$  und  $\mu \in H^{1/2}(\Omega)$  gilt nach Konstruktion von  $\tilde{\gamma}_n$  (als lineares Funktional aufgefasst):

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mu \, ds = \langle \gamma_n \mathbf{v}, \gamma \mu \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}.$$

Es ist hier anzumerken, dass in der oberen Gleichung der rechte Ausdruck auch für Funktionen  $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  definiert ist, während die linke Seite nur für eine glatte Funktionen  $\mathbf{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})^n$  erklärt ist. Somit kann hier die kanonische Paarung, zusammen mit dem Operator  $\gamma_n$ , als eine Verallgemeinerung des oberen Randintegrals verstanden werden. Diese Überlegung und die Dichtheit von  $C^\infty(\overline{\Omega})^n$  in  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  führen dazu, dass Gleichung (3.1) auf den ganzen Raum  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  fortgesetzt werden kann. Es folgt:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{grad} w) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, w) = \langle \gamma_n \mathbf{v}, \gamma w \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \quad \forall \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega), w \in H^1(\Omega). \quad (3.4)$$

Sei nun  $\mathbf{w} \in \ker \gamma_n \cap (\mathcal{D}(\Omega)^n)^\perp$ . Für  $w_0 := \operatorname{div} \mathbf{w}$  gilt:

$$\langle \mathbf{grad} w_0, \boldsymbol{\varphi} \rangle = -\langle w_0, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \rangle = -(\operatorname{div} \mathbf{w}, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}) = (\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi}) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^n,$$

wobei  $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\varphi})_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = 0$  zu beachten ist. Somit folgt  $\mathbf{w} = \mathbf{grad} w_0$  und es lässt sich  $w_0 \in H^1(\Omega)$  schließen. Für alle  $\mathbf{v} \in \ker \gamma_n$  folgt mit Gleichung (3.4):

$$(\mathbf{v}, \operatorname{div} \mathbf{w})_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = (\mathbf{v}, \underbrace{\mathbf{grad} w_0}_{=\mathbf{w}}) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, \underbrace{w_0}_{=\operatorname{div} \mathbf{w}}) = \underbrace{\langle \gamma_n \mathbf{v}, \gamma w_0 \rangle}_{=0} = 0.$$

Dies impliziert  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  und somit folgt iii).

□

Im Beweis von Satz 3.2.4 wurde folgendes Korollar nachgewiesen:

**Korollar 3.2.5** (*Greensche Formel für  $H(\operatorname{div}, \Omega)$* ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-Gebiet,  $v \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  und  $w \in H^1(\Omega)$ . Dann gilt:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{grad} w) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, w) = \langle \gamma_n \mathbf{v}, \gamma w \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}.$$

*Anmerkung 3.2.6* Für  $w = 1$  folgt eine Verallgemeinerung des Integralsatzes von Gauß auf  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ . Es gilt nämlich:

$$(\operatorname{div} \mathbf{v}, 1) = \langle \gamma_n \mathbf{v}, 1 \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}.$$

◻

*Anmerkung 3.2.7* Es lässt sich zeigen, dass  $\gamma_n$  surjektiv ist. Für  $\mu \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  kann durch Lösen des Neumann-Problems

Gesucht ist eine Funktion  $u \in H^1(\Omega)$  mit:

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= \mu & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.5}$$

ein Urbild konstruiert werden, wobei die Normalableitung mittels eines Spuoperators aufzufassen ist (vgl. Anmerkung 1.2.22). Durch Aufstellen einer passenden Variationsformulierung und dem Satz von Lax-Milgram (vgl. Abschnitt 4.3, Seite 47-55 und Lemma 4.18, Seite 49 in [Jü13]) kann die Existenz einer Lösung von Problem (3.5) gezeigt werden. Somit ist  $\mathbf{grad} u$  das gesuchte Urbild von  $\mu$  unter  $\gamma_n$ . ◻

Um das Spurtheorem für  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  (vgl. Satz 3.2.9) beweisen zu können, ist eine zusätzliche Charakterisierung des Raumes  $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$  vonnöten, welche folgendes Lemma liefert.

**Lemma 3.2.8.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Lipschitz-Gebiet. Gilt für  $\mathbf{v} \in H(\mathbf{curl}, \Omega)$  die Bedingung

$$(\mathbf{v}, \mathbf{curl} \varphi) - (\mathbf{curl} \mathbf{v}, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})^3, \tag{3.6}$$

so folgt  $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ .

**Beweis:** Erfülle  $\mathbf{v} \in H(\mathbf{curl}, \Omega)$  Bedingung (3.6). Ziel ist es eine Folge  $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq C^\infty(\bar{\Omega})^3$  zu konstruieren, welche in der  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ -Norm gegen  $\mathbf{v}$  konvergiert. Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt und basiert auf der Idee, die Geometrie von  $\Omega$  zu vereinfachen.

Sei  $\mathbf{v}_0 := \mathbf{curl} \mathbf{v}$  und bezeichne  $\tilde{\mathbf{v}}$  und  $\tilde{\mathbf{v}}_0$  Fortsetzungen von  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{v}_0$  mit  $\tilde{\mathbf{v}}|_{\Omega^c} = 0$  bzw.  $\tilde{\mathbf{v}}_0|_{\Omega^c} = 0$ . Gleichung (3.6) impliziert hierbei

$$\tilde{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{curl} \tilde{\mathbf{v}} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)^3$$

und somit  $\tilde{\mathbf{v}} \in H(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3)$  mit  $\operatorname{supp} \tilde{\mathbf{v}} \subseteq \bar{\Omega}$ .

i) Sei  $\Omega$  offen, beschränkt und strikt sternförmig bezüglich  $\mathbf{y}$ . OBdA. kann  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  gesetzt werden, da immer das um  $\mathbf{y}$  verschobene Gebiet  $\Omega - \mathbf{y} := \{\mathbf{x} - \mathbf{y} : \mathbf{x} \in \Omega\}$  betrachtet werden kann. Dieses ist ein bzgl.  $\mathbf{0}$  strikt sternförmiges Lipschitz-Gebiet. Aufgrund der Forderung der strikten Sternförmigkeit gilt:

$$\theta \bar{\Omega} := \{\theta \mathbf{x} + (1 - \theta) \mathbf{y} : \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\} \subseteq \Omega \quad \forall \theta \in [0, 1).$$

Es sei für  $\theta \in (0, 1)$  die Funktion  $\tilde{\mathbf{v}}_\theta$  durch

$$\tilde{\mathbf{v}}_\theta(\mathbf{x}) := \tilde{\mathbf{v}}\left(\frac{\mathbf{x}}{\theta}\right)$$

definiert. Diese Funktion erfüllt

$$\text{supp } \tilde{\mathbf{v}}_\theta \subseteq \Omega \quad \text{und} \quad \lim_{\theta \rightarrow 1^-} \tilde{\mathbf{v}}_\theta \rightarrow \tilde{\mathbf{v}} \quad \text{in } H(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3).$$

Durch Regularisierung kann nun die gewünschte Folge konstruiert werden. Es sei  $(\eta_\epsilon)_{\epsilon>0}$  ein Mollifier, so gilt für hinreichend kleines  $\epsilon$ :

$$\text{supp } (\eta_\epsilon * \tilde{\mathbf{v}}_\theta) \subseteq \Omega \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\eta_\epsilon * \tilde{\mathbf{v}}_\theta) \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}_\theta \quad \text{in } H(\mathbf{curl}, \Omega),$$

wodurch  $\eta_\epsilon * \tilde{\mathbf{v}}_\theta|_\Omega \in \mathcal{D}(\Omega)^3$  impliziert wird. Durch Übergang zu einem abzählbaren Teilnetz von  $(\eta_\epsilon * \tilde{\mathbf{v}}_\theta)_{\epsilon>0, \theta \in [0,1]}$  erhält man die gewünschte Folge mit  $\varphi_m := \eta_{\epsilon_m} * \tilde{\mathbf{v}}_{\theta_m}|_\Omega \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}|_\Omega = \mathbf{v}$  in  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  für  $m \rightarrow \infty$ .

ii) Sei  $\Omega$  offen und beschränkt, jedoch nicht mehr zwingend sternförmig. Sei  $(O_i)_{i=1, \dots, N}$  die durch Proposition 1.1.5 gegebene offene Überdeckung von  $\bar{\Omega}$  und  $\Omega_i := O_i \cap \Omega$  die zugehörigen strikt sternförmigen Lipschitz-Gebiete. Dieser Überdeckung kann eine Zerlegung der Eins untergeordnet werden (siehe Seite 61 in [Yos80]), dass heißt es existieren Funktionen  $\alpha_i \in \mathcal{D}(O_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  mit

$$0 \leq \alpha_i(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Es gilt  $\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde{\mathbf{v}}$ , mit  $\alpha_i \tilde{\mathbf{v}} \in H(\mathbf{curl}, \mathbb{R}^3)$  und  $\text{supp } \alpha_i \tilde{\mathbf{v}} \subseteq \bar{\Omega}_i$ . Nun kann i) auf jedes  $\Omega_i$  angewendet werden und man erhält die Folgen  $(\varphi_m^i)_{m \in \mathbb{N}}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

$$\left( \sum_{i=1}^N \varphi_m^i \right)_{m \in \mathbb{N}}$$

ist nun die gewünschte Folge.

□

**Satz 3.2.9** (*Spurtheorem für  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$* ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Lipschitz-Gebiet. Dann gilt:

- i) Der Raum  $C^\infty(\bar{\Omega})^3$  ist dicht in  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ .
- ii) Der Operator  $\tilde{\gamma}_t : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}|_{\partial\Omega} \times \mathbf{n}$ , welcher für  $\mathbf{v} \in C^\infty(\bar{\Omega})^3$  definiert ist, besitzt eine stetige lineare Fortsetzung  $\gamma_t : H(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$ .
- iii) Es gilt  $\ker \gamma_t = H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ .

Es wird  $\gamma_t \mathbf{v}$  als *Tangentialkomponente* von  $\mathbf{v}$  auf  $\partial\Omega$  bezeichnet.

**Beweis:** Der Beweis wird ähnlich wie jener von Satz 3.2.4 geführt.

i) Sei  $\mathbf{v} \in (C^\infty(\bar{\Omega})^3)^\perp$ . Dann gilt:

$$(\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi})_{H(\mathbf{curl}, \Omega)} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) + (\mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{curl} \boldsymbol{\varphi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C^\infty(\bar{\Omega})^3. \quad (3.7)$$

Sei  $\mathbf{v}_0 := \mathbf{curl} \mathbf{v}$ . Aus (3.7) und der formalen Selbstadjungiertheit von  $\mathbf{curl}$  folgt unmittelbar  $\mathbf{curl} \mathbf{v}_0 = -\mathbf{v} \in H(\mathbf{curl}, \Omega)$ . Somit lässt sich schließen, dass

$$0 = (\mathbf{curl} \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) - (\mathbf{curl} \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\varphi}) \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C^\infty(\bar{\Omega})^3$$

gilt. Mit Lemma 3.2.8 folgt  $\mathbf{v}_0 \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ . Aus der Dichtheit von  $\mathcal{D}(\Omega)^n$  in  $H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$  folgt die Existenz einer Folge  $(\boldsymbol{\varphi}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)^n$  welche in der  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ -Norm gegen  $\mathbf{v}_0$  konvergiert. Es ergibt sich für alle  $\mathbf{w} \in H(\mathbf{curl}, \Omega)$ :

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{H(\mathbf{curl}, \Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-\mathbf{curl} \boldsymbol{\varphi}_k, \mathbf{w}) + (\boldsymbol{\varphi}_k, \mathbf{curl} \mathbf{w}) = 0.$$

Hieraus folgt  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  und somit i).

ii) Aus der Greenschen Formel (siehe Satz 1.4.30) folgt:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{curl} \boldsymbol{\varphi}) - (\mathbf{curl} \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, ds \quad \forall \mathbf{v} \in C^\infty(\bar{\Omega})^3, \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega)^3. \quad (3.8)$$

Betrachtet man nun obiges Randintegral, so ergibt sich

$$\left| \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, ds \right| \leq \|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{curl}, \Omega)} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\Omega)^3} \quad \forall \mathbf{v} \in C^\infty(\bar{\Omega})^3, \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega)^3.$$

als Abschätzung. In analoger Weise zum Beweis vom Spurtheorem für  $H(\mathbf{div}, \Omega)$  lässt sich aus den Eigenschaften des Spuroperators  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$  (vgl. Proposition 1.2.21) folgern, dass obiges Randintegral nur von der Spur  $\gamma \boldsymbol{\varphi} =: \boldsymbol{\mu}$  abhängt. Aufgrund der Gestalt der Norm auf  $H^{1/2}(\Omega)$  (vgl. Gleichung (3.2)) folgt die Abschätzung:

$$\left| \int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\mu} \, ds \right| \leq \|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{curl}, \Omega)} \|\boldsymbol{\mu}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)^3} \quad \forall \mathbf{v} \in C^\infty(\bar{\Omega})^3, \boldsymbol{\mu} \in H^{1/2}(\partial\Omega)^3.$$

Dies beweist, dass  $\tilde{\gamma}_t$  ein stetiger Operator mit Werten aus  $H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$  ist. Die Dichtheit von  $C^\infty(\bar{\Omega})^3$  in  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  impliziert die Existenz einer stetigen Fortsetzung  $\gamma_t : H(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$ .

iii) Als unmittelbare Konsequenz von (3.8), der Dichtheit von  $C^\infty(\bar{\Omega})^3$  in  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  und der Stetigkeit von  $\gamma_t$  ergibt sich:

$$(\mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{w}) - (\mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{w}) = \langle \gamma_t \mathbf{v}, \gamma_t \mathbf{w} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)^3} \quad \forall \mathbf{v} \in H(\mathbf{curl}, \Omega), \forall \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3.$$

Für  $\mathbf{v} \in \ker \gamma_t$  impliziert dies:

$$(\mathbf{curl} \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}) - (\mathbf{curl} \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\varphi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in C^\infty(\bar{\Omega})^3.$$

Nach Lemma 3.2.8 gilt  $\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$  und somit folgt iii).

□

Im Beweis von Satz 3.2.9 wurde folgendes Korollar nachgewiesen:

**Korollar 3.2.10** (*Greensche Formel für  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$* ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-Gebiet,  $\mathbf{v} \in H(\mathbf{curl}, \Omega)$  und  $\mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3$ . Dann gilt:

$$(\mathbf{curl} \mathbf{v}, \mathbf{w}) - (\mathbf{v}, \mathbf{curl} \mathbf{w}) = \langle \gamma_t \mathbf{v}, \gamma \mathbf{w} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)^3}.$$

*Anmerkung 3.2.11* Die kanonische Paarung in der Greenschen Formel für  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  kann ähnlich interpretiert werden, wie jene in der Greenschen Formel für  $H(\mathbf{div}, \Omega)$  (vgl. Beweis von Satz 3.2.4). Hier ist  $\langle \gamma_t \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)^3}$  als eine Verallgemeinerung des Randintegrals

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\mu} \, ds$$

aufzufassen, wobei  $\boldsymbol{\mu} \in H^{1/2}(\partial\Omega)^3$  gelten soll.

◻

In zwei Dimensionen ist für das Spurtheorem für  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  nichts neues mehr zu zeigen, da die Räume  $H(\mathbf{div}, \Omega)$  und  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  isometrisch isomorph sind. Den Isomorphismus liefert folgendes Lemma:

**Lemma 3.2.12.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Lipschitz-Gebiet. Dann ist  $\alpha : H(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow H(\mathbf{div}, \Omega) : \mathbf{v} \mapsto (-v_2, v_1)^T$  ein isometrischer Isomorphismus.

**Beweis:** Für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in L^2(\Omega)^2$  gilt:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\alpha \mathbf{v}, \alpha \mathbf{w}), \\ \mathbf{curl} \alpha \mathbf{v} &= \mathbf{div} \mathbf{v}, \\ \mathbf{div} \alpha \mathbf{v} &= -\mathbf{curl} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Somit ist  $\mathbf{v} \in H(\mathbf{curl}, \Omega) \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H(\mathbf{div}, \Omega)$  und  $\|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{curl}, \Omega)} = \|\mathbf{v}\|_{H(\mathbf{div}, \Omega)}$  erfüllt. Da  $\alpha^{-1} = \alpha$  gilt und  $\mathbf{curl}, \mathbf{div}$  linear sind ist  $\alpha$  ein isometrischer Isomorphismus. □

**Satz 3.2.13** (*Spurtheorem für  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$* )

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Lipschitz-Gebiet und  $\boldsymbol{\tau} := \alpha \mathbf{n} = \mathbf{n}^\perp$ . Dann gilt:

- i) Der Raum  $C^\infty(\overline{\Omega})^2$  ist dicht in  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ .
- ii) Der Operator  $\tilde{\gamma}_t : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}|_{\partial\Omega} \cdot \boldsymbol{\tau}$ , welcher für  $\mathbf{v} \in C^\infty(\overline{\Omega})^2$  definiert ist, besitzt eine stetige lineare Fortsetzung  $\gamma_t : H(\mathbf{curl}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ .
- iii) Es gilt  $\ker \gamma_t = H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ .

Es wird  $\gamma_t \mathbf{v}$  als *Tangentialkomponente* von  $\mathbf{v}$  auf  $\partial\Omega$  bezeichnet.

**Beweis:** Nach Lemma 3.2.12 sind  $H(\text{curl}, \Omega)$  und  $H(\text{div}, \Omega)$  isometrisch isomorph. Insbesondere stimmen die Topologien überein. Sei  $\alpha$  so wie in Lemma 3.2.12 definiert, so folgt  $\tilde{\gamma}_n \circ \alpha = \tilde{\gamma}_t$ . Somit folgen i), ii) und iii) direkt aus Satz 3.2.4.  $\square$

In analoger Weise zu obigem Satz ergibt sich die Greensche Formel für  $H(\text{curl}, \Omega)$  aus jener für  $H(\text{div}, \Omega)$ :

**Korollar 3.2.14** (*Greensche Formel für  $H(\text{curl}, \Omega)$* ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Lipschitz-Gebiet,  $\mathbf{v} \in H(\text{curl}, \Omega)$  und  $w \in H^1(\Omega)$ . Dann gilt:

$$(\text{curl } \mathbf{v}, w) - (\mathbf{v}, \text{curl } w) = \langle \gamma_t \mathbf{v}, \gamma w \rangle_{H^{-1/2}(\Omega)}.$$

Um doppelte Notation zu vermeiden, sei ab nun vereinbart, dass  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  anstatt  $\gamma_n \mathbf{u}$  geschrieben wird. Analog wird für den zweidimensionalen Fall  $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}$  und für den dreidimensionalen Fall  $\mathbf{v} \times \mathbf{n}$  als Schreibweise für die Tangentialkomponente bevorzugt.

# Kapitel 4

## Skalarpotentiale

In diesem Abschnitt wird die Helmholtz-Hodge-Zerlegung (im Sinne von Satz 2.2.1) für  $L^2$ -Vektorfelder bewiesen. Im Zuge dessen wird auch die Frage beantwortet, wann ein Vektorfeld  $\mathbf{v}$  eine Darstellung der Form  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} p$  besitzt. Man sagt auch, dass  $p$  das *Skalarpotential* von  $\mathbf{v}$  ist. In diesem Kapitel wird analog vorgegangen, wie auf Seite 215ff in [DL90].

Es ist zielführend, sich die Eigenschaften der Zerlegung des Vektorfeldes im Hölder-stetigen Fall in Erinnerung zu rufen. Folgende Eigenschaften wurden festgestellt:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{u} + \mathbf{grad} p && \text{in } \bar{\Omega}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Es ist nun wichtig, die obigen Eigenschaften durch passende Funktionenräume zu beschreiben.

**Definition 4.0.1.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-Gebiet.

$$\begin{aligned}H(\operatorname{div} 0, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{0}\}, \\ H_0(\operatorname{div} 0, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0\}.\end{aligned}$$

Die Helmholtz-Hodge-Zerlegung für den Hölder-stetigen Fall legt die Vermutung nahe, dass  $L^2(\Omega)^n = H_0(\operatorname{div} 0, \Omega) \oplus H$  gilt, wobei  $H$  in einem geeigneten Sinne im Bild von  $\mathbf{grad}$  liegt. Die Aufgabe besteht nun darin, das Bild von  $\mathbf{grad}$  zu charakterisieren.

### 4.1 Das Bild von $\mathbf{grad}$

**Proposition 4.1.2** (*Bild von  $\mathbf{grad}$* ) Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet. Dann gilt:



- i) Die Räume  $\mathbf{grad} H^1(\Omega)$  und  $\mathbf{grad} H_0^1(\Omega)$  sind abgeschlossene Unterräume von  $L^2(\Omega)^n$ .
- ii) Es ergeben sich die orthogonalen Zerlegungen

$$\begin{aligned} L^2(\Omega)^n &= H_0(\operatorname{div} 0, \Omega) \oplus \mathbf{grad} H^1(\Omega) \text{ und} \\ L^2(\Omega)^n &= H(\operatorname{div} 0, \Omega) \oplus \mathbf{grad} H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Nachfolgendes Lemma gibt ein wichtiges analytisches Hilfsmittel für den Beweis obiger Proposition.

**Lemma 4.1.3** (*Peetre's Lemma*) Seien  $X_0, X_1, X_2$  Banachräume,  $\iota_1 : X_0 \rightarrow X_1$  und  $\iota_2 : X_0 \rightarrow X_2$  stetige lineare Funktion mit den Eigenschaften:

- i)  $\iota_2$  ist eine kompakte Abbildung.
- ii) Es existiert eine Konstante  $C > 0$  so, dass

$$\|v\|_{X_0} \leq C \left( \|\iota_1(v)\|_{X_1} + \|\iota_2(v)\|_{X_2} \right) \quad \forall v \in X_0$$

erfüllt ist.

Dann gilt:

- i)  $\ker \iota_1$  ist endlichdimensional und  $\operatorname{ran} \iota_1$  ist abgeschlossen.
- ii) Es existiert eine Konstante  $C_0 > 0$  so, dass

$$\inf_{w \in \ker \iota_1} \|v + w\|_{X_0} \leq C_0 \|\iota_1(v)\|_{X_1} \quad \forall v \in X_0$$

erfüllt ist (vgl. Lemma 2, Seite 209 in [DL90]).

**Beweis** (von Proposition 4.1.2):

- i) Es sind die Voraussetzungen von Peetre's Lemma (Lemma 4.1.3) zu überprüfen. Als entsprechende Banachräume werden

$$X_0 := H^1(\Omega), \quad X_1 := L^2(\Omega)^n, \quad X_2 = L^2(\Omega)$$

gewählt und die entsprechenden Abbildungen seien durch

$$\iota_1 := \mathbf{grad} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad \iota_2 := id : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

gegeben. Trivialerweise sind  $\iota_1$  und  $\iota_2$  linear und für die Operatornormen gelten die Abschätzungen:

$$\|\iota_1\|_{X_0 \rightarrow X_1} \leq 1 \quad \text{und} \quad \|\iota_2\|_{X_0 \rightarrow X_2} \leq 1.$$

Aufgrund des Satzes von Rellich-Kondrakov (vgl. Satz 1.4, Seite 7 in [Neč12]) ist  $\iota_2$  kompakt und für  $C = 1$  ist Voraussetzung ii) in Peetre's Lemma erfüllt. Somit lässt sich schließen, dass  $\operatorname{ran} \iota_1 = \mathbf{grad} H^1(\Omega)$  abgeschlossen ist. Für  $X_0 := H_0^1(\Omega)$  folgt analog, dass  $\mathbf{grad} H_0^1(\Omega)$  abgeschlossen ist.

ii) Sei  $\mathbf{v} \in (\mathbf{grad} H^1(\Omega))^\perp \subseteq L^2(\Omega)^n$ , daher gilt:

$$0 = (\mathbf{v}, \mathbf{grad} \varphi) = -\langle \operatorname{div} \mathbf{v}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Somit folgt  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  im distributionellen Sinn und  $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div} 0, \Omega)$ . Aus der Greenschen Formel für  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  lässt sich des Weiteren folgern:

$$0 = (\mathbf{v}, \mathbf{grad} \varphi) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, \varphi) = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (4.1)$$

Als Konsequenz ergibt sich  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  und  $(\mathbf{grad} H^1(\Omega))^\perp \subseteq H_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$ . Sei nun  $\mathbf{v} \in H_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$ . Da (4.1) gültig bleibt folgt auch die andere Inklusion und somit  $(\mathbf{grad} H^1(\Omega))^\perp = H_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$ . In analoger Weise kann man  $(\mathbf{grad} H_0^1(\Omega))^\perp = H(\operatorname{div} 0, \Omega)$  zeigen, wobei zu beachten ist, dass (4.1) weiterhin gilt, da  $\gamma\varphi = 0$  für jede Funktion  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  gilt. Aus der Abgeschlossenheit von  $\mathbf{grad} H^1(\Omega)$  und  $\mathbf{grad} H_0^1(\Omega)$  folgt somit:

$$L^2(\Omega)^n = H_0(\operatorname{div} 0, \Omega) \oplus \mathbf{grad} H^1(\Omega) = H(\operatorname{div} 0, \Omega) \oplus \mathbf{grad} H_0^1(\Omega).$$

□

Als unmittelbare Konsequenz von Proposition 4.1.2 kann nun die Frage beantwortet werden, wann  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n$  ein Skalarpotential besitzt.

**Korollar 4.1.4.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-Gebiet. Für eine Funktion  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n$  existiert genau dann ein Skalarpotential  $p \in H^1(\Omega)$ , wenn

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in H_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$$

erfüllt ist.

## 4.2 Der Kern von grad

**Proposition 4.2.5 (Kern von grad)** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-Gebiet und  $\mathbf{grad} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^n$ . Dann gilt:

$$\ker \mathbf{grad} = \mathbb{R},$$

wobei  $\mathbb{R}$  mit dem Raum der konstanten Funktionen auf  $\Omega$  identifiziert wird.

**Beweis:** Für eine stetig differenzierbare Funktion  $p$  folgt durch Integration, dass  $p = \textit{konst.}$  gelten muss, wenn  $\mathbf{grad} p = \mathbf{0}$  erfüllt. Bei einer Funktion, die nur schwach differenzierbar ist, bietet sich diese Möglichkeit nicht, jedoch kann man durch Regularisierung das gewünschte Resultat erhalten: Sei  $(\eta_\epsilon)_{\epsilon>0}$  ein Mollifier. Für  $p \in \ker \mathbf{grad}$  folgt (vgl. Abschnitt 1.5):

$$\eta_\epsilon * p \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{und} \quad \mathbf{grad} (\eta_\epsilon * p) = \mathbf{grad} p = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_\epsilon,$$

wobei  $\Omega_\epsilon := \{\mathbf{x} \in \Omega : \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) < \epsilon\}$  gilt. Aus der Glattheit von  $\eta_\epsilon * p$  folgt nun, dass die regularisierte Funktion für jedes  $\epsilon > 0$  lokal konstant in  $\Omega_\epsilon$  ist. Da  $\Omega$  zusammenhängend ist, folgt im Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$ , dass  $p$  konstant sein muss. □

### 4.3 Helmholtz-Hodge-Zerlegung

Aus den Eigenschaften von  $\text{ran grad}$  und  $\text{ker grad}$  (Proposition 4.1.2 und Proposition 4.2.5) ergibt sich nun unmittelbar die Helmholtz-Hodge-Zerlegung.

**Korollar 4.3.6** (*Helmholtz-Hodge-Zerlegung*) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-Gebiet und  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n$ . Dann existieren ein eindeutig bestimmtes  $\mathbf{u} \in H_0(\text{div } 0, \Omega)$  und ein (bis auf eine additive Konstante) eindeutig bestimmtes  $p \in H^1(\Omega)$  mit der Eigenschaft:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \text{grad } p.$$

Das weitere Vorgehen wird dadurch bestimmt sein, den Raum  $\mathbf{u} \in H_0(\text{div } 0, \Omega)$  näher zu betrachten. Ziel ist es, diesen in Verbindung mit dem Operator  $\text{curl}$  zu setzen. Als Motivation hierfür dient die Tatsache, dass das Bild von  $\text{curl}$  im Kern von  $\text{div}$  liegt, das heißt es gilt:

$$\text{curl } H^1(\Omega) \subseteq H(\text{div } 0, \Omega)$$

Es gilt nun herauszufinden, ob auch die andere Inklusion gültig ist.

# Kapitel 5

## Vektorpotentiale und Stromfunktionen

In diesem Kapitel sollen Eigenschaften des Operators **curl** genauer untersucht werden. In drei Dimensionen ist es geläufig,  $\phi$  als *Vektorpotential* von  $\mathbf{u}$  zu bezeichnen, falls  $\mathbf{u} = \mathbf{curl} \phi$  gilt. Im zweidimensionalen Fall nennt man  $\phi$  eine *Stromfunktion* von  $\mathbf{u}$ , falls diese  $\mathbf{u} = \mathbf{curl} \phi$  erfüllt. Damit dies gelingt wird ein analoges Vorgehen, wie auf den Seiten 37-40 und 45-51 in [GR86] gewählt. Um Vektorfelder und Stromfunktionen konstruieren zu können, müssen jedoch noch einige Eigenschaften des Lipschitz-Gebietes  $\Omega$  genannt werden. Diese finden sich im nächsten Abschnitt.

### 5.1 Geometrische Eigenschaften

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \{2, 3\}$  ein Lipschitz-Gebiet und  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein  $C^\infty$ -Gebiet mit  $\bar{\Omega} \subseteq \mathcal{O}^1$ . Da  $\partial\Omega$  eine kompakte Mannigfaltigkeit darstellt, zerfällt  $\partial\Omega$  in endlich viele zusammenhängende Komponenten, welche mit  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_p$  bezeichnet werden, wobei  $\Gamma_0$  als Rand der einzigen nicht beschränkten Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  gewählt wird. Für  $1 \leq i \leq p$  sei  $\Omega_i$  jene Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}$ , welche als Rand  $\Gamma_i$  besitzt (vgl. Abbildung 5.1). Zusätzlich sei

$$\Omega_0 := \mathcal{O} \setminus \left( \bar{\Omega} \cup \bigcup_{i=1}^p \Omega_i \right).$$

Es ist nun möglich, für  $i = 0, \dots, p$ , die Räume  $H^{1/2}(\Gamma_i) \subseteq H^{1/2}(\partial\Omega)$  zu betrachten. Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen sei vereinbart, dass ab hier die Schreibweise  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_i}$  anstatt von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1/2}(\Gamma_i)}$  für die kanonische Paarung von  $H^{1/2}(\Gamma_i)$  und  $H^{-1/2}(\Gamma_i)$  verwendet wird.

---

<sup>1</sup>Da  $\Omega$  nach Voraussetzung beschränkt ist, kann  $\mathcal{O}$  z.B. als eine Kugel mit hinreichend großem Radius gewählt werden.

*Anmerkung 5.1.1* Um einzusehen, dass die hier erwähnten Eigenschaften tatsächlich gelten, sei auf den Zerlegungssatz von Jordan-Brouwer (vgl. Theorem 7.1, Seite 13 in [Sch09]) verwiesen. Dieser besagt, dass jede kompakte und zusammenhängende Hyperfläche des  $\mathbb{R}^n$  den  $\mathbb{R}^n$  in zwei zusammenhängende offene Mengen teilt. Eine Anwendung des Zerlegungssatzes auf die Zusammenhangskomponenten von  $\partial\Omega$  liefert nun die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

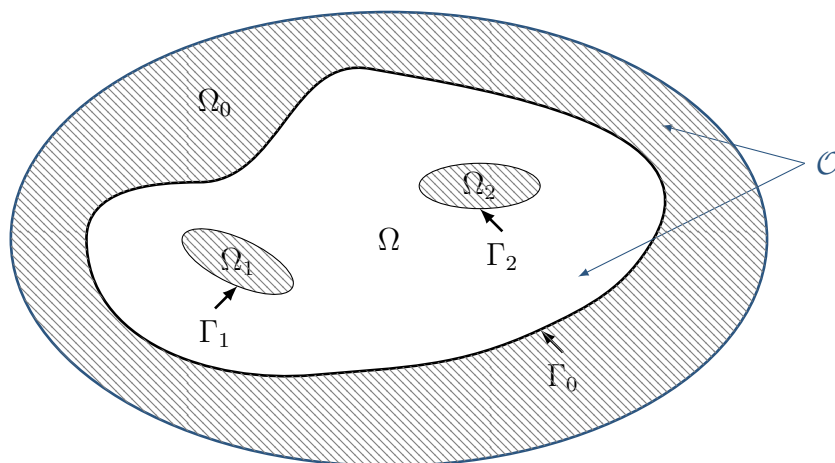


Abbildung 5.1: Graphische Darstellung der Eigenschaften von  $\Omega$  aus Abschnitt 5.1. Die Menge  $\mathcal{O}$  ist blau umrandet dargestellt. Die Gebiete sind schraffiert eingezeichnet.

## 5.2 Das Bild von $\mathbf{curl}$

Als erster Schritt zur Konstruktion von Vektorpotentialen und Stromfunktionen soll das Bild von  $\mathbf{curl}$  genauer betrachtet werden. Dies dient dazu, festzustellen, welche Anforderungen an ein Vektorfeld mindestens gestellt werden müssen.

**Proposition 5.2.2** (*Eigenschaften des Bildes von  $\mathbf{curl}$* ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \{2, 3\}$  ein Lipschitz-Gebiet,  $\phi \in H^1(\Omega)$  bzw.  $\phi \in H^1(\Omega)^3$  und  $\mathbf{u} := \mathbf{curl} \phi$ . Es gilt:

i)  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  im distributionellen Sinne und daher gilt:

$$\mathbf{u} \in H(\operatorname{div} 0, \Omega),$$

ii)  $\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0$  für  $i = 0, \dots, p$ .

**Beweis:**

i) Die gewünschte Aussage ist durch Einsetzen in  $\operatorname{div}$  und  $\mathbf{curl}$  direkt ersichtlich.

ii) Das gesuchte Resultat ist eine unmittelbare Konsequenz des Integralsatzes von Gauß, wobei jedoch mittels Multiplikation mit einer geeigneten Funktion die Auswertung auf  $\Gamma_i$ ,

auf jene Auswertung auf  $\partial\Omega$  zurückgeführt werden muss. Für  $i = 0, \dots, p$  sei  $\theta_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  so zu wählen, sodass gilt:

$$\theta_i = \delta_{ij} \quad \text{auf} \quad O_j,$$

wobei  $(O_i)_{i=0, \dots, p}$  offene Mengen sind, welche die Eigenschaft

$$\Gamma_i \subseteq O_i \quad \text{und} \quad \overline{O_i} \cap \overline{O_j} = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

besitzen. Es sei  $\mathbf{w}_i := \mathbf{curl}(\theta_i \phi)$ . Die Definition von  $\mathbf{w}_i$  impliziert, dass  $\mathbf{w}_i \in H(\text{div } 0, \Omega)$  gelten muss. Aus der Greenschen Formel für  $H(\text{div}, \Omega)$  und der Wahl von  $\theta_i$  folgt für  $i = 0, \dots, p$ :

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = \langle \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = \underbrace{(\text{div } \mathbf{curl}(\theta_i \phi), 1)}_{=0} = 0.$$

□

*Anmerkung 5.2.3* Die Funktionen  $(\theta_i)_{i=0, \dots, p}$  können mittels Regularisierung konstruiert werden. Da die Mengen  $(\Gamma_i)_{i=0, \dots, p}$  eine Zerlegung von  $\partial\Omega$  in Zusammenhangskomponenten sind, existieren offene und disjunkte Mengen  $(\tilde{O}_i)_{i=0, \dots, p}$  mit

$$\Gamma_i \subseteq \tilde{O}_i \quad \text{für} \quad i = 0, \dots, p.$$

Für ein hinreichend kleines  $\epsilon > 0$  gilt:

$$O_i := \{\mathbf{x} \in \tilde{O}_i : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\tilde{O}_i) < \epsilon\} \supseteq \Gamma_i \quad \text{für} \quad i = 0, \dots, p$$

Zusätzlich folgt:

$$\overline{O_i} \cap \overline{O_j} = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

Für  $i = 0, \dots, p$  sei die Funktion  $\tilde{\theta}_i$  durch

$$\tilde{\theta}_i := \begin{cases} 1 & \text{in } \tilde{O}_i, \\ 0 & \text{in } \tilde{O}_i^c, \end{cases}$$

gegeben. Nun erfüllt die Abbildung  $\theta_i := \eta_\epsilon * \tilde{\theta}_i$ :

$$\theta_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \text{und} \quad \theta_i = \delta_{ij} \quad \text{auf} \quad O_j, \quad j = 0, \dots, p.$$

Somit sind alle gesuchten Eigenschaften für die Mengen  $(O_i)_{i=0, \dots, p}$  und die Funktionen  $(\theta_i)_{i=0, \dots, p}$  erfüllt. ◻

Im Bezug zur Helmholtz-Hodge-Zerlegung sei hier angemerkt, dass Funktionen aus dem Raum  $H_0(\text{div } 0, \Omega)$  Eigenschaft i) und ii) aus Proposition 5.2.2 erfüllen. Um zu gewährleisten, dass

$$H_0(\text{div } 0, \Omega) \subseteq \mathbf{curl} H^1(\Omega)$$

gilt, ist es nun von Bedeutung, zu verifizieren, ob durch i) und ii) das Bild des Rotationsoperators vollständig charakterisiert ist. Um dies zu bewerkstelligen, wird für eine Funktion  $\mathbf{u} \in H(\text{div } 0, \Omega)$  folgende Strategie angewandt:

- i) Konstruktion einer Fortsetzung  $\tilde{\mathbf{u}} \in H(\operatorname{div} 0, \mathbb{R}^n)$  von  $\mathbf{u}$ ,
- ii) Konstruktion des Vektorpotentials bzw. der Stromfunktion mit Hilfe der Fourier-transformierten von  $\tilde{\mathbf{u}}$ .

Folgendes Lemma liefert die gewünschte Fortsetzung:

**Lemma 5.2.4.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-Gebiet und  $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div} 0, \Omega)$  mit der Eigenschaft:

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, p. \quad (5.1)$$

Dann existiert eine Fortsetzung  $\tilde{\mathbf{u}} \in H(\operatorname{div} 0, \mathbb{R}^n)$  von  $\mathbf{u}$ .

**Beweis:** Als erster Schritt wird die Menge  $\mathbb{R}^n \setminus (\partial\Omega \cup \partial\mathcal{O})$  in die drei offenen Bereiche

$$\Omega, \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega} \text{ und } (\bar{\mathcal{O}})^c$$

geteilt. Eine möglichst einfache Variante ergibt sich durch den Ansatz die Fortsetzung so zu wählen, sodass

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{in } (\bar{\mathcal{O}})^c \quad (5.2)$$

gilt. Da  $\tilde{\mathbf{u}} \in H(\operatorname{div} 0, \mathbb{R}^n)$  gelten soll, muss jedoch zusätzlich erreicht werden, dass bei den Übergängen

$$\Omega \rightarrow \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega} \quad \text{und} \quad \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega} \rightarrow (\bar{\mathcal{O}})^c$$

die Normalkomponente erhalten bleibt. Diese bedeutet, dass entsprechende Randbedingungen auf  $\partial\Omega$  und  $\partial\mathcal{O}$  erfüllt sein müssen. Da  $\tilde{\mathbf{u}}$  sowohl auf  $\Omega$ , als auch auf  $(\bar{\mathcal{O}})^c$  gegeben ist, muss auf  $\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}$  ein entsprechendes Randwertproblem gelöst werden, damit die gewünschten Eigenschaften erfüllt sind. Bezeichne  $\mathbf{n}$  den nach außen gerichteten (bzgl.  $\Omega$  bzw.  $\mathcal{O}$ ) normierten Normalvektor auf  $\partial\Omega$  bzw.  $\partial\mathcal{O}$ . Dies führt zu folgendem Neumann-Problem:

*Gesucht ist eine Funktion  $w \in H^1(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega})$  mit:*

$$\begin{aligned} -\Delta w &= 0 \quad \text{in } \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf } \Gamma_i, \quad i = 0, \dots, p, \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen existiert eine (nicht eindeutige) Lösung  $w \in H^1(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega})$  des Neumann-Problems (5.3) (vgl. Anmerkung 5.2.5). Für  $\boldsymbol{\theta} := \mathbf{grad} w \in L^2(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega})^n$  gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} &= \Delta w = 0 \quad \text{in } \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}, \\ \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf } \Gamma_i, \quad i = 0, \dots, p, \\ \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Nun kann die gewünschte Fortsetzung geeignet zusammengesetzt werden:

$$\tilde{\mathbf{u}} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{\theta} & \text{in } \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}, \\ \mathbf{0} & \text{in } (\bar{\mathcal{O}})^c. \end{cases} \quad (5.5)$$

Es muss verifiziert werden, dass  $\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} = 0$  gilt. Sei  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  eine beliebige Testfunktion, so folgt:

$$\langle \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{grad} \varphi \, d\lambda^n = - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{grad} \varphi \, d\lambda^n - \sum_{i=0}^p \int_{\Omega_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{grad} \varphi \, d\lambda^n.$$

Da nach Konstruktion

$$\tilde{\mathbf{u}}|_{\Omega} \in H(\operatorname{div} 0, \Omega) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{u}}|_{\Omega_i} \in H(\operatorname{div} 0, \Omega_i) \quad \text{für } i = 0, \dots, p$$

gilt, kann mit Hilfe der Greenschen Formel und unter Beachtung der Richtung von  $\mathbf{n}$  gefolgert werden:

$$\langle \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}, \varphi \rangle = - \langle \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \partial\mathcal{O})} + \sum_{i=0}^p \langle \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\Gamma_i}.$$

Aus der Konstruktion von  $\tilde{\mathbf{u}}|_{\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}}$  lässt sich

$$\langle \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}, \varphi \rangle = - \sum_{i=0}^p \langle \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\Gamma_i} + \sum_{i=0}^p \langle \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{\Gamma_i} = 0$$

schließen. Da  $\varphi$  beliebig ist, folgt  $\tilde{\mathbf{u}} \in H(\operatorname{div} 0, \mathbb{R}^n)$ . Somit erfüllt  $\tilde{\mathbf{u}}$  alle gewünschten Eigenschaften.  $\square$

*Anmerkung 5.2.5* Um einzusehen, dass das Neumann-Problem (5.3) tatsächlich eine Lösung besitzt, ist es zweckmäßig,  $\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}$  in seine einzelnen Zusammenhangskomponenten aufzuteilen. Die gegebene partielle Differentialgleichung induziert Neumann-Probleme der Form:

*Gesucht ist eine Funktion  $w \in H^1(\omega)$  mit:*

$$\begin{aligned} -\Delta w &= f \quad \text{in } \omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} &= g \quad \text{auf } \partial\omega, \end{aligned} \quad (5.6)$$

wobei  $\omega \in \{\Omega_0, \dots, \Omega_p\}$ ,  $f = 0$  und

$$g := \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & \text{auf } \partial\Omega, \\ 0 & \text{auf } \partial\mathcal{O}, \end{array} \right\} \in H^{-1/2}(\partial\Omega \cup \partial\mathcal{O})$$



gilt. Insbesondere lässt sich  $g$  als ein Element aus dem Raum  $H^{-1/2}(\partial\omega)$  auffassen. Es sei hier besonders hervorgehoben, dass eine Lösung von (5.3) nur existieren kann, wenn für alle Gebiete  $\omega \in \{\Omega_0, \dots, \Omega_p\}$  die Kompatibilitätsbedingung<sup>2</sup>:

$$\int_{\omega} f \, d\lambda^n + \langle g, 1 \rangle_{H^{-1/2}(\partial\omega)} = 0$$

erfüllt ist. Auf Grund der Wahl von  $f$  und  $g$  ist dies aber genau dann gegeben, wenn (5.1) gilt. Die Existenz einer Lösung kann mit dem Satz von Lax-Milgram und Aufstellen eines geeigneten Variationsproblems gezeigt werden. Als Hilbertraum muss jedoch  $H^1(\omega)/\mathbb{R}$ , mit der Faktornorm

$$\|\dot{w}\|_{H^1(\omega)/\mathbb{R}} := \inf_{\substack{w \in H^1(\omega) \\ \dot{w} = \text{konst.}}} \|w\|_{H^1(\omega)},$$

gewählt werden, da in der Problemstellung nur Ableitungen von  $w$  vorkommen. Die Faktornorm ist hierbei eine zu  $\|\mathbf{grad} \cdot\|_{L^2(\omega)}$  äquivalente Norm (vgl. Abschnitt 1.4 und insbesondere Theorem 1.9, Seite 13f in [GR86]). Insbesondere impliziert dies, dass eine Lösung von (5.6) nur bis auf eine additive Konstante (pro Komponente  $\omega$  von  $\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}$ ), eindeutig bestimmt sein kann.  $\square$

*Anmerkung 5.2.6* Die in Lemma 5.2.4 konstruierte Fortsetzung  $\tilde{\mathbf{u}}$  ist in mehrfacher Hinsicht nicht eindeutig. So ist  $\tilde{\mathbf{u}}$  abhängig von der Wahl von  $\mathcal{O}$  und der Ansatz  $\tilde{\mathbf{u}} = 0$  auf  $(\bar{\mathcal{O}})^c$  muss nicht gewählt werden.  $\square$

Mit Lemma 5.2.4 kann nun das gesuchte Vektorpotential konstruiert werden, jedoch ist noch ein kurzer Einschub über die Fouriertransformation von Nöten.

Es bezeichne  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  den sogenannten Fourier-Plancherel Operator (vgl. Seite 77ff in [Blu13]), welcher eine stetige isometrische und surjektive Fortsetzung der Fourier-Transformation

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \varphi \mapsto \left( \boldsymbol{\mu} \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\lambda^n(\mathbf{x}) \right) \quad (5.7)$$

auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  darstellt. Für  $\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{F}\mathbf{u}$  durch

$$(\mathcal{F}u_1, \dots, \mathcal{F}u_m)^T$$

gegeben. Entscheidend ist das Verhalten von  $\mathcal{F}$  bzgl. Differenzialoperatoren. Sei  $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , und  $|\alpha| \leq m$  so gilt:

$$\mathcal{F}[\mathcal{D}^\alpha u](\boldsymbol{\mu}) = i^{|\alpha|} \prod_{j=1}^n \mu_j^{\alpha_j} \mathcal{F}u(\boldsymbol{\mu}).$$

---

<sup>2</sup>Um die Kompatibilitätsbedingung zu erhalten, genügt es,  $\int_{\omega} f \, d\lambda^n = - \int_{\omega} \Delta w \, d\lambda^n$  zu betrachten und den Integralsatz von Gauß anzuwenden.

Insbesondere kann man hieraus und aus der Tatsache, dass  $\mathcal{F}$  eine Isometrie ist folgern, dass für  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  gilt:

$$i^{|\alpha|} \prod_{j=1}^n \mu_j^{\alpha_j} \mathcal{F} u \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq m \Leftrightarrow u \in H^m(\mathbb{R}^n).$$

Diese Eigenschaften werden nun von Nutzen sein, um das gesuchte Vektorpotential zu konstruieren. Der zwei- und der dreidimensionale Fall muss jedoch getrennt betrachtet werden, da der Operator **curl** jeweils eine andere Struktur besitzt.

**Proposition 5.2.7.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \{2, 3\}$  ein Lipschitz-Gebiet und  $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div} 0, \Omega)$  mit der Eigenschaft:

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, p. \quad (5.8)$$

Dann gilt:

- i) Für  $n = 3$  existiert eine Funktion  $\boldsymbol{\phi} \in H^1(\Omega)^3$ , sodass

$$\mathbf{curl} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{u}$$

erfüllt ist. Es kann  $\boldsymbol{\phi}$  so gewählt werden, dass  $\operatorname{div} \boldsymbol{\phi} = 0$  gilt.

- ii) Für  $n = 2$  existiert eine Funktion  $\phi \in H^1(\Omega)$ , sodass

$$\mathbf{curl} \phi = \mathbf{u}$$

erfüllt ist.

**Beweis:** Bezeichne  $\tilde{\mathbf{u}} \in H(\operatorname{div} 0, \mathbb{R}^n)$  die in Lemma 5.2.4 konstruierte Fortsetzung von  $\mathbf{u}$ . Eigenschaft (5.2) impliziert hierbei, dass  $\mathcal{F} \tilde{\mathbf{u}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)^n$  gilt (siehe Anmerkung 5.2.8).

- i) Sei  $n = 3$ . Durch Anwendung der Fouriertransformation auf

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} &= 0 \quad \text{und} \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{curl} \boldsymbol{\phi} \end{aligned}$$

erhält man

$$\sum_{i=1}^3 \mu_i \mathcal{F} \tilde{u}_i = 0 \quad \text{und} \quad (5.9)$$

$$\mathcal{F} \tilde{\mathbf{u}} = i(\mu_2 \mathcal{F} \phi_3 - \mu_3 \mathcal{F} \phi_2, \mu_3 \mathcal{F} \phi_1 - \mu_1 \mathcal{F} \phi_3, \mu_1 \mathcal{F} \phi_2 - \mu_2 \mathcal{F} \phi_1)^T. \quad (5.10)$$

Das durch (5.10) induzierte Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar. Dies ermöglicht es noch eine zusätzliche Anforderung an  $\boldsymbol{\phi}$  zu stellen. So geht die Bedingung  $\operatorname{div} \boldsymbol{\phi} = 0$ , durch Transformation, über in:

$$\sum_{i=1}^3 \mu_i \mathcal{F} \phi_i = 0. \quad (5.11)$$

Als einzige Lösung von (5.9), (5.10) und (5.11) erhält man:

$$\mathcal{F}\phi = \frac{1}{i|\boldsymbol{\mu}|^2} (\mu_3 \mathcal{F}\tilde{u}_2 - \mu_2 \mathcal{F}\tilde{u}_3, \mu_1 \mathcal{F}\tilde{u}_3 - \mu_3 \mathcal{F}\tilde{u}_1, \mu_2 \mathcal{F}\tilde{u}_1 - \mu_1 \mathcal{F}\tilde{u}_2)^T. \quad (5.12)$$

Sei nun  $\mathcal{F}\phi$  durch (5.12) definiert. Aus der Definition von  $\mathcal{F}\phi$  folgt für  $i = 1, 2, 3$ :

$$|\mathcal{F}\phi_i| \leq \frac{1}{|\boldsymbol{\mu}|} \sum_{j=1}^3 |\mathcal{F}\tilde{u}_j|.$$

Da  $\mathcal{F}\tilde{\mathbf{u}} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$  gilt, genügt es nach obiger Zeile zu zeigen, dass  $\frac{1}{|\boldsymbol{\mu}|} \mathcal{F}\tilde{\mathbf{u}}$  in einer Umgebung um  $\mathbf{0}$  beschränkt ist, um  $\mathcal{F}\phi \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$  schließen zu können. Da  $\mathcal{F}\tilde{\mathbf{u}}$  beliebige oft differenzierbar ist, kann eine Taylor-Entwicklung von  $\mathcal{F}\tilde{\mathbf{u}}$ , mit Entwicklungspunkt  $\mathbf{0}$  betrachtet werden. Aus (5.9) und der Stetigkeit der Fouriertransformierten folgt:

$$\mathcal{F}\tilde{u}_1(\mu_1, 0, 0) = -\frac{1}{\mu_1} \left( \underbrace{\mu_2}_{=0} \underbrace{\mathcal{F}\tilde{u}_2(\mu_1, 0, 0)}_{<\infty} + \underbrace{\mu_3}_{=0} \underbrace{\mathcal{F}\tilde{u}_3(\mu_1, 0, 0)}_{<\infty} \right) = 0 \quad \forall \mu_1 \neq 0.$$

Es lässt sich aus der Stetigkeit von  $\mathcal{F}\tilde{\mathbf{u}}$  somit  $\mathcal{F}\tilde{u}_1(\mathbf{0}) = 0$  schließen. In analoger Weise ist  $\mathcal{F}\tilde{u}_2(\mathbf{0}) = 0$  bzw.  $\mathcal{F}\tilde{u}_3(\mathbf{0}) = 0$  zu zeigen, indem  $\mathcal{F}\tilde{u}_2(0, \mu_2, 0)$ ,  $\forall \mu_2 \neq 0$  bzw.  $\mathcal{F}\tilde{u}_3(0, 0, \mu_3)$ ,  $\forall \mu_3 \neq 0$  untersucht wird. Für den Funktionswert am Entwicklungspunkt erhält man:

$$\mathcal{F}\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

und die gesuchte Taylor-Entwicklung ergibt sich zu:

$$\mathcal{F}\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\mu}) = \sum_{j=1}^3 \mu_j \left. \frac{\partial}{\partial \mu_j} \right|_{\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}} \mathcal{F}\tilde{\mathbf{u}} + \mathcal{O}(|\boldsymbol{\mu}|^2) \quad \text{für } |\boldsymbol{\mu}| \text{ hinreichend klein,}$$

womit die Beschränktheit von  $\frac{1}{|\boldsymbol{\mu}|} \mathcal{F}\tilde{\mathbf{u}}$  in einer Umgebung von  $\mathbf{0}$  gezeigt ist. Aus  $|\mu_i \mu_j| \leq |\boldsymbol{\mu}|^2$  für alle  $i, j = 1, 2, 3$  folgt:

$$|\mu_j \mathcal{F}\phi_i| \leq \sum_{k=1}^3 |\mathcal{F}\tilde{u}_k|. \quad (5.13)$$

Da  $\mathcal{F}\phi \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$  gilt, ist  $\phi := \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}\phi$  wohldefiniert und ein Element aus dem Raum  $L^2(\mathbb{R}^3)^3$ . Aus (5.13) folgt zusätzlich  $\frac{\partial}{\partial x_j} \phi \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$  für  $j = 1, 2, 3$ . Das gesuchte Vektorpotential im Raum  $H^1(\Omega)$  ist nun durch  $\phi|_{\Omega}$  gegeben. Gleichung (5.11) impliziert, dass das hier konstruierte Vektorpotential zusätzlich noch divergenzfrei ist.

ii) Sei  $n = 2$ . In analoger Vorgehensweise zum dreidimensionalen Fall, gehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} &= 0 \quad \text{und} \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \operatorname{curl} \phi \end{aligned}$$

durch Fouriertransformation in

$$\sum_{i=1}^2 \mu_i \mathcal{F} \tilde{u}_i = 0 \quad \text{und} \quad (5.14)$$

$$\mathcal{F} \tilde{\mathbf{u}} = i(\mu_2 \mathcal{F} \phi, -\mu_1 \mathcal{F} \phi)^T. \quad (5.15)$$

über. Sei  $\mathcal{F} \phi := \frac{1}{i\mu_2} \mathcal{F} \tilde{u}_1$ , so impliziert Gleichung (5.14), dass auch (5.15) erfüllt ist. Wie im Fall  $n = 3$  muss nun gezeigt werden, dass die Rücktransformierte von  $\mathcal{F} \phi$  die gewünschten Eigenschaften erfüllt. Um  $\mathcal{F} \phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  folgern zu können genügt es zu zeigen, dass  $\frac{1}{\mu_2} \mathcal{F} \tilde{u}_1$  in einer Umgebung um  $\mathbf{0}$  beschränkt ist. In Analogie zum dreidimensionalen Fall wird wieder eine Taylor-Entwicklung betrachtet. Unter Berücksichtigung der Stetigkeit von  $\mathcal{F} \tilde{\mathbf{u}}$  und (5.14) folgt  $\mathcal{F} \tilde{u}_1(\mu_1, 0) = 0$ ,  $\forall \mu_1$  und somit:

$$\mathcal{F} \tilde{u}_1(\boldsymbol{\mu}) = \mu_2 \left. \frac{\partial}{\partial \mu_2} \right|_{\mu_2=0} \mathcal{F} \tilde{u}_1 + \mathcal{O}(|\mu_2|^2) \quad \text{für } |\mu_2| \text{ hinreichend klein,}$$

womit wiederum die Beschränktheit von  $\frac{1}{\mu_2} \mathcal{F} \tilde{u}_1$  in einer Umgebung von  $\mathbf{0}$  gezeigt ist. Es folgt, dass  $\phi := \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} \phi \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$  gilt. Aufgrund von Gleichung (5.15) folgt:

$$\mu_1 \mathcal{F} \phi = i \mathcal{F} \tilde{u}_2 \in L^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{und} \quad \mu_2 \mathcal{F} \phi = -i \mathcal{F} \tilde{u}_1 \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

und somit die schwache Differenzierbarkeit von  $\phi$ . Die Einschränkung von  $\phi$  auf  $\Omega$  ist nun die gesuchte Stromfunktion.

□

*Anmerkung 5.2.8* Um einzusehen, dass (5.2) tatsächlich  $\mathcal{F} \tilde{\mathbf{u}} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  impliziert, ist es hilfreich, Gleichung (5.7) zu betrachten. Diese ist nicht nur für Funktionen aus dem Raum  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , sondern allgemein für Funktionen aus dem Raum

$$L^1(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\lambda^n < \infty \right\}$$

definiert. Da nach Konstruktion  $\tilde{\mathbf{u}} = 0$  auf  $\mathcal{O}^c$  gilt, folgt für  $j = 1, \dots, n$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}_j| \, d\lambda^n = \int_{\mathcal{O}} |\tilde{u}_j| \, d\lambda^n \leq \|\tilde{u}_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \cdot \|1\|_{L^2(\mathcal{O})} < \infty.$$

Somit darf  $\tilde{u}_j$  für  $j = 1, \dots, n$  in die Integraldarstellung der Fouriertransformation eingesetzt werden, welche mit  $\mathcal{F} \tilde{u}_j$  übereinstimmt. Sei nun  $\alpha$  ein beliebiger Multiindex. Wendet man den Differenzialoperator  $D^\alpha$  (bzgl.  $\boldsymbol{\mu}$ ) auf den Integranden in (5.7) an, so besitzt dieser, unter Berücksichtigung von (5.2), die von  $\boldsymbol{\mu}$  unabhängige integrierbare Majorante:

$$\underbrace{\left| \tilde{u}_j(\mathbf{x}) \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{O}} \left( i^{|\alpha|} \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \right) \right|}_{< \infty} \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Somit darf, aufgrund von dominierter Konvergenz,  $D^\alpha$  aus dem Integral gezogen werden, wodurch wiederum die Differenzierbarkeit beliebiger Ordnung von  $\mathcal{F}\tilde{\mathbf{u}}$  impliziert wird.  $\square$

*Anmerkung 5.2.9* Für jedes divergenzfreie Vektorpotential  $\phi \in H(\mathbf{curl}, \Omega)$  von  $\mathbf{u}$  gilt:

$$\mathbf{curl} \mathbf{u} = \mathbf{curl} \mathbf{curl} \phi = \mathbf{grad} \underbrace{\operatorname{div} \phi}_{=0} - \Delta \phi = -\Delta \phi \quad \text{in } H^{-1}(\Omega)^3, \quad (5.16)$$

wobei  $\Delta \phi := (\Delta \phi_1, \Delta \phi_2, \Delta \phi_3)^T$  zu beachten ist. Später wird in Abschnitt 5.4 untersucht, welche Randbedingungen zu obiger Gleichung hinzugefügt werden müssen, damit  $\phi$  durch Gleichung (5.16) eindeutig bestimmt ist.  $\square$

*Anmerkung 5.2.10* Gleichung (5.11) kann durch eine andere Bedingung ersetzt werden, jedoch erhält man dadurch im Allgemeinen ein anderes (nicht divergenzfreies) Vektorpotential. So ist es möglich, diese durch

$$\mathcal{F} \phi_3 = 0$$

zu ersetzen, wodurch die Transformierte des Vektorpotentials von der Gestalt

$$\mathcal{F} \phi = \frac{1}{i\mu_3} (\mathcal{F} \tilde{u}_2, \mathcal{F} \tilde{u}_1, 0)^T$$

ist. In diesem Fall erhält man statt einem divergenzfreien Vektorpotential, eines mit verschwindender dritter Komponente.  $\square$

Im nächsten Schritt soll eruiert werde, inwieweit Vektorpotential und Stromfunktion eindeutig bestimmt sein können. Es muss daher der Kern von  $\mathbf{curl}$  genauer untersucht werden.

## 5.3 Der Kern von $\mathbf{curl}$

Die strukturellen Unterschiede zwischen dem zwei- und dem dreidimensionalen Fall sind nicht nur im Beweis von Proposition 5.2.7 zu finden, sondern treten auch sehr deutlich bei der Untersuchung des Kerns von  $\mathbf{curl}$  zutage.

### 5.3.1 Der zweidimensionale Fall

Aufgrund der speziellen Struktur von  $\mathbf{curl}$  in zwei Dimensionen folgt:

$$\mathbf{curl} \phi = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{grad} \phi = \mathbf{0}.$$

Dies führt unmittelbar auf:

**Korollar 5.3.11** (*Kern von  $\mathbf{curl}$ ,  $n = 2$* ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Lipschitz-Gebiet und  $\mathbf{curl} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^2$ . Dann gilt:

$$\ker \mathbf{curl} = \mathbb{R},$$

wobei  $\mathbb{R}$  mit dem Raum der konstanten Funktionen auf  $\Omega$  identifiziert wird

Im Hinblick auf Proposition 5.2.7 bedeutet dies, dass die gefundene Stromfunktion bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist. Für  $\mathbf{u} \in H_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$  erfüllt die zugehörige Stromfunktion:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \mathbf{grad} \phi \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{curl} \phi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Es lässt sich schließen, dass

$$\phi|_{\Gamma_i} = c_i = \textit{konst.} \quad \text{für } i = 0, \dots, p.$$

gelten muss. Dies impliziert jedoch, dass  $\phi$  eindeutig bestimmt ist, wenn eine dieser Konstanten festgesetzt wird. So gibt es genau eine Stromfunktion, die  $\phi|_{\Gamma_0} = 0$  erfüllt.

**Definition 5.3.12.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \{2, 3\}$  ein Lipschitz-Gebiet.

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0, v|_{\Gamma_i} = \textit{konst.}, i = 1, \dots, p\}.$$

*Anmerkung 5.3.13* Auf  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  sind die Normen  $\|\mathbf{grad} \cdot\|_{L^2(\Omega)}$  und  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  äquivalent. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus einer Variante der Poincaré-Ungleichung (vgl. Lemma 3.1, Seite 40 in [GR86]).  $\square$

Zusammenfassend erhält man:

**Korollar 5.3.14.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Lipschitz-Gebiet. Für  $\mathbf{u} \in H_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$  existiert genau eine Stromfunktion  $\phi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ . Diese ist dadurch charakterisiert, dass sie die einzige Lösung des folgenden Variationsproblems ist:

*Gesucht ist eine Funktion  $\phi \in H_{\Gamma_0}^1$  mit:*

$$(\mathbf{curl} \phi, \mathbf{curl} \chi) = (\mathbf{u}, \mathbf{curl} \chi) \quad \forall \chi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega). \quad (5.17)$$

**Beweis:** Nach obigen Überlegungen existiert eine eindeutige Stromfunktion  $\phi$ . Es bleibt zu zeigen, dass das Problem (5.17) tatsächlich  $\phi$  charakterisiert. Trivialerweise erfüllt die Stromfunktion das gegebene Variationsproblem. Es verbleibt zu zeigen, dass die Lösung von (5.17) eindeutig ist. Für zwei Lösungen  $\phi$  und  $\tilde{\phi}$  gilt:

$$(\mathbf{curl} (\phi - \tilde{\phi}), \mathbf{curl} \chi) = 0 \quad \forall \chi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega),$$

und somit folgt:

$$\mathbf{curl} (\phi - \tilde{\phi}) = \mathbf{0} \quad \text{und daher} \quad \mathbf{grad} (\phi - \tilde{\phi}) = \mathbf{0}.$$

Mit Hilfe von Anmerkung 5.3.13 folgt  $\|\phi - \tilde{\phi}\|_{H^1(\Omega)} = 0$  und damit die Eindeutigkeit einer Lösung.  $\square$

### 5.3.2 Der dreidimensionale Fall

Die Basis aller weiteren Überlegungen bildet folgender Satz über stetig differenzierbare Funktionen:

**Satz 5.3.15.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein einfach zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet und  $\mathbf{u} \in C^1(\Omega)^3$ . Es sind äquivalent:

- i) Es gilt:  $\mathbf{curl} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- ii) Es existiert eine Funktion  $p \in C^2(\Omega)$  mit:

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad} p.$$

(vgl. "classical Stokes theorem", Seite 31 in [GR86]).

In Satz 5.3.15 ist die Forderung, dass  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist von entscheidender Bedeutung. Die Aussage ist tatsächlich sogar falsch, wenn dies nicht der Fall ist. Dies ist z.B. aus dem Abschnitt über mehrfach zusammenhängende Gebiete ersichtlich.

Zur Vereinfachung der Notation sei hier noch eine Definition:

**Definition 5.3.16.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \{2, 3\}$  ein Lipschitz-Gebiet.

$$\begin{aligned} H(\mathbf{curl} \, 0, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \mathbf{curl} \mathbf{v} = \mathbf{0}\}. \\ H_0(\mathbf{curl} \, 0, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 : \mathbf{curl} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

*Anmerkung 5.3.17* Es gilt die Implikation:

$$\mathbf{v} \in H_0(\mathbf{curl} \, 0, \Omega) \Rightarrow \mathbf{curl} \mathbf{v} \in H_0(\mathbf{div} \, 0, \Omega).$$

Die Tatsache, dass  $\mathbf{div} \mathbf{curl} \mathbf{v} = 0$  gilt, ist durch direktes Einsetzen einzusehen. Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  gilt mit Hilfe der Greenschen Formeln für  $H(\mathbf{div}, \Omega)$  und  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ :

$$\langle \mathbf{curl} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{curl} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \varphi \, d\lambda^n = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \mathbf{grad} \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)^3} = 0.$$

Da dies für jede Testfunktion  $\varphi$  gilt, folgt die gewünschte Randbedingung.  $\diamond$

Satz 5.3.15 legt die Vermutung nahe, dass gelten könnte:

$$H(\mathbf{curl} \, 0, \Omega) = \mathbf{grad} \, H^1(\Omega).$$

Dies ist tatsächlich eine richtige Annahme, welche in folgender Proposition verifiziert wird:

**Proposition 5.3.18.** Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein einfach zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet. Für eine Funktion  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3$  sind äquivalent:

- i) Es gilt:  $\mathbf{curl} \, \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- ii) Es existiert eine Funktion  $p \in H^1(\Omega)$  mit:

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad} \, p,$$

wobei  $p$  bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist.

Für den Beweis wird folgende Regularitätsaussage benötigt:

**Lemma 5.3.19.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-Gebiet und sei  $v \in L^2(K)$  für alle kompakten Mengen  $K \subseteq \Omega$  und  $\mathbf{grad} \, v \in H^{-1}(\Omega)$ , so folgt:

$$v \in L^2(\Omega).$$

(vgl. Korollar 2.2, Seite 21 in [GR86]).

**Beweis** (zu Proposition 5.3.18):

i)  $\Rightarrow$  ii) Es existiert eine aufsteigende Folge  $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von einfach zusammenhängenden Lipschitz-Gebieten mit der Eigenschaft:

$$\overline{\Omega}_m \subseteq \Omega \quad \text{und} \quad \Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Omega_m,$$

(vgl. Seite 31 in [GR86]). Die Idee ist es nun,  $\mathbf{u}$  in einer Art und Weise zu regularisieren, sodass der Rotationsoperator weiterhin verschwindet. Sei  $(\eta_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  ein Mollifier und bezeichne  $\tilde{\mathbf{u}}$  jene Fortsetzung von  $\mathbf{u}$  auf  $\mathbb{R}^3$  für die  $\tilde{\mathbf{u}} = 0$  auf  $\Omega^c$  gilt. Aus den Eigenschaften von  $(\eta_\epsilon)_{\epsilon > 0}$  und der Konvolution folgt:

$$\begin{aligned} \eta_\epsilon * \tilde{\mathbf{u}} &\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3 \quad \forall \epsilon > 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\eta_\epsilon * \tilde{\mathbf{u}}) &= \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^3)^3, \\ \mathbf{curl} \, (\eta_\epsilon * \tilde{\mathbf{u}}) &= \eta_\epsilon * \mathbf{curl} \, \tilde{\mathbf{u}}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Ist  $\epsilon_m$  hinreichend klein, genauer gilt  $\epsilon_m < \text{dist}(\Omega_m, \partial\Omega)$ , so folgt

$$\mathbf{curl} \, (\eta_{\epsilon_m} * \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_m$$



und somit existiert nach Satz 5.3.15 eine stetig differenzierbare Funktion  $p_\epsilon$  (und daher ist diese auch aus dem Raum  $H^1(\Omega_m)$ ) mit:

$$\eta_{\epsilon_m} * \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{grad} p_{\epsilon_m} \quad \text{in } \Omega_m.$$

Da  $\|\mathbf{grad} \cdot\|_{L^2(\Omega_m)}$  eine zur Faktornorm auf  $H^1(\Omega_m)/\mathbb{R}$  äquivalente Norm ist (siehe Anmerkung 5.2.5) folgt mit (5.18), dass eine Funktion  $p_m \in H^1(\Omega_m)$  existiert, mit:

$$\lim_{\epsilon_m \rightarrow 0} p_{\epsilon_m} = p_m \quad \text{in } H^1(\Omega_m)/\mathbb{R} \quad \text{und} \\ \mathbf{u} = \mathbf{grad} p_m \quad \text{in } \Omega_m.$$

Da  $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine aufsteigende Folge ist und  $\mathbf{grad} p_m = \mathbf{grad} p_{m+1}$  auf  $\Omega_m$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt, folgt, dass sich  $p_m$  und  $p_{m+1}$  höchstens um eine Konstante unterscheiden können. Diese kann so gewählt werden, sodass

$$p_m = p_{m+1} \quad \text{in } \Omega_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

gilt. Damit ist die Funktion  $p$  definiert durch

$$p|_{\Omega_m} := p_m$$

wohldefiniert. Für alle kompakten Mengen  $K$  mit  $K \subseteq \Omega$  existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $K \subseteq \Omega_m$ , sodass folgt:

$$\|p\|_{L^2(K)} \leq \|p\|_{L^2(\Omega_m)} < \infty.$$

Da  $\mathbf{grad} p = \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \subseteq H^{-1}(\Omega)$  gilt, impliziert Lemma 5.3.19, dass  $p \in L^2(\Omega)$  gelten muss. Somit folgt:

$$p \in H^1(\Omega).$$

Da der Kern von  $\mathbf{grad}$  nur aus konstanten Funktionen besteht, ist  $p$  bis auf eine additive Konstante eindeutige bestimmt.

ii)  $\Rightarrow$  i) Die gewünschte Aussage ist durch Einsetzen in  $\mathbf{grad}$  und  $\mathbf{curl}$  direkt ersichtlich.

□

*Anmerkung 5.3.20* Sowohl Satz 5.3.15, als auch Proposition 5.3.18 bleiben im zweidimensionalen Fall gültig, wenn man  $\mathbf{curl}$  durch  $\text{curl}$  ersetzt und die Dimension beachtet. Somit erhält man auch zusätzliche Informationen über den Raum  $H(\text{curl } 0, \Omega) := \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2 : \text{curl } \mathbf{v} = 0\}$ . ◻

Als unmittelbare Konsequenz erhält man aus Proposition 4.1.2 und Proposition 5.3.18:

**Korollar 5.3.21.** Es sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein einfach zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet. Dann gilt:

$$H_0(\text{div } 0, \Omega)^\perp = \mathbf{grad} H^1(\Omega) = H(\mathbf{curl } 0, \Omega).$$

## Mehrfach zusammenhängende Gebiete

In diesem Abschnitt soll ein Ausblick darauf gegeben werden, wie der Kern von **curl** aussieht, wenn  $\Omega$  mehrfach zusammenhängend ist. Nähere Informationen, die hier vorgestellten Resultate und der zugehörige Formalismus finden sich auf den Seiten 217-224 in [DL90]. Die Idee besteht darin, endlich viele Schnitte  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$  einzuführen. Diese sind hinreichend glatte  $n - 1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, welche erfüllen müssen, dass die Menge

$$\dot{\Omega} := \Omega \setminus \left( \bigcup_{i=1}^N \Sigma_i \right)$$

einfach zusammenhängend ist. Auf  $\dot{\Omega}$  ist nun der Kern von **curl** bekannt. Es muss daher nur abgeklärt werden, wie das Verhalten von Funktionen im Kern auf den Schnitten ist. Heuristisch gesehen haben diese Schnitte „zwei Seiten“, welche mit  $\Sigma_i^+$  und  $\Sigma_i^-$  bezeichnet werden sollen (vgl. Abbildung 5.2).

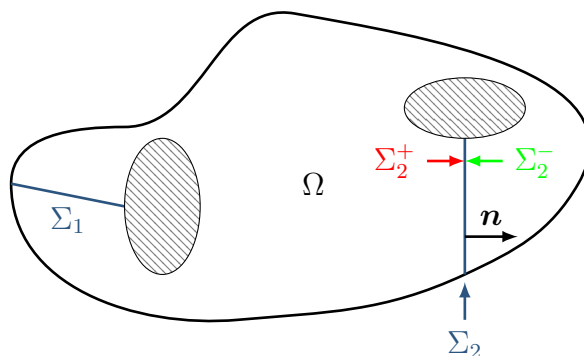


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes. Für den Schnitt  $\Sigma_2$  sind sowohl seine zwei Seiten, als auch sein Normalvektor eingezeichnet. Es ist Konvention, dass dieser von  $\Sigma_2^+$  nach  $\Sigma_2^-$  zeigt.

Wenn  $\Omega$  mindestens ein  $C^2$ -Gebiet ist, ergibt sich:

$$H(\mathbf{curl} \, 0, \Omega) = \mathbf{grad} \, H^1(\Omega) + \mathbb{H}(\Omega),$$

wobei  $\mathbb{H}(\Omega)$  ein endlichdimensionaler Vektorraum ist mit  $\dim \mathbb{H}(\Omega) = N$ . Elemente aus dem Raum  $\mathbb{H}(\Omega)$  sind dadurch charakterisiert, dass sie Lösungen des folgenden Transmissionsproblems sind:

Gesucht ist eine Funktion  $q \in H^1(\dot{\Omega})$  mit:

$$\begin{aligned}\Delta q &= 0 \quad \text{in } \dot{\Omega}, \\ \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ q|_{\Sigma_i^+} - q|_{\Sigma_i^-} &= \text{konst.} \quad \text{für } i = 1, \dots, N, \\ \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Sigma_i^+} - \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Sigma_i^-} &= 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

## 5.4 Divergenzfreie Vektorpotentiale

In diesem Abschnitt werden Randbedingungen untersucht, die an divergenzfreie Vektorpotentiale gestellt werden können. Folgendes Lemma wird sich später noch als nützlich erweisen:

**Lemma 5.4.22.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \{2, 3\}$  ein Lipschitz-Gebiet und  $\mathbf{u} \in H(\text{div } 0, \Omega) \cap H_0(\mathbf{curl } 0, \Omega)$  bzw.  $\mathbf{u} \in H(\text{div } 0, \Omega) \cap H_0(\mathbf{curl } 0, \Omega)$  mit der Eigenschaft:

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, p.$$

Dann gilt:  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

**Beweis:** Sei  $n = 3$ . Aus der Existenz eines Vektorpotentials  $\phi \in H^1(\Omega)^3$  und der Greenschen Formel für  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  folgt:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{curl } \phi) = \underbrace{(\mathbf{curl } \mathbf{v}, \phi)}_{=0} - \underbrace{\langle \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \phi \rangle}_{=0}{}_{H^{-1/2}(\partial\Omega)^3} = 0.$$

Dies impliziert jedoch  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Analog ist auch der zweidimensionale Fall unter Zuhilfenahme der Stromfunktion und der Greenschen Formel zu zeigen.  $\square$

In der nun folgenden Proposition wird eine mögliche Randbedingung genauer untersucht.

**Proposition 5.4.23.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Lipschitz-Gebiet und  $\mathbf{u} \in H(\text{div } 0, \Omega)$  mit der Eigenschaft:

$$\langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, p.$$

Dann gilt:

- i) Es existiert höchstens ein Vektorpotential  $\phi \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\text{div } 0, \Omega)$  mit der Eigenschaft:

$$\langle \phi \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, p. \quad (5.19)$$

- ii) Ist  $\Omega$  einfach zusammenhängend, so hat jede Funktion  $\mathbf{u} \in H_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$  genau ein Vektorpotential  $\boldsymbol{\phi} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\operatorname{div} 0, \Omega)$ . Dieses ist dadurch charakterisiert, dass es die einzige Lösung des folgenden Randwertproblems ist:

*Gesucht ist eine Funktion  $\boldsymbol{\phi} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\operatorname{div} 0, \Omega)$  mit:*

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{\phi} &= \mathbf{curl} \mathbf{u} \quad \text{in } H^{-1}(\Omega)^n, \\ \boldsymbol{\phi} &\text{ erfüllt (5.19).} \end{aligned} \tag{5.20}$$

**Beweis:**

- i) Angenommen, es existieren zwei Vektorpotentiale  $\boldsymbol{\phi}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$  mit den gewünschten Eigenschaften. Dann erfüllt die Differenz  $\boldsymbol{\phi} - \tilde{\boldsymbol{\phi}}$  alle Voraussetzungen von Lemma 5.4.22 und somit gilt:

$$\boldsymbol{\phi} - \tilde{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0} \quad \text{und daher} \quad \boldsymbol{\phi} = \tilde{\boldsymbol{\phi}}.$$

Somit kann es höchstens ein solches Vektorpotential geben.

- ii) Ziel ist es, das schon existierende Vektorpotential (vgl. Proposition 5.2.7) durch Subtraktion einer geeigneten Funktion dahingehend zu verändern, sodass die geforderten Randbedingungen erfüllt sind. Um dies zu bewerkstelligen, wird  $\mathcal{O}$  statt  $\Omega$  betrachtet.  $\mathcal{O}$  sei hier explizit als eine hinreichend große Kugel<sup>3</sup> gewählt. Da  $\mathbf{u} \in H_0(\operatorname{div} 0, \Omega)$  gilt, ist

$$\tilde{\mathbf{u}} := \begin{cases} \mathbf{u} & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{0} & \text{in } \Omega^c, \end{cases}$$

eine divergenzfreie Fortsetzung von  $\mathbf{u}$  auf  $\mathcal{O}$ . Da  $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0$  auf  $\partial\mathcal{O}$  gilt, sind alle Voraussetzungen von Proposition 5.2.7 erfüllt. Somit existiert eine Funktion  $\boldsymbol{\psi} \in H^1(\mathcal{O})^3$  mit:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{curl} \boldsymbol{\psi} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0.$$

Zusätzlich folgt aufgrund der Wahl der Fortsetzung:

$$\mathbf{curl} \boldsymbol{\psi} = \mathbf{curl} \underbrace{\mathbf{curl} \tilde{\mathbf{u}}}_{=0} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}. \tag{5.21}$$

Die Tatsache, dass  $\Omega$  einfach zusammenhängend und  $\mathcal{O}$  eine Kugel ist, impliziert, dass die Gebiete  $(\Omega_i)_{i=0, \dots, p}$  sogar einfach zusammenhängend<sup>4</sup> sind (vgl. Seite 49 in [GR86]). Proposition 5.3.18 und Gleichung (5.21) implizieren, für jedes  $i = 0, \dots, p$ , die Existenz einer Funktion  $q_i \in H^1(\Omega_i)$  mit:

$$\boldsymbol{\psi}|_{\Omega_i} = \mathbf{grad} q_i.$$

<sup>3</sup>Dies impliziert, dass  $\mathcal{O}$  einfach zusammenhängend ist.

<sup>4</sup>Diese Folgerung ist von der Dimension abhängig. Für  $n = 2$  ist  $\Omega_0$  im Allgemeinen nicht einfach zusammenhängend. In zwei Dimensionen wäre durch  $\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < 1\}$  und  $\mathcal{O} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < 2\}$  ein Gegenbeispiel gegeben.

Aus  $\boldsymbol{\psi} \in H^1(\Omega)^3$  folgt sogar  $q_i \in H^2(\Omega_i)$ . Es sei  $q \in H^2(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega})$  durch

$$q|_{\Omega_i} := q_i \quad \text{für } i = 0, \dots, p$$

definiert. Da die Gebiete  $(\Omega_i)_{i=0, \dots, p}$  disjunkt sind, ist  $q$  wohldefiniert, aus dem angegebenen Raum  $H^2(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega})$  und erfüllt:

$$\boldsymbol{\psi}|_{\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}} = \mathbf{grad} \, q. \quad (5.22)$$

Nun wird eine Funktion  $\boldsymbol{w}$  konstruiert, welche an den Rändern mit  $\boldsymbol{\psi}$  übereinstimmen soll. Hierzu wird für  $\mu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  folgendes inhomogenes Poisson-Problem betrachtet:

*Gesucht ist eine Funktion  $\chi \in H^1(\Omega)$  mit:*

$$\begin{aligned} -\Delta \chi &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \chi &= \mu & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Mit dem Satz von Lax-Milgram und einer geeigneten Variationsformulierung lässt sich die eindeutige Lösbarkeit von Problem (5.23) und die stetige Abhängigkeit von der Randbedingung zeigen. Dies impliziert, dass der lineare Operator  $\tilde{\Delta}^{-1} : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}) : \mu \mapsto \chi$  wohldefiniert und beschränkt ist. Es bezeichne  $\tilde{\gamma}$  jenen Spuroperator, welcher

$$\tilde{\gamma} : H^2(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega) : v \mapsto v|_{\partial\Omega}$$

leistet. Es folgt, dass der zusammengesetzte Operator

$$\Delta^{-1} := \begin{cases} H^2(\mathcal{O} \setminus \bar{\Omega}) \rightarrow H^1(\Omega) \\ v \mapsto (\tilde{\Delta}^{-1} \circ \tilde{\gamma})(v) \end{cases}$$

stetig und linear ist. Es sei  $\chi := \Delta^{-1}(q)$ , so gilt:

$$\chi|_{\Gamma_i} = q|_{\Gamma_i} = q_i|_{\Gamma_i} \quad \text{für } i = 0, \dots, p.$$

Somit ist die gesuchte Funktion  $\boldsymbol{w}$  durch

$$\boldsymbol{w} := \mathbf{grad} \, \chi$$

gegeben. Nach Konstruktion gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{w} &= 0, \\ \operatorname{curl} \boldsymbol{w} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

und

$$\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{n} = \mathbf{grad} \, \chi \times \boldsymbol{n} = \mathbf{grad} \, q_i \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{n} \quad \text{auf } \Gamma_i, \, 0 \dots, p.$$

Somit erfüllt die Differenz  $\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{w}$ :

$$\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{w} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\operatorname{div} 0, \Omega).$$

Da die einzelnen  $q_i$ ,  $i = 0, \dots, p$  jeweils nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt sind, muss nun festgestellt werden, ob diese  $p+1$  Konstanten so gewählt werden können, sodass

$$\langle (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, p,$$

erfüllt ist. Diese Problem ist äquivalent dazu eine Funktion  $c$  aus dem Raum<sup>5</sup>

$$L_{p.c.}^2(\mathcal{O} \setminus \overline{\Omega}) := \{f \in L^2(\mathcal{O} \setminus \overline{\Omega}) : f|_{\Omega_i} = \text{konst.}, i = 0, \dots, p\}$$

zu finden, sodass die Funktion  $\mathbf{grad}(\chi + \Delta^{-1}(c))$  alle gewünschten Eigenschaften besitzt.

Es sei  $q \in H^2(\mathcal{O} \setminus \overline{\Omega})$  eine feste und beliebige Funktion, für die (5.22) erfüllt ist. Für  $c \in L_{p.c.}^2(\mathcal{O} \setminus \overline{\Omega})$  sei:

$$\begin{aligned} \chi(c) &:= \Delta^{-1}(q) + \Delta^{-1}(c) \quad \text{und} \\ \boldsymbol{w}(c) &:= \mathbf{grad} \chi(c) = \mathbf{grad} \Delta^{-1}(q) + \mathbf{grad} \Delta^{-1}(c). \end{aligned}$$

Der Ausdruck  $\mathbf{grad} \Delta^{-1}(c)$  soll nun genauer untersucht werden. Es sei  $E := \{\mathbf{grad} \Delta^{-1}(c) : c \in L_{p.c.}^2(\mathcal{O} \setminus \overline{\Omega})\}$ . Für den Raum  $E$  gilt:

$$E \subseteq H(\text{div } 0, \Omega) \cap H_0(\mathbf{curl}, \Omega).$$

Somit ist  $\boldsymbol{w}(c)$  eine Element aus  $H(\text{div } 0, \Omega) \cap H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$ . Für alle divergenzfreien  $L^2$ -Vektorfelder  $\boldsymbol{v}$  folgt aus der Greenschen Formel für  $H(\text{div}, \Omega)$ :

$$\langle \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Gamma_0} = - \sum_{i=1}^p \langle \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i}.$$

Es ist daher sinnvoll die Abbildung

$$T := E \rightarrow \mathbb{R}^p : \boldsymbol{v} \mapsto (\langle \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Gamma_1}, \dots, \langle \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Gamma_p})^T$$

zu betrachten. Wenn gezeigt werden kann, dass  $T$  surjektiv ist, so impliziert dies, dass ein  $c \in L_{p.c.}^2(\mathcal{O} \setminus \overline{\Omega})$  existiert mit

$$\langle \mathbf{grad} \Delta^{-1}(c) \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = \langle (\boldsymbol{\psi} - \Delta^{-1}(q)) \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} \quad \text{für } i = 0, \dots, p,$$

wodurch

$$\langle \boldsymbol{w}(c) \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = \langle \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} \quad \text{für } i = 0, \dots, p$$

folgt. Das Vektorpotential  $\boldsymbol{\phi} := \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{w}(c)$  würde somit alle gewünschten Eigenschaften besitzen. Mit Lemma 5.4.22 folgt die Injektivität des Operators  $T$ . Um die Surjektivität zu zeigen, ist es daher ausreichend zu verifizieren, dass  $\dim E = p$  gilt. Der Raum  $\{\Delta^{-1}(c) : c \in L_{p.c.}^2(\mathcal{O} \setminus \overline{\Omega})\}$  ist ein  $p+1$ -dimensionaler Vektorraum. Dies ist eine Konsequenz der Tatsache, dass  $\dim L_{p.c.}^2(\mathcal{O} \setminus \overline{\Omega}) = p+1$  gilt und  $\Delta^{-1} : L_{p.c.}^2(\mathcal{O} \setminus \overline{\Omega}) \rightarrow H^1(\Omega)$  injektiv ist. Für  $c \in L_{p.c.}^2(\mathcal{O} \setminus \overline{\Omega})$  soll nun gelten:

$$\Delta^{-1}(c) \in \ker \mathbf{grad} \quad \text{und} \quad c|_{\Omega_i} = c_i = \text{konst.} \quad \text{für } i = 0, \dots, p.$$

---

<sup>5</sup>Hier soll *p.c.* für „piecewise constant“ (engl. für „stückweise konstant“) stehen.

Da der Kern von **grad** nur aus konstanten Funktionen besteht, muss nur festgestellt werden, wann die Bedingung  $\Delta^{-1}(c) = konst.$  gilt. Dies ist jedoch genau dann der Fall, wenn

$$c_0 = \dots = c_p = konst.$$

erfüllt ist. Somit ist der Kern von **grad** :  $E \rightarrow L^2(\Omega)$  eindimensional und es folgt die Surjektivität von  $T$ .

Es verbleibt zu zeigen, dass  $\phi$  tatsächlich durch (5.20) charakterisiert ist. Nach Konstruktion erfüllt  $\phi$  die gesuchten Randbedingungen und nach Anmerkung 5.2.9 auch die Differenzialgleichung aus Problem (5.20). Es bleibt nur die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen. Es seien  $\phi$  und  $\tilde{\phi}$  zwei Lösungen. Für die Differenz gilt:

$$\Delta(\phi - \tilde{\phi}) = 0, \tag{5.24}$$

$$\phi - \tilde{\phi} \text{ erfüllt (5.19)}. \tag{5.25}$$

Aus  $\phi - \tilde{\phi} \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega)$  folgt  $\mathbf{curl}(\phi - \tilde{\phi}) \in H_0(\text{div } 0, \Omega)$  (vgl. Anmerkung 5.3.17). Andererseits erfüllt die Rotation der Differenz auch:

$$\mathbf{curl} \mathbf{curl}(\phi - \tilde{\phi}) = -\Delta\phi = 0.$$

Somit gilt:

$$\mathbf{curl}(\phi - \tilde{\phi}) \in H_0(\text{div } 0, \Omega) \cap H(\mathbf{curl} 0, \Omega).$$

Nach Korollar 5.3.21 gilt  $H_0(\text{div } 0, \Omega)^\perp = H(\mathbf{curl} 0, \Omega)$ , wodurch  $\mathbf{curl}(\phi - \tilde{\phi}) = 0$  impliziert wird. Da die Voraussetzungen von Lemma 5.4.22 erfüllt sind, folgt  $\phi - \tilde{\phi} = \mathbf{0}$  und somit die Eindeutigkeit einer Lösung von Problem (5.20).

□

*Anmerkung 5.4.24* Es kann gezeigt werden, dass für das Vektorpotential  $\phi$  aus Proposition 5.4.23 ii) gilt:

$$\phi \in H^1(\Omega),$$

falls  $\Omega$  ein  $C^{1,1}$ -Gebiet ist (vgl. Theorem 3.6, Seite 48 in [GR86]). Dies folgt im Wesentlichen aus der Tatsache, dass die Lösung  $\chi$  von Problem (5.23), unter den geänderten Voraussetzungen aus dem Raum  $H^2(\Omega)$  ist. ◻

Im nächsten Kapitel werden die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst und eine Anwendung vorgestellt.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Anwendung

### 6.1 Zusammenfassung

Für den dreidimensionalen Fall folgt aus Korollar 4.3.6 und Proposition 5.4.23:

**Korollar 6.1.1** (*Helmholtz-Hodge-Zerlegung für  $n = 3$* ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Lipschitz-Gebiet. Jedes  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3$  besitzt die orthogonale Zerlegung:

$$\mathbf{v} = \mathbf{curl} \phi + \mathbf{grad} p,$$

wobei  $\mathbf{curl} \phi \in H^1(\Omega)^3$  gilt, und  $p \in H^1(\Omega)$  bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist. Ist  $\Omega$  einfach zusammenhängend, so existiert genau ein  $\phi \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\operatorname{div} 0, \Omega)$  mit der Eigenschaft:

$$\langle \phi \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, p,$$

sodass obige Zerlegung noch gilt.

In zwei Dimensionen folgt aus Korollar 4.3.6 und Korollar 5.3.14:

**Korollar 6.1.2** (*Helmholtz-Hodge-Zerlegung für  $n = 2$* ) Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Lipschitz-Gebiet. Jedes  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2$  besitzt die orthogonale Zerlegung:

$$\mathbf{v} = \mathbf{curl} \phi + \mathbf{grad} p,$$

wobei  $\phi \in H^1(\Omega)$  gilt, und  $p \in H^1(\Omega)$  bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist. Es kann  $\phi$  so gewählt werden, sodass

$$\phi \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$$

gilt. Dieses  $\phi$  ist dann eindeutig bestimmt.



Natürlich kann man diese Zerlegungen noch weiter untersuchen. So ist es plausibel, dass die Zerlegung regulärer ist, je glatter  $\Omega$  und  $\mathbf{v}$  sind (vgl. Seite 234-239 in [DL90]). Es ist auch möglich, weniger Anforderungen an  $\Omega$  zu stellen. So können unbeschränkte Gebiete mit beschränktem Komplement oder nicht zusammenhängende Mengen betrachtet werden (vgl. Seite 228-234 in [DL90]). Es gilt hierbei zu beachten, dass in diesem Fall jedoch auch Spurtheoreme und andere Hilfsmittel an die geänderten Voraussetzungen angepasst und verallgemeinert werden müssen.

## 6.2 Die Stokes-Gleichung

Es soll die Helmholtz-Hodge-Zerlegung auf ein weiteres Beispiel aus dem Themenbereich der Strömungsmechanik angewendet werden. Wie in Abschnitt 2.1 wird wieder ein homogenes, inkompressibles Fluid betrachtet. Zusätzlich soll jedoch gefordert werden, dass die Strömung stationär und hinreichend langsam ist (dies impliziert, dass der nichtlineare Anteil der substantiellen Ableitung vernachlässigt werden kann). Somit ergibt sich die Stokes-Gleichung zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} p - \nu \Delta \mathbf{v} &= \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit  $\nu := \frac{1}{Re}$  gesetzt wurde. Für nähere Informationen und Details zur Lösungstheorie für die Stokes-Gleichung sei auf Kapitel 1, Abschnitt 5 in [GR86] verwiesen. Folgende Proposition liefert eine Existenzaussage für die Stokes-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen:

**Proposition 6.2.3.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Lipschitz-Gebiet,  $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$ ,  $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\partial\Omega)^n$  mit

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0,$$

und es sei  $L_0^2(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} f \, d\lambda^n = 0\}$ . Dann existiert genau eine Lösung des Problems:

*Gesucht ist ein Paar  $(\mathbf{v}, p) \in H^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$  mit:*

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{grad} p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{g} && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.2}$$

(vgl. Theorem 5.1, Seite 81 in [GR86]).

Sei  $(\mathbf{v}, p)$  eine Lösung der Stokes-Gleichung in drei Dimensionen mit Haftbedingung als Randbedingung (das heißt es wird  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  auf  $\partial\Omega$  betrachtet). Nach Korollar 6.1.1 existiert für  $\mathbf{v}$  genau ein Vektorpotential  $\boldsymbol{\phi} \in H_0(\operatorname{curl}, \Omega) \cap H(\operatorname{div} 0, \Omega)$  mit der Eigenschaft:

$$\langle \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, p.$$

Das Ziel ist es, dieses Vektorpotential als Lösung einer biharmonischen Gleichung zu charakterisieren, welche unabhängig vom Druck  $p$  ist. Da  $\mathbf{curl} \phi \in H^1(\Omega)^3$  gilt, lässt sich aus der Identität

$$-\Delta \psi = -\mathbf{curl} \mathbf{curl} \psi + \mathbf{grad} \operatorname{div} \psi \quad (6.3)$$

schließen, dass  $\Delta \psi$  genau dann ein Element aus dem Raum  $L^2(\Omega)$  ist, wenn  $\operatorname{div} \psi \in H^1(\Omega)$  erfüllt ist. Obige Überlegung und die Eigenschaften von  $\phi$  fließen in die Definition des nächsten Raumes ein, auf dem das gesuchte biharmonische Problem gelöst werden soll:

$$\mathcal{H} := \left\{ \psi \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) : \operatorname{div} \psi \in H^1(\Omega), \mathbf{curl} \psi \in H_0^1(\Omega)^3, \langle \phi \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0, i = 0, \dots, p \right\}.$$

Für  $\phi$  folgt aus der Stokes-Gleichung:

$$-\nu \Delta \mathbf{curl} \phi + \mathbf{grad} p = \mathbf{f} \quad \text{in } H^{-1}(\Omega)^3,$$

wobei  $\operatorname{div} \mathbf{curl} \phi = 0$  automatisch erfüllt ist. Mit (6.3) ergibt sich:

$$\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \phi + \mathbf{grad} p = \mathbf{f} \quad \text{in } H^{-1}(\Omega)^3. \quad (6.4)$$

Für  $\psi \in \mathcal{H}$  folgt:

$$\langle \nu \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \phi, \mathbf{curl} \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega)^3} + \langle \mathbf{grad} p, \mathbf{curl} \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega)^3} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{curl} \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega)^3}.$$

Aus  $\mathbf{curl} \psi \in H_0^1(\Omega)^3$  lässt sich

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \phi, \mathbf{curl} \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega)^3} &= (\mathbf{curl} \mathbf{curl} \phi, \mathbf{curl} \mathbf{curl} \psi) \quad \text{und} \\ \langle \mathbf{grad} p, \mathbf{curl} \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega)^3} &= -(p, \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{curl} \psi}_{=0}) = 0 \end{aligned}$$

schließen. Es sei hier angemerkt, dass dies genau jener Schritt ist, in dem die Abhängigkeit von  $p$  verloren geht. Durch Einsetzen von (6.3) in jede Seite des Skalarproduktes folgt:

$$(\Delta \phi, \Delta \psi) = (\mathbf{curl} \mathbf{curl} \phi, \mathbf{curl} \mathbf{curl} \psi) - (\mathbf{curl} \mathbf{curl} \phi, \mathbf{grad} \operatorname{div} \psi),$$

wobei  $\operatorname{div} \phi = 0$  zu beachten ist. Die Tatsache, dass  $\mathbf{curl} \phi \in H_0^1(\Omega)^3$  gilt, impliziert:

$$(\mathbf{curl} \mathbf{curl} \phi, \mathbf{grad} \operatorname{div} \psi) = \underbrace{\langle \mathbf{curl} \mathbf{grad} \operatorname{div} \psi, \mathbf{curl} \phi, \rangle}_{=0} = 0. \quad (6.5)$$

Da  $\psi \in \mathcal{H}$  beliebig war, folgt, dass für alle  $\psi \in \mathcal{H}$  die Gleichung

$$-\nu \langle \Delta \mathbf{curl} \phi, \mathbf{curl} \psi \rangle = \nu (\Delta \phi, \Delta \psi) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{curl} \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega)^3}$$

erfüllt ist. Somit ist das gesuchte biharmonische Problem gefunden. Im folgenden Korollar ist das Ergebnis zusammengefasst:

**Korollar 6.2.4.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ein einfach zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet,  $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^n$ ,  $(\mathbf{v}, p) \in H^1(\Omega)^3 \times L_0^2(\Omega)$  die eindeutige Lösung der Stokes-Gleichung (6.2) mit

homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Zusätzlich sei  $\phi \in H_0(\mathbf{curl}, \Omega) \cap H(\operatorname{div} 0, \Omega)$  das eindeutig bestimmte Vektorpotential von  $\mathbf{v}$  mit der Eigenschaft:

$$\langle \phi \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, p.$$

Dann ist  $\phi$  als Lösung des folgenden Problems charakterisiert:

*Gesucht ist eine Funktion  $\phi \in \mathcal{H}$  mit:*

$$(\Delta \phi, \Delta \psi) = \langle f, \mathbf{curl} \psi \rangle_{H^{-1}(\Omega)^3} \quad \forall \psi \in \mathcal{H}. \quad (6.6)$$

**Beweis:** Nach den vorangegangenen Überlegungen ist  $\phi \in \mathcal{H}$  eine Lösung des gegebenen Problems. Es verbleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien  $\phi$  und  $\tilde{\phi}$  zwei Lösungen von (6.6). Für die Differenz  $\Phi := \phi - \tilde{\phi}$  gilt:

$$(\Delta \Phi, \Delta \psi) = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Insbesondere ist dies für  $\psi = \Phi$  gültig. Mit (6.3) und (6.5) folgt:

$$0 = (\Delta \Phi, \Delta \Phi) = \underbrace{(\mathbf{curl} \mathbf{curl} \Phi, \mathbf{curl} \mathbf{curl} \Phi)}_{\geq 0} + \underbrace{(\mathbf{grad} \operatorname{div} \Phi, \mathbf{grad} \operatorname{div} \Phi)}_{\geq 0}.$$

Es lässt sich somit schließen, dass

$$\mathbf{curl} \mathbf{curl} \Phi = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{grad} \operatorname{div} \Phi = 0$$

gelten muss. Zusammen mit der Tatsache, dass  $\mathbf{curl} \Phi \in H_0^1(\Omega)^3$  gilt, impliziert dies:

$$0 = (\mathbf{curl} \mathbf{curl} \Phi, \Phi) = (\mathbf{curl} \Phi, \mathbf{curl} \Phi) \quad \text{und} \\ \operatorname{div} \Phi = c = \text{konst..}$$

Des Weiteren lässt sich

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \Phi \, d\lambda^3 = \sum_{i=1}^p \langle \Phi \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0$$

schließen, wodurch sich  $c = 0$  folgern lässt. Zusammenfassend erfüllt  $\Phi$ :

$$\Phi \in H_0(\mathbf{curl} 0, \Omega) \cap H(\operatorname{div} 0, \Omega) \quad \text{und} \quad \langle \Phi \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\Gamma_i} = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, p.$$

Aus Lemma 5.4.22 folgt  $\Phi = 0$  und somit die Eindeutigkeit einer Lösung von (6.6).  $\square$

### 6.3 Abschließende Bemerkung

Natürlich ist es im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, alle Aspekte der Helmholtz-Hodge-Zerlegung zu beleuchten. Am Ende von Abschnitt 6.1 wurde schon erwähnt, dass die Voraussetzungen an  $\Omega$  durchaus weniger restriktiv gewählt werden können. Es seien hier jedoch die Anwendungen besonders hervorgehoben, da diese verdeutlichen, dass die Helmholtz-Hodge-Zerlegung ein wichtiges Werkzeug darstellt, um komplexe Problemstellungen zu vereinfachen. Dies wurde z.B. für die Stokes-Gleichung im vorherigen Abschnitt gezeigt, findet aber auch Anwendung in der Numerik von partiellen Differentialgleichungen (siehe z.B. „splitting methods - operator splitting“).

# Literaturverzeichnis

- [Arn15] ARNOLD, Anton: *Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen*. Vorlesungsskript, Oktober 2015
- [Blu13] BLUEMLINGER, Martin: *Analysis 3*. Vorlesungsskript, 2013
- [CDA02] CARBONE, Luciano ; DE ARCANGELIS, Riccardo: *Unbounded functionals in the calculus of variations*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002
- [Cho69] CHORIN, Alexandre J.: On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations. In: *Math. Comp.* 23 (1969)
- [CM93] CHORIN, Alexandre J. ; MARSDEN, Jerrold E.: *Texts in Applied Mathematics*. Bd. 4: *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1993
- [DL90] DAUTRAY, Robert ; LIONS, Jacques-Louis: *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*. Bd. 3. Springer-Verlag, Berlin, 1990
- [Fli08] FLIESSBACH, Torsten: *Elektrodynamik*. Bd. 5. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2008
- [GR86] GIRAULT, Vivette ; RAVIART, Pierre-Arnaud: *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Bd. 5. Springer-Verlag, Berlin, 1986
- [Jü13] JÜNGEL, Ansgar: *Partielle Differentialgleichung*. Vorlesungsskript, 2013
- [McL00] MCLEAN, William: *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000
- [Nar13] NARDI, Giacomo: *Schauder estimate for solutions of Poisson's equation with Neumann boundary condition*. 2013
- [Neč12] NEČAS, Jindřich: *Direct methods in the theory of elliptic equations*. Springer, Heidelberg, 2012 (Springer Monographs in Mathematics)
- [Sch09] SCHMALTZ, Wolfgang: *The Jordan-Brouwer separation theorem*. [www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Schmaltz.pdf](http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/REUPapers/Schmaltz.pdf), 2009. – Besucht am 1.9.2016

- [WKB14] WORACEK, Harald ; KALTENBÄCK, Michael ; BLÜMLINGER, Martin: *Functional analysis*. Vorlesungsskript, SS 2014
- [Yos80] YOSIDA, Kôsaku: *Functional analysis*. Bd. 123. Sixth. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980