



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

B A C H E L O R A R B E I T

Herleitung, Analyse und Vergleich der Korteweg-de Vries- und der Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.tech. Anton Arnold

durch

David Wörgötter

01529138

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 03.01.2020

David Wörgötter

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Grundlagen und Notationen	4
1.2	Modellierung von Flachwasserwellen	8
2	Die Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung	13
2.1	Existenz von Lösungen der homogenen BBM-Gleichung	13
2.2	Existenz von Lösungen der inhomogenen BBM-Gleichung	21
2.3	Eindeutigkeit und Stabilität klassischer Lösungen der Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung	24
3	Die Korteweg-de Vries-Gleichung	26
3.1	Solitonen	27
3.2	Existenz von Lösungen der KdV-Gleichung	30
3.3	Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten	35
3.4	Inverse Streumethode	36
3.4.1	Die Miura-Transformation	36
3.4.2	Das inverse Streuproblem für die Schrödingergleichung	37
3.4.3	Die inverse Streumethode für die KdV-Gleichung	39
3.5	Die Konstruktion von Solitonenlösungen	43
4	Vergleich von Dispersion und Erhaltungsgesetzen	45
4.1	Dispersionsrelationen und Phasengeschwindigkeiten	45
4.2	Erhaltungsgesetze	48
4.3	Zusammenfassung und abschließende Bemerkungen	52
	Literaturverzeichnis	54

Kapitel 1

Einleitung

Die Korteweg-de Vries-Gleichung wurde als erstes 1877 von *Joseph Boussinesq* untersucht, und dann 1895 von den niederländischen Mathematikern *Diederik Korteweg* und *Gustav de Vries* als Modell für Flachwasserwellen in einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt wiederentdeckt. Flachwasserwellen sind allgemein Wellen, die (im Vergleich zur Wassertiefe) eine große Wellenlänge haben. Beispiele für Flachwasserwellen sind Wellen in seichten Gewässern und Tsunamiwellen auf dem offenen Meer; insofern erscheint es also interessant, sich mit diesem Thema zu beschäftigen. Neben der Modellierung von Flachwasserwellen sind aber auch viele weitere Anwendungen der KdV-Gleichung bekannt, beispielsweise lassen sich mit ihr Phänomene in der Plasmaphysik (wie etwa Ausbreitung von Wellen in kaltem Plasma), oder auch Druckwellen in Flüssigkeits-Gas-Gemischen beschreiben. Genaueres dazu findet sich in [20]; dort sind insbesondere auch Verweise zu weiterführender Literatur zu diesem Thema vorhanden.

Die Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung (teilweise im Englischen auch *regularized-long-wave-equation* genannt) wurde 1972 von *Brooke Benjamin*, *Jerry Bona* und *John Mahony* als Alternative zur KdV-Gleichung vorgestellt. Die drei Mathematiker leiteten die Gleichung im Wesentlichen aus denselben physikalischen Überlegungen her, somit kann auch die BBM-Gleichung etwa als Modell für Flachwasserwellen dienen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen Überblick über die unterschiedlichen Eigenschaften der beiden Gleichungen zu verschaffen. Im ersten Teil wird es um die Herleitung der beiden Gleichungen gehen, um aufzuzeigen, dass sich beide Gleichungen auf dieselben physikalischen Prinzipien stützen. Im zweiten Teil geht es darum, zu zeigen, dass die Anfangswertprobleme zu den beiden Gleichungen im Sinne von Hadamard korrekt gestellt sind. Es wird sich im Zuge dessen herausstellen, dass sich die Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung mathematisch einfacher behandeln lässt. Dafür hat die KdV-Gleichung den Vorteil, dass sich Lösungen zu gegebenen Anfangswerten mithilfe der sogenannten *inversen Streumethode* prinzipiell explizit berechnen lassen. Den Abschluss dieser Arbeit bildet dann ein Vergleich der beiden Gleichungen. Es werden zwei Eigenschaften besprochen, in denen sich die KdV- und die BBM- Gleichung unterscheiden.

Wir werden in diesem Kapitel zunächst einige mathematische Grundlagen und Notationen besprechen, bevor wir zur Herleitung der Korteweg-de Vries- und der Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung kommen.

1.1 Grundlagen und Notationen

In diesem Abschnitt widmen wir uns einigen Definitionen und wiederholen einige bekannte Ergebnisse, die später nützlich sein werden. Bezüglich den gängigen Funktionenräumen halten wir uns an die übliche Notation, d.h. für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne beispielsweise $C(\Omega)$ den Raum der auf Ω stetigen Funktionen, $C_0(\Omega)$ sind die auf Ω stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω , $C^k(\Omega)$ bezeichnet die in Ω k -mal stetig differenzierbaren Funktionen, mit $H^k(\Omega)$ sind die Sobolevräume $W^{k,2}(\Omega)$ gemeint, und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sind die Schwartzfunktionen auf \mathbb{R}^n . Den topologischen Dualraum von $H^k(\Omega)$ wollen wir mit $H^{-k}(\Omega)$ bezeichnen. Einige weitere Funktionenräume definieren wir im Folgenden:

Definition 1.1. Sei $T > 0$ reelle Zahl, X ein Banachraum und $k, l \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren

$$C_T(X) := \{u : [0, T] \rightarrow X \mid u \text{ ist stetig in } [0, T]\},$$

sowie für $1 \leq p < \infty$

$$L_T^p(X) := \{u : (0, T) \rightarrow X \mid u \text{ ist messbar und } \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty\},$$

und

$$L_T^\infty(X) := \{u : (0, T) \rightarrow X \mid u \text{ ist messbar und } \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \|u(t)\|_X < \infty\}.$$

Speziell um im Kapitel 2 die Notation etwas zu vereinfachen wollen wir für $C_T(C_b(\mathbb{R}))$ einfach C_T schreiben ($C_b(\mathbb{R})$ sind die stetigen, beschränkten reellen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm). Weiters werden wir, falls X ein Raum reeller Funktionen ist, etwa für $u \in C_T(X)$ bzw. $u \in L_T^p(X)$, anstatt $u(t)(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) die einfachere Schreibweise $u(x, t)$ verwenden. Speziell für reelle Funktionen in zwei Variablen definieren wir:

Definition 1.2. Sei $T > 0$ eine reelle Zahl und $k, l \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren

$$C_T^{k,l} := \{u \in C_T \mid \partial_x^j \partial_t^m u \in C_T \text{ für alle } 0 \leq j \leq k, 0 \leq m \leq l\},$$

und

$$C_{00} := \{u \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0\},$$

sowie

$$C_{00}^T := \{u \in C_T \mid u(\cdot, t) \in C_{00} \text{ für alle } t \in [0, T]\}.$$

Lemma 1.3. Auf den soeben definierten Funktionenräumen können folgende Normen definiert werden:

$$\begin{aligned} \|u\|_{C_T(X)} &:= \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X, \\ \|u\|_{L_T^p(X)} &:= \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L_T^\infty(X)} &:= \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_X, \\ \|u\|_{C_T^{k,l}} &:= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \|\partial_x^i \partial_t^j u\|_{C_T}. \end{aligned}$$

Mit diesen Normen sind die Räume $C_T(X)$ und $L_T^p(X)$ für $1 \leq p \leq \infty$ Banachräume.

Beweis. Man beachte, dass laut Definition 1.1 der Raum X ein Banachraum ist. Für C_T und $C_T^{k,l}$ überlassen wir den Beweis als Übung. Für $L_T^p(X)$ ($1 \leq p \leq \infty$) verweisen wir z.B. auf [7]. □

Es gilt, vgl. [1], Seite 44:

Lemma 1.4. *Sei X ein reflexiver, separabler Banachraum mit $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und sei $T > 0$ beliebig. Dann gilt:*

- i. $L_T^p(X)$ ist separabel,
- ii. $(L_T^p(X))' = L_T^q(X')$.

Wir setzen in dieser Arbeit grundlegende Kenntnisse in der Theorie der Lebesgue- und Sobolevräume voraus. Einige Ergebnisse wiederholen wir trotzdem. Es gilt folgender wichtiger Einbettungssatz, vgl. [7], Kapitel 9:

Satz 1.5. *Für $k < m - n/2$ gilt*

$$H^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^n),$$

d.h. jede Äquivalenzklasse $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ enthält einen Vertreter, der k -mal stetig differenzierbar ist. Weiters ist die Einbettung von $H^m(\mathbb{R}^n)$ in $C^k(\mathbb{R}^n)$ stetig, d.h. es existiert eine nur von m , n und k abhängige Konstante C , sodass für alle $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ und alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq k$ gilt:

$$\|u\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)| \leq C \|u\|_{H^m}.$$

In einer Dimension gelten folgende Aussagen:

Lemma 1.6. *Seien $u, v \in H^1(\mathbb{R})$. Dann gilt:*

- i. $uv \in H^1(\mathbb{R})$, und $(uv)' = u'v + uv'$, wobei die Ableitung hier im schwachen Sinn zu verstehen ist.
- ii. Es gilt die Gleichung

$$\|u\|_\infty \leq (\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

- iii. Für $u, v \in H^k(\mathbb{R})$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt: $uv \in H^k(\mathbb{R})$.

Beweis. i. Vergleiche [7], Kapitel 9. Es sei erwähnt, dass diese Aussage auch für $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ richtig ist, wenn wir zusätzlich $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ fordern.

ii. Aufgrund Aussage i. folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Lebesgue-integrierbare Funktionen:

$$u^2(x) = \int_{-\infty}^x uu' dx - \int_x^\infty uu' dx \leq \int_{-\infty}^\infty |u||u'| dx.$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt die erste Ungleichung. Die zweite Ungleichung folgt aufgrund der elementaren Regel $2ab \leq a^2 + b^2$. Die dritte Ungleichung ist trivial. Siehe dazu auch [6], Abschnitt 4.

- iii. Ergibt sich wegen $H^k(\mathbb{R}) \subset H^1(\mathbb{R})$ induktiv aus Aussage i. □

Weiters gilt für das Verhalten von L^2 -Funktionen im Unendlichen vgl. [3], Anhang 2:

Lemma 1.7. *Sei $u \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$. Dann folgt $u \in C_{00}$.*

Wir wiederholen weiters einige Definitionen und Ergebnisse, die in den üblichen Standardwerken zur Funktionalanalysis (z.B. [7]) zu finden sind.

Satz 1.8. (*Fixpunktsatz von Banach*): *Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums, und $\phi : A \rightarrow A$ eine Kontraktion; d.h. es existiert ein $\theta \in (0, 1)$, sodass für alle $u, v \in A$ gilt: $\|\phi(u) - \phi(v)\| \leq \theta\|u - v\|$. Dann besitzt ϕ genau einen Fixpunkt x^* und es gilt, dass für alle $u \in A$ die durch $u_0 := u$ und $u_{n+1} := \phi(u_n)$ definierte Folge gegen x^* konvergiert.*

Definition 1.9. (*schwach*-Topologie*): *Sei B ein Banachraum und B' sein topologischer Dualraum. Für jedes $x \in B$ bezeichne ϕ_x das Punktauswertungsfunktional $\phi_x : B' \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto f(x)$. Die schwach*-Topologie auf B' ist als die initiale Topologie bezüglich der Familie $\{\phi_x \mid x \in B\}$ definiert.*

Es gibt viele weiterführende Ergebnisse zur schwachen und zur schwach*-Topologie, z.B. ist B' versehen mit der schwach*-Topologie ein lokalkonvexer Vektorraum. Ein Resultat (vermutlich der wichtigste Satz bezüglich der schwach*-Topologie) möchten wir aber besonders hervorheben:

Satz 1.10. (*von Banach-Alaoglu*): *Sei B ein normierter Raum. Die bezüglich der Operatornorm abgeschlossene Einheitskugel im Dualraum*

$$K = \{f \in B' \mid \|f\| \leq 1\}$$

ist in der schwach-Topologie kompakt.*

Für uns ist speziell eine Folgerung aus dem Satz von Banach-Alaoglu wichtig:

Satz 1.11. *Sei B ein separabler Banachraum und (u_n) eine in B' bezüglich der Operatornorm beschränkte Folge. Dann existiert eine Teilfolge (u_l) von (u_n) und ein Element $u \in B'$, sodass $(u_l) \rightarrow u$ in der schwach*-Topologie.*

Beweis. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist die Einheitskugel in B' , und damit jede bezüglich der Operatornorm abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von B' , schwach*-kompakt. Es bleibt zu zeigen, dass daraus auch schwach*-Folgenkompaktheit folgt. Dies ergibt sich daraus, dass für einen separablen Banachraum die schwach*-Topologie eingeschränkt auf die Einheitskugel metrisierbar ist, vgl. [7], Theorem 3.28. \square

Wir erinnern an die Definition der Faltung in einer Dimension:

Definition 1.12. (*Faltung*): *Es seien f und g zwei reell- oder komplexwertige Funktionen. Die Faltung von f und g ist definiert als*

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy,$$

wann immer dieses Integral existiert.

Für die Faltung gilt Folgendes (vgl. [17]):

Lemma 1.13. *Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und seien $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$. Dann gilt $f * g \in C(\mathbb{R})$.*

Lemma 1.14. *Für $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R})$, $h \in L^1(\mathbb{R})$ gilt $f * h \in L^p(\mathbb{R})$ mit*

$$\|f * h\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|h\|_{L^1}.$$

Lemma 1.15. *Sei $f \in C_0^1(\mathbb{R})$ und g auf \mathbb{R} lokal integrierbar. Dann gilt $f * g \in C^1(\mathbb{R})$ und*

$$(f * g)' = (f') * g.$$

Das obige Standardresultat kann noch etwas erweitert werden. So gilt zum Beispiel auch:

Lemma 1.16. *Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in C_0$ und $g \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ist $f * g$ differenzierbar, und $(f * g)' = (f') * g$.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Es sei als Übung überlassen, zu zeigen, dass aus $f' \in C_0$ die gleichmäßige Stetigkeit von f' folgt. Damit gilt für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq 1$ und für alle $y \in \mathbb{R}$:

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - hf'(x-y)| = \left| \int_0^1 hf'(x+sh-y) - hf'(x-y) ds \right| \leq |h|\varepsilon(|h|),$$

mit $\varepsilon(|h|) \rightarrow 0$ für $|h| \rightarrow 0$. Somit ergibt sich

$$|(f * g)(x+h) - (f * g)(x) - h(f' * g)(x)| \leq |h|\varepsilon(|h|)\|g\|_{L^1}.$$

Also ist $f * g$ an x differenzierbar mit $(f * g)' = f' * g$. □

Wir erinnern an die Fouriertransformation:

Definition 1.17. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ oder $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Die Fouriertransformation von f ist definiert durch:*

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ik \cdot x} dx, \quad k \in \mathbb{R}^n.$$

Es gibt sehr viele Resultate zur Fouriertransformation, wir wollen hier aber nur eines wiedergeben:

Satz 1.18. *Die Fouriertransformation eingeschränkt auf den Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist ein isometrischer Automorphismus. Dieser Automorphismus kann zu einer bijektiven, linearen und isometrischen Abbildung $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden. \mathcal{F} wird auch als Fourier-Plancherel-Operator bezeichnet.*

Mithilfe des Fourier-Plancherel-Operators ist es möglich, eine andere Charakterisierung von Sobolevräumen anzugeben, vgl. [5], Abschnitt 6.4:

Lemma 1.19. *Sei $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |\mathcal{F}u(x)|^2 dx < \infty$$

erfüllt ist. Weiters gilt für $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |\mathcal{F}u(x)|^2 dx \leq C \|u\|_{H^k},$$

wobei C eine nur von n und k abhängige Konstante ist.

Wir bemerken noch, dass es mithilfe dieser Charakterisierung auch möglich ist, Sobolevräume $H^s(\Omega)$ mit $s \in \mathbb{R}$ zu definieren:

Bemerkung 1.20. Sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig. Der Raum $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als die Menge aller $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, für die gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^s |\mathcal{F}u(x)|^2 dx < \infty.$$

Aus Lemma 1.19 folgt, dass für $s \in \mathbb{N}$ die so definierten Räume mit den üblichen Sobolevräumen übereinstimmen.

1.2 Modellierung von Flachwasserwellen

In diesem Abschnitt leiten wir die Korteweg-de Vries-Gleichung und die Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung als Modelle für die Ausbreitung von Flachwasserwellen her.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die KdV-Gleichung herzuleiten, siehe z.B. [3], Abschnitt 1, [4], Kapitel 6 oder [23], Kapitel 1-4. Die letzten beiden Quellen beinhalten insbesondere rigorose Herleitungen von diversen grundlegenden Gleichungen der Hydrodynamik.

Wir werden im Folgenden aber im Wesentlichen die Herleitung der KdV-Gleichung als Modell für Flachwasserwellen aus [8] wiedergeben, da diese relativ wenige hydrodynamische Grundlagen benötigt und somit auch für LeserInnen mit wenig physikalischem Hintergrundwissen verständlich ist.

Die Ausgangssituation ist wie folgt: Wir betrachten einen Kanal mit rechteckigem Querschnitt, welcher mit Wasser gefüllt ist, und eine Welle mit (im Vergleich zur Wassertiefe) großer Wellenlänge, welche sich in diesem Kanal in eine Richtung bewegt, d.h. die Welle bewegt sich parallel zu den Wänden des Kanals fort. Wir nehmen an, dass das Wasser im Kanal wirbelfrei ist. Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Teilchen im Wasser am Ort (x, y, z) zum Zeitpunkt t durch den Einfluss der Welle bewegt, wird durch ein Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z, t) = (v_1(x, y, z, t), v_2(x, y, z, t))$ beschrieben. Die erste Komponente von \vec{v} gibt die Geschwindigkeit in Richtung des Kanals an, die zweite Komponente repräsentiert die Geschwindigkeit, mit der sich das Teilchen vertikal nach oben oder nach unten bewegt. Da sich laut Annahme die Welle parallel zu den Wänden des Kanals fortbewegt, gibt es keine Geschwindigkeitskomponente quer zur Richtung des Kanals. Wir nehmen weiters an, dass \vec{v} unabhängig von y ist, d.h. dass sich das Geschwindigkeitsfeld quer zur Richtung des Kanals nicht ändert. Somit ergibt sich $\vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}(x, z, t) = (v_1(x, z, t), v_2(x, z, t))$.

Da die Flüssigkeit als wirbelfrei angenommen wurde, gilt

$$\text{rot } \vec{v} = 0.$$

Somit existiert ein Potential $\phi(x, z, t)$ mit

$$v_1 = \phi_x \text{ und } v_2 = \phi_z.$$

Die Subskripts stehen hier und im Folgenden für partielle Ableitungen.

Da wir Wasser als inkompressibel annehmen können, ist das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} divergenzfrei, vgl. [4], Kapitel 5. Daraus folgt, dass das Potential die Laplacegleichung erfüllt, da

$$\text{div } \vec{v} = \text{div } (\phi_x, \phi_z) = \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \tag{1.1}$$

gilt. Wir gehen weiters davon aus, dass die vertikale Geschwindigkeit am Boden des Kanals Null ist, d.h.

$$\phi_z(x, 0, t) = 0. \quad (1.2)$$

Wir benötigen noch Randbedingungen, die an der Wasseroberfläche gelten sollen. Das stellt uns vor zwei Probleme: Erstens ist nicht ohne weiteres klar, wie sich die Flüssigkeit an der Oberfläche genau verhalten soll, zweitens wissen wir nicht einmal, wo die Oberfläche ist, denn die lokale Position der Oberfläche wird durch die Welle bestimmt. Aus hydrodynamischen Überlegungen ergeben sich schließlich zwei Gleichungen, die wir als Randbedingungen an der Oberfläche fordern.

Die erste Bedingung an der Oberfläche ist kinematischer Natur. Sie lässt sich wie folgt herleiten, vgl. [2]: Es sei $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ die Trajektorie eines Partikels in der Flüssigkeit und $h(x, t)$ die lokale Wellenhöhe über dem Grund des Kanals am Ort x zum Zeitpunkt t . Angenommen das Partikel treibt auf der Oberfläche der Flüssigkeit dahin. Dann gilt

$$h(x_1(t), t) = x_2(t).$$

Diese Gleichung gilt für alle Partikel, die auf der Oberfläche der Flüssigkeit treiben. Durch differenzieren nach der Zeit t und mit $\partial_t x_1(t) = \phi_x$ und $\partial_t x_2(t) = \phi_z$ erhalten wir die erste Randbedingung an der Oberfläche:

$$h_t + \phi_x h_x = \phi_z \quad \text{für } z = h(x, t). \quad (1.3)$$

Wir nehmen an, dass die Welle eine (im Vergleich zur Wassertiefe) kleine Amplitude hat, und bezeichnen die Höhe der von den Wasserspiegelauslenkungen nicht gestörten Flüssigkeitsschicht mit h_0 . Die zweite Bedingung, die an der Oberfläche der Flüssigkeit gelten soll, lautet:

$$gh + \phi_t + \frac{1}{2} [\phi_x^2 + \phi_z^2] = gh_0 \quad \text{für } z = h(x, t), \quad (1.4)$$

wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Die Herleitung dieser Gleichung ist etwas komplizierter, wir verweisen dazu auf [23], Kapitel 4. Wir gehen nun von der Annahme aus, dass wir das Potential ϕ in der Variable z als Potenzreihe entwickeln können, und erhalten dadurch in Kombination mit den Gleichungen (1.1) und (1.2):

$$\phi(x, z, t) = \phi(x, 0, t) - \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, 0, t) + \frac{z^4}{4!} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}(x, 0, t) + \dots \quad (1.5)$$

Bevor wir beginnen, die Gleichung (1.5) in die Gleichungen (1.3) und (1.4) einzusetzen, transformieren wir das zugrunde liegende Koordinatensystem und gehen in ein System über, das besser zum betrachteten Problem passt. Wir schreiben daher:

$$x = l\tilde{x}, \quad z = h_0\tilde{z}, \quad t = \frac{l}{\sqrt{gh_0}}\tilde{t}, \quad h = h_0(1 + \varepsilon\eta) \quad \phi = \varepsilon l \sqrt{gh_0} \tilde{\phi},$$

wobei l die Länge der betrachteten Welle und $\eta(\tilde{x}, \tilde{t})$ eine Funktion mit Maximum eins sei. Die Zahl ε ist eine Skalierungsgröße, und der Faktor $\sqrt{gh_0}$ ergibt sich daraus, dass dies näherungsweise die Phasengeschwindigkeit von langen Wellen mit kleiner Amplitude ist, wie z.B. in [4], Kapitel 6 gezeigt wird. In diesem skalierten Koordinatensystem hat die von uns betrachtete Welle (die ja als lange Welle mit geringer Amplitude angenommen wurde) Phasengeschwindigkeit eins. Unser Ziel ist es nun, eine Gleichung für die Funktion η abzuleiten.

Wir transformieren die Gleichungen (1.3), (1.4) und (1.5) in die neuen Variablen und erhalten dadurch für (1.3):

$$h_0^2(\eta_t + \varepsilon \tilde{\phi}_x \eta_x) = l^2 \tilde{\phi}_z \quad \text{für } \tilde{z} = 1 + \varepsilon \eta. \quad (1.6)$$

Analog ergibt sich für (1.4) mit $\mu = h_0^2/l^2$:

$$\eta + \tilde{\phi}_t + \frac{\varepsilon}{2} \left[\tilde{\phi}_x^2 + \frac{1}{\mu} \tilde{\phi}_z^2 \right] = 0 \quad \text{für } \tilde{z} = 1 + \varepsilon \eta, \quad (1.7)$$

und für (1.5):

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{\phi}(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) - \frac{\tilde{z}^2}{2!} \mu \tilde{\phi}_{xx}(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) + \frac{\tilde{z}^4}{4!} \mu^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \tilde{\phi}(\tilde{x}, 0, \tilde{t}) + \dots \quad (1.8)$$

Wir werden ab jetzt die Tilde über den neuen Variablen weglassen. Wir setzen (1.8) in (1.6) ein und behalten nur die Terme nullter und erster Ordnung in ε bzw. μ . Dadurch erhalten wir:

$$\eta_t + \phi_{xx} = -\varepsilon(\eta \phi_{xx} + \eta_x \phi_x) + \frac{1}{6} \mu \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \quad \text{für } z = 0. \quad (1.9)$$

In gleicher Weise erhalten wir durch Einsetzen von (1.8) in (1.7):

$$\eta + \phi_t = -\frac{1}{2} \varepsilon \phi_x^2 + \frac{1}{2} \mu \phi_{xxt} \quad \text{für } z = 0. \quad (1.10)$$

Da wir Wellen mit (im Vergleich zur Wassertiefe) großer Wellenlänge und kleiner Amplitude betrachten, können wir davon ausgehen, dass die beiden Faktoren ε und μ klein sind. Betrachten wir zunächst die Grenzfälle $\varepsilon = 0$ bzw. $\mu = 0$. Wenn wir den Faktor μ vernachlässigen, erhalten wir aus (1.9) und (1.10) die beiden Gleichungen

$$\eta_t + \partial_x((1 + \varepsilon \eta)v) = 0 \quad \text{und} \quad \eta_x + v_t + \varepsilon v v_x = 0,$$

wobei $v(x, t) = \phi_x(x, 0, t)$ die horizontale Fließgeschwindigkeit ist. Aus beiden obigen Gleichungen ergeben sich, wenn wir nun den Faktor ε vernachlässigen, die Gleichungen

$$\eta_t + v_x = 0 \quad \text{und} \quad \eta_x + v_t = 0.$$

Vom physikalischen Standpunkt aus gesehen, macht es natürlich keinen Sinn, sowohl μ , als auch ε zu vernachlässigen (es gäbe in dem Fall schlicht keine Welle), doch wir wollen an dieser Stelle auf etwas anderes hinaus: Aus obigem Gleichungssystem ergibt sich, dass für verschwindende Koeffizienten μ und ε sowohl η , als auch v die gewöhnliche eindimensionale Wellengleichung lösen müssen. Für eine nach rechts (also in x -Richtung) laufende Welle erhalten wir als Lösung daher $\eta = f(x - t)$ mit einer C^2 -Funktion f . Analog folgt auch $v = g(x - t)$; dies impliziert allerdings, wie man durch Einsetzen leicht nachrechnet, dass $\eta - v$ konstant ist. Insbesondere gilt daher die Gleichung

$$\eta_t + \eta_x - v_t - v_x = 0. \quad (1.11)$$

Wir können oBdA $\eta - v = 0$ annehmen (der Ansatz $\eta = v + c$ führt ebenfalls zur KdV-Gleichung, allerdings ist die Koordinatentransformation zum Schluss dann komplizierter).

Wir nehmen die Faktoren ε und μ in (1.9) und (1.10) als sehr klein, aber dennoch von Null verschieden an. Wir erwarten von den Gleichungen (1.9) und (1.10), dass sehr kleine Änderungen durch ε und μ die Lösung nicht zu stark ändern. Wir treffen also die Annahmen, dass für die Lösungen η und v von (1.9) und (1.10) gilt:

$$\eta - v = \mathcal{O}(\varepsilon, \mu), \quad \eta_x - v_x = \mathcal{O}(\varepsilon, \mu), \quad \eta_t + v_x = \mathcal{O}(\varepsilon, \mu) \quad \text{und} \quad \eta_x + v_t = \mathcal{O}(\varepsilon, \mu). \quad (1.12)$$

In Analogie zu (1.11) soll auch gelten:

$$\eta_t + \eta_x - v_t - v_x \approx 0. \quad (1.13)$$

Wir sind nun fast am Ziel: Wir ändern die Gleichungen (1.9) und (1.10) um, indem wir (1.10) nach x ableiten und, wie oben schon eingeführt, $v(x, t)$ statt $\phi_x(x, 0, t)$ schreiben:

$$\begin{aligned} \eta_t + v_x &= -\varepsilon(\eta v)_x + \frac{1}{6}\mu \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \\ \eta_x + v_t &= -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2}\mu \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Wenn wir nun die beiden obigen Gleichungen addieren, und auf der linken Seite (1.13) hinzuzählen, erhalten wir auf der linken Seite $2\eta_t + 2\eta_x$. Rechts können wir (1.12) verwenden ($v_t \approx -\eta_x$ bzw. $v \approx -\eta$ und $\eta_x \approx v_x$), und indem wir wieder nur die Terme mit nullter oder erster Ordnung in ε bzw. μ behalten, ergibt sich insgesamt:

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\varepsilon\eta\eta_x + \frac{1}{6}\mu\eta_{xxx} = 0. \quad (1.15)$$

Wir definieren nun:

$$a := \left(-\frac{1}{9\varepsilon}\mu^2\right)^{\frac{1}{5}}, \quad b := \frac{\mu}{6} \left(-\frac{1}{9\varepsilon}\mu^2\right)^{\frac{-3}{5}}, \quad c := -\frac{1}{\mu} \left(-\frac{1}{9\varepsilon}\mu^2\right)^{\frac{2}{5}}, \quad d := \frac{1}{b},$$

denn dann lässt sich die Gleichung (1.15) mittels der linearen Transformation $\tilde{x} = ax$, $u = b\eta + c$, $\tilde{t} = dt$ umformen, und wir erhalten, wenn wir die Tilde über den neuen Koordinaten weglassen:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Obige Gleichung ist die KdV-Gleichung in der Form, in der wir sie in dieser Arbeit behandeln werden (siehe Bemerkung 3.1).

Kommen wir nun zur Herleitung der Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung: In der Herleitung der KdV-Gleichung haben wir in den Schritten von (1.14) auf (1.15) näherungsweise für v_t die Funktion $-\eta_x$ eingesetzt, und die Terme höherer Ordnung in μ bzw. ε verworfen. Setzen wir aber stattdessen für v_x die Funktion $-\eta_t$ ein, erhalten wir durch dieselben Umformungsschritte die Gleichung

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\varepsilon\eta\eta_x - \frac{1}{6}\mu\eta_{xxt} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich mittels einer linearen Transformation $\tilde{x} = ax$, $u = b\eta + c$, $\tilde{t} = dt$ mit den Koeffizienten

$$a := \left(\frac{\mu}{6}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad b := \left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu}{6}\right)^{\frac{-1}{4}}, \quad c := \left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)^{\frac{-1}{2}} \left(\frac{\mu}{6}\right)^{\frac{-1}{4}} - 1, \quad d := \frac{1}{b}$$

umformen. Dadurch erhalten wir, indem wir die Tilde über den neuen Koordinaten wieder weglassen, die *Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung* in ihrer bekannten Form:

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0.$$

Wir sehen also, dass die BBM-Gleichung in analoger Weise aus der Herleitung der KdV-Gleichung folgt, und somit ebenso als Modell für Flachwasserwellen dienen kann. Ein Schwachpunkt der obigen Herleitung ist allerdings, dass wir (1.12) annehmen mussten. Es gibt aber durchaus auch andere Zugänge, um beide Gleichungen rigoros herzuleiten; wir verweisen zum Beispiel auf [3], Abschnitt 2.

Es stellt sich nun die Frage, ob beide Gleichungen überhaupt als mathematisches Modell sinnvoll sind, d.h. ob man für beide Gleichungen die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sicherstellen kann, und ob diese Lösungen stetig von den Anfangswerten abhängen. Mit diesen Fragen werden wir uns in den nächsten beiden Kapiteln beschäftigen. Welches der beiden Modelle für Seichtwasserwellen schlussendlich im Allgemeinen zu bevorzugen ist, ist, soweit dem Autor bekannt, nicht abschließend geklärt. Im Kapitel Vier werden wir jedoch auf zwei Eigenschaften eingehen, in denen sich die KdV- und die BBM-Gleichung wesentlich unterscheiden. In Kapitel 4 wird auch begründet werden, dass zumindest für Anfangswellen mit hochfrequenten Anteilen die BBM-Gleichung als Modell besser geeignet ist, vgl. [3].

Kapitel 2

Die Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir die Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0. \quad (2.1)$$

Wir zeigen, dass das zu dieser Gleichung gehörende Anfangswertproblem unter gewissen Voraussetzungen eindeutig lösbar ist. Zuerst betrachten wir die homogene Gleichung, später werden wir Inhomogenitäten zulassen. Die Beweise für das homogene bzw. inhomogene Problem sind weitgehend analog; der Unterschied zwischen beiden Problemen besteht im Wesentlichen darin, dass wir für eine Lösung u des homogenen Problems stärkere Regularitätsaussagen treffen können. Wir gehen im gesamten Kapitel vor wie in [3].

2.1 Existenz von Lösungen der homogenen BBM-Gleichung

Wir zeigen im Folgenden, dass das Anfangswertproblem für die homogene BBM-Gleichung unter gewissen Voraussetzungen lösbar ist. Die Beweise in diesem Unterabschnitt basieren auf dem Banachschen Fixpunktsatz und der Energiemethode. Sie sind also vom Konzept her sehr typisch für Beweise aus dem Gebiet der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen.

Betrachten wir nun das zur Gleichung (2.1) gehörende AWP für $u : \mathbb{R} \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} &= 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \\ u &= g & (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

wobei g eine gegebene Funktion aus $H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit $g'' \in L^\infty(\mathbb{R})$, und T eine beliebige positive reelle Zahl sei.

Wir müssen noch klären, in welchem Sinn wir eine Lösung des Anfangswertproblems (2.2) verstehen wollen:

Definition 2.1. *Eine klassische Lösung von (2.2) ist eine Funktion $u \in C_T^{2,1}$ mit $u(\cdot, 0) = g$, welche die Gleichung $u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$ für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$ punktweise erfüllt.*

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass für $g \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit $g'' \in L^\infty(\mathbb{R})$ klassische Lösungen von (2.2) existieren. Wir gehen dazu vor wie in [3], Abschnitt 3 und werden zuerst die Gleichung (2.2) in eine Integralgleichung umschreiben, um die Existenz einer Lösung mittels eines Fixpunktsatzes zu zeigen.

Dazu nehmen wir zunächst an, dass wir eine klassische Lösung u von (2.2) zu gegebenen Anfangswerten g hätten. Die Gleichung (2.1) ist dann äquivalent zu

$$u_t - \partial_x^2 u_t = -\partial_x \left(u + \frac{1}{2} u^2 \right).$$

Wir denken uns in der obigen Gleichung u_t als losgelöst von der Funktion u , d.h. wir untersuchen die gewöhnliche Differentialgleichung

$$w - \partial_x^2 w = -\partial_x \left(u + \frac{1}{2} u^2 \right) \quad (2.3)$$

für die Funktion w und ignorieren vorerst, dass w zusätzlich $w = u_t$ erfüllen müsste.

Durch Nachrechnen überzeugt man sich leicht davon, dass die Funktion $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ eine Fundamentallösung des Differentialoperators $L(u) = u - u_{xx}$ ist. Somit erhalten wir als *formale Lösung* von (2.3)

$$w(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\xi|} \partial_\xi \left(u(\xi, t) + \frac{1}{2} u^2(\xi, t) \right) d\xi. \quad (2.4)$$

Dieses Integral existiert, da $e^{-|x|}$ integrierbar, und u und u_x als Element von $C_T^{2,1}$ insbesondere auch stetig und beschränkt sind. Es bleibt noch zu klären, was wir mit dem Begriff *formale Lösung* meinen:

Wäre die Funktion $\partial_\xi \left(u(\xi, t) + \frac{1}{2} u^2(\xi, t) \right) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, so wäre $w(x, t)$ eine distributionelle Lösung von (2.3), vgl. [16]. Da aber nur $\partial_\xi \left(u(\xi, t) + \frac{1}{2} u^2(\xi, t) \right) \in C_T^{1,1}$ gilt, ist nicht so klar, ob, bzw. in welchem Sinne $w(x, t)$ die Gleichung (2.3) löst, daher der Ausdruck *formale Lösung*.

Durch Aufspalten des Integrals in (2.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} w(x, t) &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{-(x-\xi)} \partial_\xi \left(u(\xi, t) + \frac{1}{2} u^2(\xi, t) \right) d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} e^{(x-\xi)} \partial_\xi \left(u(\xi, t) + \frac{1}{2} u^2(\xi, t) \right) d\xi. \end{aligned}$$

Beide Integrale können partiell integriert werden (die Randterme kürzen sich weg bzw. verschwinden, da wir angenommen haben, dass $u \in C_T^{2,1}$, und $e^{-|x|}$ ein Element von C_0 ist), und es folgt

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \left(u(\xi, t) + \frac{1}{2} u(\xi, t)^2 \right) d\xi,$$

mit

$$K(x) := \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}.$$

Wir definieren W als (zeitliche) Stammfunktion von w :

$$W(x, t) := \underbrace{u(x, 0)}_{=g(x)} + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \left(u(\xi, \tau) + \frac{1}{2} u(\xi, \tau)^2 \right) d\xi d\tau. \quad (2.5)$$

Zu einer beliebigen gegebenen klassischen Lösung u des Anfangswertproblems (2.2) mit Anfangswerten g ist die durch (2.5) definierte Funktion $W(x, t)$ eine formale Lösung von (2.1) mit $W(x, 0) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die obigen Überlegungen motivieren folgendes Fixpunktproblem: Gesucht ist eine Funktion $u \in C_T^{2,1}$, welche die Fixpunktgleichung

$$u = Au \tag{2.6}$$

löst, wobei Au definiert ist als:

$$Au(x, t) := g(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi)(u(\xi, \tau) + \frac{1}{2}u(\xi, \tau)^2)d\xi d\tau.$$

Wir werden im Folgenden zeigen, dass dieses Fixpunktproblem eindeutig lösbar ist, und dass die Lösung u eine klassische Lösung des Anfangswertproblems (2.2) ist.

Es gilt, vgl. [3], Abschnitt 3:

Lemma 2.2. *Für jede stetige, beschränkte reelle Funktion g existiert ein $t_0 > 0$ und eine stetige, beschränkte Funktion $u : \mathbb{R} \times [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$, welche für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t_0]$ die Gleichung (2.6) erfüllt, und für die $u(x, 0) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.*

Beweis. Sei $T > 0$ zunächst beliebig. Wir betrachten den Banachraum $(C_T, \|\cdot\|_{C_T})$ (vgl. Definition 1.1). Da $K(x)$ auf \mathbb{R} integrierbar ist, existiert Au für alle $u \in C_T$, und es gilt für alle $u_1, u_2 \in C_T$ und $t \in [0, T]$:

$$Au_1 - Au_2 = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi)(u_1(\xi, \tau) - u_2(\xi, \tau) + \frac{1}{2}(u_1(\xi, \tau)^2 - u_2(\xi, \tau)^2))d\xi d\tau.$$

Wegen $u_1^2 - u_2^2 = (u_1 + u_2)(u_1 - u_2)$ können wir das schreiben als

$$Au_1 - Au_2 = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (u_1(\xi, \tau) - u_2(\xi, \tau))K(x - \xi)(1 + \frac{1}{2}(u_1(\xi, \tau) + u_2(\xi, \tau)))d\xi d\tau.$$

Daraus ergibt sich nun mithilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |Au_1 - Au_2| &\leq \|u_1 - u_2\|_{C_T} \left(1 + \frac{1}{2}\|u_1 + u_2\|_{C_T}\right) \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |K(x - \xi)|d\xi d\tau \\ &= \|u_1 - u_2\|_{C_T} \left(1 + \frac{1}{2}\|u_1 + u_2\|_{C_T}\right)t \\ &\leq \|u_1 - u_2\|_{C_T} \left(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{C_T} + \frac{1}{2}\|u_2\|_{C_T}\right)t. \end{aligned}$$

Durch Supremumbildung auf beiden Seiten folgt

$$\|Au_1 - Au_2\|_{C_T} \leq \|u_1 - u_2\|_{C_T} \left(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{C_T} + \frac{1}{2}\|u_2\|_{C_T}\right)T. \tag{2.7}$$

Wir bemerken an dieser Stelle, dass aus Lemma 1.13 und der Stetigkeit von g folgt, dass die Funktion $Au(x, t)$ stetig in x ist. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $Au(x, t)$ auch stetig in t . Die Abbildung A bildet also stetige Funktionen wieder auf stetige Funktionen ab.

Wenn wir in (2.7) für u_2 die Nullfunktion einsetzen, folgt:

$$\|Au - g\|_{C_T} \leq \|u\|_{C_T} \left(1 + \frac{1}{2}\|u\|_{C_T}\right)T,$$

bzw.

$$\|Au\|_{C_T} \leq \|g\|_\infty + \|u\|_{C_T} \left(1 + \frac{1}{2}\|u\|_{C_T}\right)T. \quad (2.8)$$

Das zeigt, dass wir A als Abbildung auffassen können, die C_T in sich selbst abbildet. Es seien nun T , θ und R so gewählt, dass die Ungleichungen

$$(1 + R)T \leq \theta < 1, \quad (2.9)$$

und

$$\|g\|_\infty \leq (1 - \theta)R, \quad (2.10)$$

erfüllt sind. Eine mögliche Wahl wäre z.B.

$$\theta = 1/2, \quad R = 2\|g\|_\infty \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{2 + 4\|g\|_\infty}.$$

Es bezeichne $K_R(0)$ die abgeschlossene Kugel um Null mit Radius R . Aus (2.8) und (2.9) folgt, dass für alle $u \in K_R(0)$ gilt:

$$\|Au\|_{C_T} \leq \|g\|_\infty + \theta R,$$

und mit (2.10):

$$\|Au\|_{C_T} \leq R.$$

Also bildet A die abgeschlossene Kugel $K_R(0)$ in sich selbst ab. Wegen (2.7) und (2.9) gilt außerdem für alle $u_1, u_2 \in K_R(0)$:

$$\|Au_1 - Au_2\|_{C_T} \leq \theta \|u_1 - u_2\|_{C_T}$$

Somit ist $A|_{K_R(0)}$ eine kontraktive Selbstabbildung und für $t_0 := T$ ergibt sich die eindeutige Lösbarkeit des Fixpunktproblems auf $\mathbb{R} \times [0, t_0]$ durch den Banachschen Fixpunktsatz.

Wir bemerken noch, dass nach Konstruktion für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $u(x, 0) = g(x)$ erfüllt ist. \square

Als nächstes beweisen wir eine Aussage bezüglich der Regularität der oben gefundenen Lösung der Integralgleichung (2.6), vgl. [3], Abschnitt 3:

Lemma 2.3. *Sei g aus $H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit beschränkter zweiter Ableitung und $T > 0$. Dann ist jede Lösung u von (2.6), die in C_T liegt, auch ein Element von $C_T^{2,\infty}$.*

Beweis. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass $Au(x, t)$ in t differenzierbar ist und wir erhalten:

$$u_t = (Au)_t = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \left(u + \frac{1}{2}u^2\right) d\xi$$

Daraus folgt, dass u_t beschränkt und stetig ist (vgl. Lemma 1.13). Da u_t stetig und beschränkt ist, folgt, dass mit u auch die Funktion u^2 in der Zeit stetig differenzierbar ist und ihre Ableitung beschränkt bleibt. Damit folgt, dass die rechte Seite der obigen Gleichung nach t differenzierbar ist, und wir dürfen Differentiation und Integration vertauschen. Es ergibt sich somit:

$$u_{tt} = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) (u_t + uu_t) d\xi.$$

Aus der Beschränktheit von u und u_t folgt damit analog zu oben, dass auch u_{tt} beschränkt und stetig ist. Induktiv folgt, dass alle Zeitableitungen von u existieren, sowie beschränkt und stetig sind.

Kommen wir zu den Ortsableitungen. Nach Voraussetzung ist $g \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit beschränkter zweiter Ableitung. Mit Lemma 1.7 folgt, dass g und g' stetig und beschränkt sind. Durch Aufteilen des Integrationsbereichs an der Stelle $\xi = x$ ergibt sich in analoger Weise zu oben die Existenz der ersten Ortsableitung, und es gilt:

$$u_x = (Au)_x = g'(x) + \int_0^t (u + \frac{1}{2}u^2)d\tau - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x-\xi|}(u + \frac{1}{2}u^2)d\xi d\tau.$$

Es folgt, dass u_x stetig und beschränkt ist, somit können wir folgern, dass in der obigen Gleichung das erste Integral auf der rechten Seite in x stetig differenzierbar ist. Genauso das zweite Integral. Also existiert u_{xx} und wir erhalten:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= g'' + \int_0^t (u + \frac{1}{2}u^2)_x d\tau + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)(u + \frac{1}{2}u^2)d\xi d\tau \\ &= g'' + \int_0^t (u + \frac{1}{2}u^2)_x d\tau + u - g. \end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Ortsableitung stetig und beschränkt. Mit analogen Techniken beweist man induktiv, dass auch die gemischten Orts-Zeit-Ableitungen stetig und beschränkt sind, damit folgt die Aussage des Lemmas. \square

Bemerkung 2.4. *Wir sind nun in der Lage zu zeigen, dass für $g \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit $g'' \in L^\infty(\mathbb{R})$ die gefundene zeitlich lokale Lösung u von (2.6) tatsächlich eine zeitlich lokale klassische Lösung von (2.2) ist: Aus (2.6) folgt unmittelbar $u(\cdot, t) = g$. Aus Lemma 2.3 folgt die nötige Regularität von u . Einsetzen in (2.1) und Nachrechnen ergibt schließlich die Behauptung.*

Unser nächstes Ziel ist es, die zeitlich lokale Lösung u von (2.2) auf beliebig große Zeitintervalle fortzusetzen. Dazu benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 2.5. *Sei $g \in C_{00}$, mit $g' \in C_{00}$ und $g'' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist die in Lemma 2.2 konstruierte Lösung u der Fixpunktgleichung (2.6) mit Existenzintervall $[0, t_0]$ ein Element von $C_{00}^{t_0}$.*

Beweis. Wir skizzieren nur die Beweisidee: In Lemma 2.2 haben wir eine lokale Lösung u von (2.6) mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes konstruiert. Daraus folgt auch, dass wir u darstellen können als

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \tag{2.11}$$

wobei $u_0 := g$ und $u_{n+1} := Au_n$. Man kann nun zeigen, dass aus $u \in C_{00}^{t_0}$ bereits $Au \in C_{00}^{t_0}$ folgt.

Wir zeigen, dass der Vektorraum $C_{00}^{t_0}$ als Unterraum von C_{t_0} abgeschlossen ist: Sei (a_n) eine in der C_{t_0} -Norm konvergente Folge aus $C_{00}^{t_0}$ mit Grenzwert a . Seien $t \in [0, t_0]$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a(x, t) - a_n(x, t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

weitere sei zu diesem n eine Zahl x_0 so gewählt, dass für alle x mit $|x| \geq x_0$ gilt:

$$|a_n(x, t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt für alle x mit $|x| \geq x_0$:

$$|a(x, t)| \leq |a_n(x, t)| + |a(x, t) - a_n(x, t)| < \varepsilon.$$

Da $t \in [0, t_0]$ beliebig war, folgt die Abgeschlossenheit von $C_{00}^{t_0}$. Wenn wir g in der Zeit konstant fortsetzen, können wir g als Element von $C_{00}^{t_0}$ auffassen (vgl. Lemma 1.7), und wegen (2.11) folgt $u \in C_{00}^{t_0}$. Der Beweis für die Ableitungen folgt analog mithilfe von Lemma 2.3. Für nähere Details dazu verweisen wir z.B. auf [3], Seite 61. \square

Mit diesen Voraussetzungen können wir zeigen, dass die H^1 -Norm eine Erhaltungsgröße der BBM-Gleichung ist, vgl. [3], Abschnitt 1 und 3:

Lemma 2.6. *Sei $g \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit $g'' \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $T > 0$ beliebig. Sei $u \in C_T^{2,1} \cap C_{00}^T$ eine klassische Lösung der Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung (2.1). Dann gilt für alle $t \in [0, T]$:*

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|g\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Beweis. Wir multiplizieren die BBM-Gleichung (2.1) mit u , und integrieren über das Intervall $[-R, R]$ ($R > 0$ beliebig). Daraus ergibt sich

$$\int_{-R}^R uu_t + uu_x + u^2u_x - uu_{xt} dx = 0.$$

Das Integral existiert dabei sicher, da u und alle im Integral auftretenden partiellen Ableitungen von u stetig sind. Da $uu_x = \frac{1}{2}(u^2)_x$ und $u^2u_x = \frac{1}{3}(u^3)_x$ erhalten wir in obiger Gleichung mit partieller Integration im letzten Summanden

$$\int_{-R}^R uu_t + u_xu_{xt} dx + \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - uu_{xt} \right]_{-R}^R = 0.$$

Durch Integration in der Zeit über das Intervall $[0, T]$ und Anwendung des Satzes von Fubini folgt

$$\int_{-R}^R u^2 + u_x^2 dx - \int_{-R}^R g^2 + g_x^2 dx = -2 \int_0^T \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - uu_{xt} \right]_{-R}^R dt.$$

Die Integrale existieren dabei, da $g \in C^2(\mathbb{R})$ und nach Lemma 2.3 sowohl $u(\cdot, t)$ als auch $u_x(\cdot, t)$ und $u_{xt}(\cdot, t)$ auf \mathbb{R} beschränkt sind.

Wegen $g \in H^1(\mathbb{R})$ ist das zweite Integral auf der linken Seite für $R \rightarrow \infty$ durch $\|g\|_{H^1(\mathbb{R})}^2$ beschränkt. Wegen $u, u_{xt} \in C_T$ ist auch das rechte Integral beschränkt für $R \rightarrow \infty$. Da im ersten Integral auf der linken Seite der Integrand nichtnegativ ist, folgt also mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 + u_x^2 dx$ existiert, und es gilt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 + u_x^2 dx - \int_{-\infty}^{\infty} g^2 + g_x^2 dx = -2 \int_0^T \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - uu_{xt} \right]_{-\infty}^{\infty} dt.$$

Nach Lemma 2.5 gilt $u, u_{xt} \in C_{00}^T$, daher ist der Integrand auf der rechten Seite Null, somit erhalten wir, dass das Integral auf der rechten Seite gleich Null ist. Es gilt daher für alle $t \in [0, T]$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)^2 + u_x(x, t)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} g^2 + g_x^2 dx.$$

\square

Wir haben bisher die Existenz einer zeitlich lokalen Lösung u des AWP (2.2) auf einem Intervall $[0, t_0]$ gezeigt. Da $u(\cdot, T) \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ (Lemma 2.6) und $u_{xx}(\cdot, T)$ beschränkt ist (Lemma 2.3), können wir im AWP (2.2) die Funktion g durch $u(\cdot, T)$ ersetzen und die Lösung von $[0, T]$ weiter auf $[0, T + T_2]$ fortsetzen, danach auf $[0, T + T_2 + T_3]$ usw. Um tatsächlich die Existenz für beliebige Vorwärtszeiten sicherzustellen, müssen wir noch begründen, dass die Folge der so gefundenen T_n durch eine positive Konstante nach unten beschränkt ist, denn dann divergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

sicherlich.

Dazu sehen wir zurück in den Beweis von Lemma 2.2: Eine mögliche Wahl von T war

$$T := \frac{1}{2 + 4\|g\|_{\infty}}.$$

Für T_n können wir daher also

$$T_n := \frac{1}{2 + 4\|u(\cdot, T_{n-1})\|_{\infty}}$$

wählen.

Dass die so definierten T_n durch eine positive Konstante nach unten beschränkt sind, ist offensichtlich äquivalent dazu, dass die Funktionen $u(\cdot, T_n)$ gleichmäßig in der Supremumsnorm beschränkt sind. Aus Lemma 2.6 folgt, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\|u(\cdot, T_k)\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|g\|_{H^1(\mathbb{R})}$. Für Funktionen aus $H^1(\mathbb{R})$ gilt aber nach Lemma 1.6:

$$\|u\|_{\infty} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Also ist die Folge der T_n durch eine positive Zahl nach unten beschränkt und wir können die in Lemma 2.2 gefundene lokale Lösung auf jedes beliebige Zeitintervall fortsetzen. Zusammengefasst haben wir also bisher in diesem Abschnitt folgendes Resultat aus [3], Abschnitt 3 wiederholt:

Satz 2.7. *Sei $g \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit $g'' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ und $T > 0$ beliebig. Dann hat das AWP (2.2) eine klassische Lösung $u \in C_T^{2,\infty} \cap C_{00}^T$. Zusätzlich gilt $\|u(\cdot, t)\|_{H^1} = \|g\|_{H^1}$.*

Weiters gilt folgendes Resultat, vgl. [6], Abschnitt 3:

Korollar 2.8. *Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig und $g \in H^k(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit $g'' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$. Sei weiters $T > 0$ beliebig und sei u die im Beweis von Lemma 2.2 konstruierte Lösung von (2.2). Dann gilt $u \in L_T^{\infty}(H^k(\mathbb{R}))$.*

Beweis. Die Funktion u erfüllt für $x \in \mathbb{R}$, $0 < t < T$ die Fixpunktgleichung

$$u(x, t) = g(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \left\{ u(y, \tau) + \frac{1}{2} u(y, \tau)^2 \right\} dy d\tau$$

mit

$$K(x) := \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}.$$

Wir zeigen die Aussage des Korollars mittels vollständiger Induktion nach k . Der Induktionsanfang ($k = 1$) folgt aus Satz 2.7. Für den Induktionsschritt sei $1 \leq j < k$ und $u \in L_T^{\infty}(H^j(\mathbb{R}))$. Analog wie im Beweis zum Lemma 2.3 folgt

$$\partial_x^{j+1} u(x, t) = g^{(j+1)}(x) + \int_0^t \partial_x^j (u + \frac{1}{2} u^2) d\tau - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-y|} \partial_y^j (u + \frac{1}{2} u^2) dy d\tau,$$

wobei wir im letzten Integral Lemma 1.16 verwendet haben. Da mit u auch u^2 ein Element von $L_T^\infty(H^j(\mathbb{R}))$ ist (siehe Lemma 1.6), folgt die Aussage. \square

Es gilt auch folgendes Ergebnis für u_t , vgl. [6], Abschnitt 3:

Korollar 2.9. *Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig und $g \in H^k(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit $g'' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Sei weiters $T > 0$ beliebig und sei u die im Beweis von Lemma 2.2 konstruierte Lösung von (2.2). Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}$: $\partial_t^j u \in L_T^\infty(H^{k+1}(\mathbb{R}))$.*

Beweis. Aus Lemma 2.3 wissen wir:

$$u_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)(u + \frac{1}{2}u^2) dy = K * (u + \frac{1}{2}u^2),$$

wobei K wie im Beweis von Korollar 2.8 sei. Wegen

$$\widehat{K}(k) = \frac{ik}{1+k^2}$$

gilt:

$$\mathcal{F}u_t = \frac{ik}{1+k^2} \mathcal{F}(u + \frac{1}{2}u^2).$$

Somit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2) |\mathcal{F}u_t(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{1+k^2} |\mathcal{F}(u + \frac{1}{2}u^2)(k)|^2 dk \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(u + \frac{1}{2}u^2)(k)|^2 dk.$$

Aufgrund von Lemma 1.6 gilt, dass mit u auch u^2 in $L_T^\infty(H^1(\mathbb{R}))$ liegt. Da \mathcal{F} isometrisch ist, erhalten wir für fast alle $t \in [0, T]$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(u(\cdot, t) + \frac{1}{2}u(\cdot, t)^2)(k)|^2 dk = \|u(\cdot, t) + \frac{1}{2}u(\cdot, t)^2\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \|u + \frac{1}{2}u^2\|_{L_T^\infty(H^1)}^2 < \infty.$$

Mit Satz 1.19 folgt $u_t \in L_T^\infty(H^1(\mathbb{R}))$. Wegen

$$\partial_t^j u = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \partial_t^j (u + \frac{1}{2}u^2) dy$$

für alle $j = \{1, \dots, k\}$ folgt induktiv die Aussage des Lemmas. \square

Bemerkung 2.10. *Für $k \geq 2$ können die beiden obigen Korollare verschärft werden; es gilt dann $u \in C_T(H^k(\mathbb{R}))$ und $\partial_t^j u \in C_T(H^{k+1}(\mathbb{R}))$ für alle $j \in \mathbb{N}$ (siehe auch [6], Lemma 1).*

2.2 Existenz von Lösungen der inhomogenen BBM-Gleichung

Nachdem wir im oberen Abschnitt das homogene Anfangswertproblem für die Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung behandelt haben, wenden wir uns nun dem Anfangswertproblem mit einer Inhomogenität $f(x, t)$ zu. Betrachten wir also das Problem

$$\begin{aligned} u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} &= f(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \\ u &= g & (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

wobei $g \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit $g'' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $T > 0$ beliebig und $f \in C_T \cap C_T(L^2(\mathbb{R}))$ sei. Im Folgenden stützen wir uns auf [3], Abschnitt 3. Wie im Abschnitt über die homogene Gleichung möchten wir (2.12) in ein Fixpunktproblem umschreiben. Wir können die Differentialgleichung $u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = f(x, t)$ formal umformen zu:

$$u_t - \partial_x^2 u_t = -\partial_x(u + \frac{1}{2}u^2) + f.$$

Eine analoge Vorgangsweise wie im vorigen Abschnitt führt dann auf folgendes Fixpunktproblem:

Gesucht ist $u : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(x, t) = g(x) + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi)(u(\xi, \tau) + \frac{1}{2}u(\xi, \tau)^2)d\xi d\tau + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x-\xi|} f(\xi, \tau)d\xi d\tau,$$

bzw., wenn wir mit Au die ersten beiden Terme auf der rechten Seite und mit Cf den letzten Summanden bezeichnen:

$$u = Au + Cf. \quad (2.13)$$

In Analogie zu Lemma 2.2 gilt:

Lemma 2.11. *Für jede stetige, beschränkte reelle Funktion g und jedes $f \in C_T$ existiert ein $t_0 > 0$ und eine stetige, beschränkte Funktion $u : \mathbb{R} \times [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$, die für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t_0]$ die Gleichung (2.13) erfüllt, und für die $u(x, 0) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.*

Beweis. Der Beginn verläuft weitestgehend analog wie der Beweis zu Lemma 2.2. Dort mussten, um den Banachschen Fixpunkt anwenden zu können, die Bedingungen (2.9) und (2.10) erfüllt sein. Ausgehend von der Fixpunktgleichung (2.13) führt eine analoge Vorgangsweise wie im Beweis zu Lemma 2.2 einerseits auf Bedingung (2.9), andererseits auf die Bedingung

$$\|g\|_\infty + \|Cf\|_{C_T} \leq (1 - \theta)R. \quad (2.14)$$

Wir bemerken, dass, da $e^{-|x|} \in L^1(\mathbb{R})$ und f nach Voraussetzung beschränkt ist, Cf stetig ist (Lemma 1.13), und wegen $\|Cf\|_{C_T} \leq t_0\|f\|_{C_T}$ tatsächlich ein Element von C_T ist. Wir müssen noch begründen, dass diese Bedingungen erfüllbar sind; eine mögliche Wahl für R , T und θ wäre z.B. $\theta = 0.5$, $R = 2(\|g\|_\infty + \|Cf\|_{C_T})$ und

$$T = \frac{1}{2 + 4(\|g\|_\infty + \|Cf\|_{C_T})}.$$

Die Aussage des Lemmas ergibt sich dann analog wie in Lemma 2.2 mit $t_0 := T$ und dem Banachschen Fixpunktsatz. \square

Gleich wie in Lemma 2.3 und Bemerkung 2.4 folgt, dass für $g \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit $g'' \in L^\infty(\mathbb{R})$ die lokale Lösung u von (2.13) ein Element von $C_T^{2,1}$ ist, und das Anfangswertproblem (2.2) im klassischen Sinn löst.

Um die Existenz einer Lösung für beliebige Zeitintervalle zu beweisen, müssen wir noch zeigen, dass die gefundene lokale Lösung beliebig weit in der Zeit fortsetzbar ist. Dazu begründen wir zunächst, dass für alle $t \in (0, T)$ die Funktion $Cf(x, t)$ ein Element von C_{00} ist:

Lemma 2.12. *Für $f \in C_T(L^2(\mathbb{R})) \cap C_T$ gilt: Für alle $t \in [0, T]$ sind die Funktionen $Cf(\cdot, t)$, $(Cf)_x(\cdot, t)$, $(Cf)_t(\cdot, t)$ und $(Cf)_{xt}(\cdot, t)$ Elemente von C_{00} .*

Beweis. Wir erinnern an die Definition von Cf :

$$Cf(x, t) := \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-\xi|} f(\xi, \tau) \, d\xi d\tau.$$

Aus Lemma 1.14 folgt, dass die Funktion

$$k(x, t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-\xi|} f(\xi, t) \, d\xi$$

für jedes $t \in [0, T]$ in $L^2(\mathbb{R})$ liegt und für alle $t \in [0, T]$ die Ungleichung

$$\|k(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|f\|_{C_T(L^2)}$$

erfüllt. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und dem Satz von Fubini folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t k(x, \tau) \, d\tau \right)^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} t \int_0^t k(x, \tau)^2 \, d\tau dx \leq t^2 \|f\|_{C_T(L^2)}^2 < \infty.$$

Also ist für jedes fixe $t \in [0, T]$ die Funktion $Cf(\cdot, t)$ in $L^2(\mathbb{R})$. Da $f \in C_T$ ist, kann man wie in Lemma 2.3 zeigen, dass für alle $t \in [0, T]$ die Funktion $Cf(\cdot, t)$ in $C^1(\mathbb{R})$ liegt. Damit folgt die Aussage für Cf aus Lemma 1.7. Für $(Cf)_x$, $(Cf)_t$ und $(Cf)_{xt}$ funktioniert der Beweis analog, wenn man bedenkt, dass man Differentiation nach x mit den Integralen vertauschen kann; vgl. auch den Beweis von Lemma 2.3. □

In Analogie zu Lemma 2.5 gilt für die lokale Lösung u mit Existenzintervall $[0, t_0]$:

Lemma 2.13. *Sei $f \in C_T \cap C_T(L^2(\mathbb{R}))$ und $g \in C_{00}$ mit $g' \in C_{00}$. Dann gilt für alle $t \in [0, t_0]$: $u(\cdot, t)$, $u_x(\cdot, t)$, $u_t(\cdot, t)$ und $u_{xt}(\cdot, t)$ sind Elemente von C_{00} .*

Beweis. Wir geben nur die Beweisidee: Gleich wie bei Lemma 2.5; sei dazu $t \in [0, t_0]$ beliebig. Man kann zeigen, dass für $u(\cdot, t) \in C_{00}$ auch $Au(\cdot, t)$ in C_{00} liegt. Wegen Lemma 2.12 folgt damit, dass auch $Au(\cdot, t) + Cf(\cdot, t)$ in C_{00} liegt, und da

$$V := \{u \in C_T \mid u(\cdot, t) \in C_{00} \text{ für alle } t \in [0, t_0]\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von C_{t_0} ist, folgt die Aussage. □

Es gilt sogar noch mehr, wie folgendes Lemma zeigt:

Lemma 2.14. *Sei $f \in C_T \cap C_T(L^2(\mathbb{R}))$ und $g \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit $g'' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt $u(\cdot, t) \in H^1(\mathbb{R})$ für alle $t \in [0, t_0]$.*

Beweis. vgl. [3], Abschnitt 4. □

In Lemma 2.11 haben wir die Existenz einer zeitlich lokalen Lösung u des inhomogenen Anfangswertproblems (2.12) gezeigt. Wir möchten diese Lösung in der Zeit von $[0, t_0]$ auf $[0, T]$ fortsetzen; dazu benötigen wir eine Abschätzung der C_{t_0} -Norm von u :

Lemma 2.15. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.14 gilt für die zeitlich lokale Lösung u der inhomogenen BBM-Gleichung:*

$$\|u\|_{C_{t_0}} \leq \|g\|_{H^1} + \|f\|_{L_T^2} T.$$

Beweis. Durch Multiplikation der Gleichung $u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = f$ mit u und anschließender Integration in x von $-R$ bis R erhalten wir:

$$\int_{-R}^R uu_t + uu_x + u^2u_x - uu_{xxt} dx = \int_{-R}^R uf dx.$$

Durch partielle Integration im letzten Term des Integranden auf der linken Seite, dem Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ und Lemma 2.13 ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{H^1}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} uf dx. \quad (2.15)$$

Wir bemerken, dass alle Ausdrücke in der obigen Gleichung wohldefiniert sind, da laut Lemma 2.14 $u \in H^1(\mathbb{R})$ ist. Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt daraus:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{H^1}^2 \leq \|u(\cdot, t)\|_{L^2} \|f\|_{L_T^2} \leq \|u(\cdot, t)\|_{H^1} \|f\|_{L_T^2}.$$

Durch eine Umformung erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{H^1} \leq \|f\|_{L_T^2}.$$

Daraus folgt zusammen mit Lemma 1.6 für alle $t \in [0, t_0]$:

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty} \leq \|u(\cdot, t)\|_{H^1} \leq \|g\|_{H^1} + \|f\|_{L_T^2} t. \quad (2.16)$$

Somit erhalten wir insgesamt:

$$\|u\|_{C_{t_0}} \leq \|g\|_{H^1} + \|f\|_{L_T^2} T, \quad (2.17)$$

und damit die Aussage des Lemmas, vgl. auch [3], Abschnitt 3. □

Mit dieser Abschätzung für $\|u\|_{C_T}$ können wir die lokale Lösung analog wie im Abschnitt zur homogenen Gleichung von $[0, t_0]$ auf ein beliebig großes endliches Zeitintervall $[0, T]$ fortsetzen, und haben somit folgendes Ergebnis bewiesen, vgl. [3], Theorem 2:

Satz 2.16. *Sei $g \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit $g'' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $f \in C_T \cap C_T(L^2(\mathbb{R}))$ und $T > 0$ beliebig. Dann hat das AWP (2.12) eine klassische Lösung $u \in C_T^{2,1}$, mit $u(\cdot, 0) = g(\cdot)$. Zusätzlich gilt für alle $t \in [0, T]$, dass $u(\cdot, t)$ ein Element von $H^1(\mathbb{R}) \cap C_0$ ist.*

Aus Ungleichung (2.16) folgt auch unmittelbar $u \in L_T^\infty(H^1(\mathbb{R}))$. Das kann noch folgendermaßen verschärft werden:

Lemma 2.17. *Für die Lösung u aus Satz 2.16 gilt: $u \in C_T(H^1(\mathbb{R}))$.*

Für den Beweis dieser Aussage verweisen wir auf [3], Abschnitt 3.

2.3 Eindeutigkeit und Stabilität klassischer Lösungen der Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung

In den vorigen Abschnitten haben wir uns mit der Existenz klassischer Lösungen für das homogene bzw. inhomogene Anfangswertproblem der BBM-Gleichung beschäftigt. Nun wollen wir uns mit der Frage der Eindeutigkeit von klassischen Lösungen der AWP (2.2) bzw. (2.12) auseinandersetzen. Es mag zunächst befremdlich wirken, uns mit Eindeutigkeit noch zu beschäftigen, denn immerhin haben wir in den Existenzbeweisen den Banachschen Fixpunktsatz verwendet, welcher bekanntlich einen eindeutigen Fixpunkt liefert. Allerdings haben wir, als wir die Differentialgleichung in eine Fixpunktgleichung überführt haben, eine gewöhnliche Differentialgleichung formal gelöst (beim homogenen Problem zum Beispiel war das (2.3)). Diese ohnehin nur formale Lösung erhebt keinen Anspruch auf Eindeutigkeit, daher wäre es denkbar, dass eine etwaige andere Lösung dieser Gleichung auf eine andere klassische Lösung der BBM-Gleichung führt. Dass dies nicht der Fall ist, wollen wir jetzt analog wie in [3], Abschnitt 4 beweisen:

Satz 2.18. *Seien $u_1, u_2 \in C_T(H^1(\mathbb{R})) \cap C_T^{2,1}$ zwei klassische Lösungen des Anfangswertproblems (2.2) bzw. (2.12). Dann gilt $u_1 = u_2$.*

Beweis. Wir setzen u_1 und u_2 in die Gleichung (2.2) bzw. (2.12) ein und subtrahieren beide Gleichungen. Daraus ergibt sich mit $w := u_1 - u_2$:

$$w_t + w_x + \frac{1}{2}((u_1 + u_2)w)_x - w_{xxt} = 0.$$

Aufgrund der Voraussetzungen ist in der linken Seite der obigen Gleichung jeder Term stetig und für beliebige $t \in [0, T]$ in x auf ganz \mathbb{R} beschränkt. Daher können wir die Gleichung mit w multiplizieren und im Ort von $-R$ bis R integrieren, und erhalten:

$$\int_{-R}^R ww_t + ww_x + \frac{1}{2}w\{(u_1 + u_2)w\}_x - ww_{xxt} dx = 0.$$

Aufgrund der Voraussetzungen an u_1 und u_2 ist partielle Integration in den letzten beiden Termen erlaubt und wir erhalten:

$$\int_{-R}^R ww_t + w_x w_{xt} dx - \frac{1}{2} \int_{-R}^R (u_1 + u_2)w w_x dx + \left[\frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{2}(u_1 + u_2)w^2 - ww_{xt} \right]_{-R}^R = 0. \quad (2.18)$$

Da sowohl $u_1(\cdot, t)$, als auch $u_2(\cdot, t)$ für alle $t \in [0, T]$ im Unendlichen verschwinden (Lemma 1.7), folgt, dass der dritte Term auf der rechten Seite gegen Null konvergiert, wenn R gegen unendlich geht. Wegen

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (u_1 + u_2)w w_x dx \right| \leq \frac{1}{2} \|u_1 + u_2\|_{C_T} \|w\|_{H^1}^2 \quad (2.19)$$

folgt, dass das zweite Integral in (2.18) für $R \rightarrow \infty$ konvergiert. Somit muss auch das erste Integral in (2.18) konvergieren. Aufgrund der vorausgesetzten Regularität der Lösungen können wir im ersten Integral Differentiation nach t und Integration vertauschen, und es folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ww_t + w_x w_{xt} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{H^1}^2.$$

Schlussendlich erhalten wir also aus (2.18) und der Dreiecksungleichung:

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{H^1}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_1\|_{C_T} + \|u_2\|_{C_T} \|w\|_{H^1}^2.$$

Mit dem Lemma von Gronwall (vgl. [16], Seite 105) folgt dann

$$\|w(\cdot, t)\|_{H^1}^2 \leq \|w(\cdot, 0)\|_{H^1}^2 \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t (\|u_1\|_{C_T} + \|u_2\|_{C_T}) d\tau\right). \quad (2.20)$$

Da u_1 und u_2 aber zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich sind, gilt $w(\cdot, 0) = 0$ und damit $w = 0$. \square

Wir bemerken noch, dass die Ungleichung (2.20) für alle klassischen Lösungen $u_1, u_2 \in C_T(H^1(\mathbb{R})) \cap C_T^{2,1}$ der BBM-Gleichung (2.1) gilt, unabhängig davon, ob sie zum Zeitpunkt $t = 0$ die selben Anfangswerte annehmen oder nicht.

Zum Abschluss dieses Kapitels geben wir noch einen Satz, der besagt, dass die Lösung u des Anfangswertproblems (2.12) stetig von den Anfangswerten g und der rechten Seite f abhängt, und somit die Lösungen der Benjamin-Bona-Mahony Gleichung auch stabil sind:

Satz 2.19. *Sei $T > 0$ beliebig. Weiters sei der Raum*

$$W := (C_T \cap C_T(L^2(\mathbb{R}))) \times (H^1(\mathbb{R}) \cap C_b^2(\mathbb{R}))$$

mit der Norm $\|(f, g)\|_W := \|f\|_{C_T(L^2)} + \|g\|_{H^1}$ versehen. $C_b^2(\mathbb{R})$ bezeichnet dabei den Raum der auf \mathbb{R} zweimal stetig differenzierbaren Funktionen mit beschränkter zweiter Ableitung. Dann gilt: Die Abbildung $U : W \rightarrow C_T(H^1(\mathbb{R}))$, die einem Element $(g, f) \in W$ die eindeutige Lösung $u \in C_T(H^1(\mathbb{R}))$ von (2.12) zuordnet, ist stetig.

Beweis. Wir beweisen nur einen Teil des Satzes, nämlich dass U im ersten Argument stetig ist, bzw. anders ausgedrückt, dass die Lösung u stetig von den Anfangswerten g abhängt. Für den Rest des Satzes verweisen wir auf [3], Abschnitt 4.

Seien dazu $f \in C_T \cap C_T(L^2(\mathbb{R}))$ und $g_1, g_2 \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$. Seien weiters $u_1, u_2 \in C_T(H^1(\mathbb{R}))$ die eindeutigen Lösungen des Anfangswertproblems (2.12) zu den Anfangswerten $u_1(\cdot, 0) = g_1$ und $u_2(\cdot, 0) = g_2$.

Wir wollen zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass aus $\|g_1 - g_2\|_{H^1} < \delta$ folgt, dass $\|u_1 - u_2\|_{C_T(H^1)} < \varepsilon$ gilt. Aus $\|g_1 - g_2\|_{H^1} < \delta$ folgt mit Ungleichung (2.17) und der Dreiecksungleichung:

$$\|u_1\|_{C_T} + \|u_2\|_{C_T} \leq \|g_1\|_{H^1} + \|g_2\|_{H^1} + 2\|f\|_{L_T^2} T \leq 2\|g_1\|_{H^1} + 2\|f\|_{L_T^2} T + \delta.$$

Die rechte Seite der obigen Ungleichung (wir bezeichnen sie im Folgenden mit c) ist unabhängig von g_2 , daraus folgt mit (2.20):

$$\|u_1 - u_2\|_{C_T(H^1)} \leq \delta \exp\left(\frac{1}{4} cT\right),$$

woraus die behauptete Aussage folgt. \square

Kapitel 3

Die Korteweg-de Vries-Gleichung

Wir beginnen nun mit einer kleinen Einführung in die Lösungstheorie der Korteweg-deVries-Gleichung. Die KdV-Gleichung hat die interessante Eigenschaft, dass sie spezielle Lösungen, sogenannte *Solitonen* zulässt. Zuerst werden wir in diesem Kapitel den Begriff *Soliton* motivieren und definieren.

Danach wird es unser Ziel sein, zu zeigen, dass - unter gewissen Bedingungen an die Anfangswerte - eindeutige klassische Lösungen der KdV-Gleichung existieren. Die Eindeutigkeit klassischer Lösungen ist relativ leicht zu beweisen, doch der Existenzbeweis ist etwas trickreich und stützt sich sehr auf die Ergebnisse des vorherigen Kapitels.

Die KdV-Gleichung hat eine weitere interessante Eigenschaft: Falls die Anfangswerte im Unendlichen schnell genug abklingen, lässt sich die Lösung - zumindest im Prinzip - explizit berechnen. Eine Möglichkeit dazu ist die sogenannte *inverse Streumethode*, auf die wir ebenfalls in diesem Kapitel eingehen werden.

Um den Rahmen der Arbeit nicht zu sprengen, werden wir uns nur mit der homogenen KdV-Gleichung auseinandersetzen. Wir betrachten im Folgenden die KdV-Gleichung in der Form

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (3.1)$$

Bemerkung 3.1. *Es gibt viele Versionen der KdV-Gleichung, die aber alle zueinander gleichwertig sind. Die ursprüngliche Form der KdV-Gleichung lautet*

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta \right\}.$$

Hierbei bezeichnet x die (eindimensionale) Variable entlang der reellen Achse, t die Zeit, $\eta(x, t)$ die Höhe der Wasseroberfläche über dem Normalniveau l . Mit g ist die Schwerebeschleunigung gemeint, α ist eine Konstante, die mit der Wasserströmung zusammenhängt, und σ ist definiert als:

$$\sigma = \frac{1}{3} l^3 - \frac{Rl}{\rho g},$$

wobei T die Oberflächenspannung misst, und ρ die Dichte bezeichnet.

Aus der ursprünglichen Gleichung erhält man mittels geeigneter Koordinatentransformationen $x \rightarrow \tilde{x}$, $t \rightarrow \tilde{t}$, $\eta \rightarrow u$ äquivalente Gleichungen der Form

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} u + \mu \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} u + \beta u \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} u + \gamma \frac{\partial^3}{\partial \tilde{x}^3} u = 0,$$

wobei μ , $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ beliebige reelle Konstanten sind.

Beispielsweise ergibt sich durch

$$\tilde{t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l\sigma}} t, \quad \tilde{x} = -\frac{x}{\sqrt{\sigma}}, \quad u = -\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{3}\alpha$$

die Gleichung (3.1). Vergleiche dazu [12], Seite 2-3.

Wir bemerken nun folgendes: Wenn wir die KdV-Gleichung linearisieren, indem wir den nichtlinearen mittleren Term einfach weglassen und die Funktion $u = \exp(i(kx - \omega t))$ einsetzen, sehen wir, dass u die linearisierte Gleichung genau dann erfüllt, wenn die Koeffizienten ω und k die Dispersionsrelation

$$\omega = -k^3$$

erfüllen. Wir sehen also, dass die KdV-Gleichung eine nichtlineare dispersive Gleichung dritter Ordnung ist. Das Zusammenspiel von Dispersivität und Nichtlinearität führt dazu, dass die KdV-Gleichung spezielle Lösungen, sogenannte *Solitonen*, zulässt.

3.1 Solitonen

Wir möchten im Folgenden eine Lösung herleiten, die, von einem sich mitbewegenden Koordinatensystem aus betrachtet, ihre Form nicht ändert. Wir gehen dazu vor wie in [12], Seite 4-5, und setzen

$$u(x, t) = U(x - ct),$$

mit einem konstanten Faktor c . Durch Einsetzen in die KdV-Gleichung ergibt sich

$$U''' - (6U + c)U' = 0.$$

Durch Integration folgt

$$U'' - 3U^2 - cU = M,$$

mit einer Integrationskonstante M . Wir multiplizieren mit U' , woraus mit erneuter Integration folgt:

$$U'^2 - 2U^3 - cU^2 = 2MU + N,$$

mit einer Konstanten N . Wir setzen $M = N = 0$, dann folgt nämlich

$$U'^2 = U^2(2U + c).$$

Diese Differentialgleichung ist analytisch exakt lösbar, dafür erinnern wir uns an die Definition des Sekans hyperbolicus:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}.$$

Damit ergibt sich eine Lösung der obigen Differentialgleichung zum Beispiel durch

$$u(x, t) = U(x - ct) = -\frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct)\right). \quad (3.2)$$

Drei Eigenschaften von u möchten wir besonders hervorheben: Erstens folgt aus den Eigenschaften des Cosinus hyperbolicus, dass $u(x, t)$ für $|x| \rightarrow \infty$ exponentiell schnell abfällt. Zweitens existiert u nur für $c > 0$, d.h. u läuft zwangsweise nach rechts. Und drittens hängt die Geschwindigkeit, mit der die Welle u nach rechts läuft, von ihrer Amplitude ab. Wir erkennen, dass sich Wellen mit größerer Auslenkung schneller fortbewegen als kleine. Die oben hergeleitete Lösung u führt uns zu folgendem, zugegeben etwas schwammig formulierten, Begriff, vgl. [4], Seite 157:

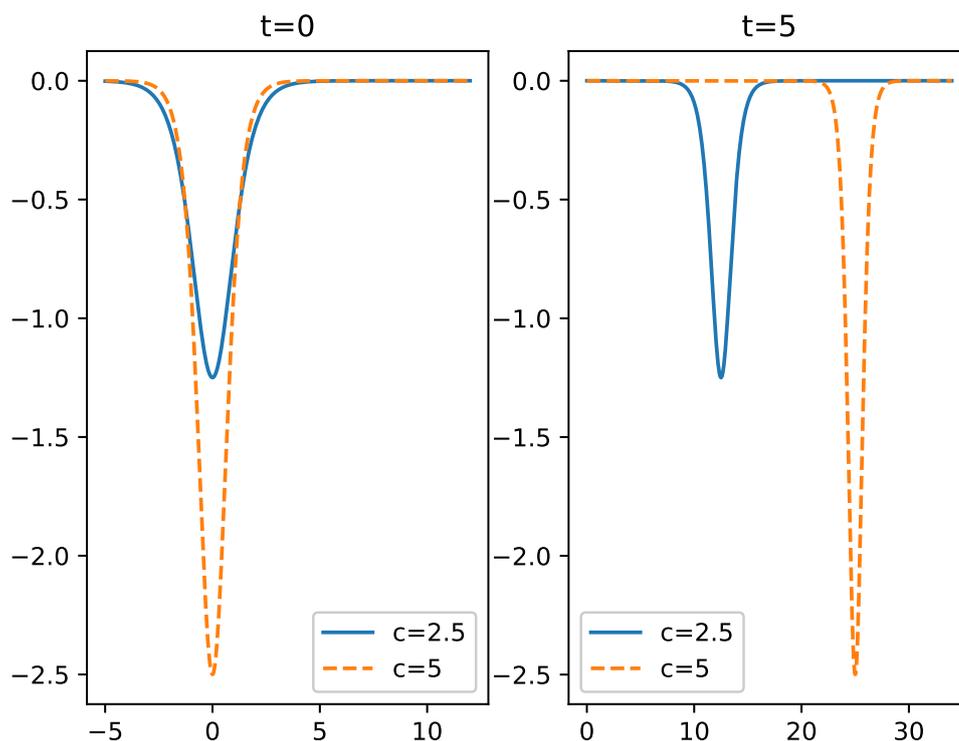


Abbildung 3.1: Links: Die durch (3.2) definierte Funktion $u(x, t)$ für zwei verschiedene Parameter c zum Zeitpunkt $t = 0$. Rechts: Die gleichen Funktionen zum Zeitpunkt $t = 5$. Man erkennt deutlich, dass sich die Welle mit der größeren Auslenkung schneller fortbewegt.

Definition 3.2. Eine Welle u heißt *solitäre Welle*, wenn gilt:

- i. Von einem mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Koordinatensystem aus gesehen ändert u ihre Form nicht;
- ii. u nimmt (vom mitbewegten Koordinatensystem aus gesehen) für $x \rightarrow \pm\infty$ asymptotische Werte an;
- iii. der Übergang zwischen diesen asymptotischen Werten, ist durch einen Puls oder eine Wellenfront räumlich scharf begrenzt, d.h. u ändert ihre Werte nur schnell in einem kleinen Bereich.

Bei der oben hergeleiteten Welle handelt es sich beispielsweise um eine solitäre Welle. Doch es gibt noch einen interessanten Effekt, auf den die Mathematiker *Zabusky* und *Kruskal* Mitte der 1960er Jahre ausgehend von numerischen Simulationen stießen, vgl. [12], Seite 6:

Sei

$$S(z, c) := -\frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}z\right)$$

und

$$g := S(x, c_1) + S(x - w, c_2),$$

wobei $c_1 > c_2$ und $w > 0$ konstant und hinreichend groß seien. Sei nun $u(x, t)$ eine Lösung der KdV-Gleichung mit $u(x, 0) = g$. Dann gilt für große Zeiten T ,

$$u(x, T) = S(x - c_1 T - d_1, c_1) + S(x - c_2 T - d_2, c_2)$$

mit Konstanten d_1 und d_2 . Da S exponentiell schnell abfällt, überlagern sich die beiden solitären Wellen aus denen sich g zusammensetzt zum Zeitpunkt $t = 0$ nahezu gar nicht. Wegen $c_1 > c_2$ würde die erste solitäre Welle die zweite aber irgendwann einholen und sich mit ihr überlagern. Obiges Ergebnis weist aber darauf hin, dass beide Wellen nach der Überlagerung, wenn die erste Welle die zweite überholt hat, ihre Form (bis auf eine Phasenverschiebung) weiterhin beibehalten.

Dadurch wird folgende Definition eines *Solitons* motiviert, vgl. [4], Seite 157:

Definition 3.3. *Eine Zusammensetzung mehrerer solitären Wellen heißt Soliton, wenn die einzelnen solitären Wellen nach einer Überlagerung ihre ursprünglichen Formen wieder annehmen.*

Diese Eigenschaft von Solitonen, nach einer Wechselwirkung mit anderen Solitonen ihre Form beizubehalten, erinnert etwas an Teilchen; daher kommt auch die Endung *-on*. Obige Definition ist recht informell, in der Tat ist es gar nicht so leicht eine kurze und saubere Definition eines Solitons zu geben. Wir wollen hier zur Illustration ein Beispiel geben. Dazu betrachten wir die KdV-Gleichung

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2(x)$. Die Funktion

$$u(x, t) = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{[\cosh(3x - 36t) + 3 \cosh(x - 28t)]^2} \quad (3.3)$$

ist eine Lösung dieses Anfangswertproblems.

Man kennt dieser Lösung den Solitonencharakter nicht unmittelbar an, doch man erhält für $t \rightarrow -\infty$ die Darstellung

$$u = -2 \operatorname{sech}^2(x - 4t - \phi) - 8 \operatorname{sech}^2 \left[2 \left(x - 16t + \frac{\phi}{2} \right) \right],$$

bzw. für $t \rightarrow \infty$

$$u = -2 \operatorname{sech}^2(x - 4t + \phi) - 8 \operatorname{sech}^2 \left[2 \left(x - 16t - \frac{\phi}{2} \right) \right],$$

wobei $e^\phi = \sqrt{3}$ gelte. Die Funktion u zerfällt also für kleine bzw. große t in zwei solitäre Wellen. Für eine Herleitung dieser Lösung sei auf [23], Kapitel 6 verwiesen.

Mittlerweile sind viele Solitonenlösungen der KdV-Gleichung bekannt; wir kommen später im Rahmen der *Inversen Streutheorie* auf die systematische Konstruktion von Solitonen zu sprechen.

Bemerkung 3.4. *Solitonen treten nicht nur in der KdV-Gleichung auf, sondern lassen sich auch in anderen nichtlinearen Wellengleichungen beobachten, z.B. in der nichtlinearen fokussierenden Schrödingergleichung*

$$iu_t + \Delta u + |u|^{2\sigma} u = 0,$$

vgl. [1], Seite 94 oder in der eindimensionalen Sine-Gordon-Gleichung

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = \sin(u),$$

vgl. [4], Abschnitt 6.

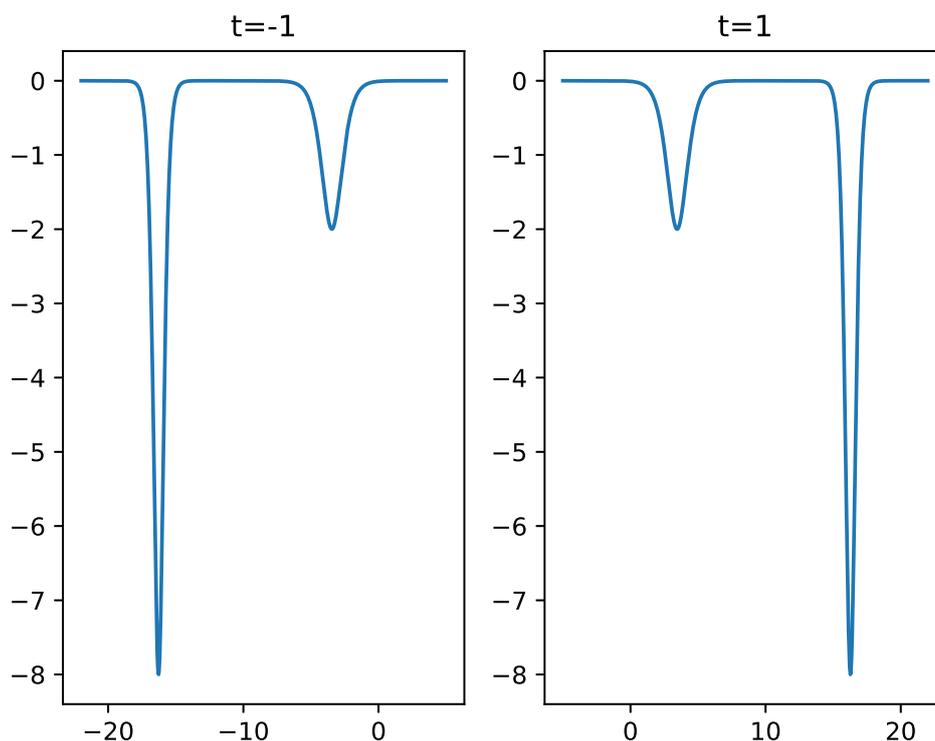


Abbildung 3.2: Links: Die durch (3.3) definierte Funktion $u(x, t)$ zum Zeitpunkt $t = -1$. Man erkennt, dass u sich aus zwei Wellen zusammensetzt. Rechts: Die gleiche Funktion u zum Zeitpunkt $t = 1$. Die größere Welle hat die kleinere überholt. Die Formen der beiden Wellen sind unverändert.

3.2 Existenz von Lösungen der KdV-Gleichung

Wir wollen nun wissen, ob wir für eine gewisse Klasse von Anfangswerten die Existenz einer klassischen Lösung der KdV-Gleichung sicherstellen können. Dazu gehen wir von dem Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) \\ u &= g & (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit $T > 0$ beliebig, aus.

Wir skizzieren zuerst kurz die Idee nach der wir vorgehen wollen, um die Existenz einer Lösung des obigen Anfangswertproblems zu zeigen.

Wir gehen von der KdV-Gleichung in der Form

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

aus (siehe auch Bemerkung 3.1), und modifizieren diese zu

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - \varepsilon u_{xxt} = 0, \quad (3.5)$$

wobei $\varepsilon \in (0, 1]$ sei. Wir behandeln das dazugehörige modifizierte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + u_{xxx} - \varepsilon u_{xxt} &= 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u &= g & (x, t) \in \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit $0 < \varepsilon \leq 1$.

Die Strategie ist nun von klassischen Lösungen u_ε von (3.6) auszugehen (deren Existenz natürlich auch erst bewiesen werden muss), und zu zeigen, dass für $\varepsilon \rightarrow 0$ diese Lösungen in einem gewissen Sinn gegen eine Lösung von (3.4) konvergieren.

Wir gehen im Folgenden wie in [6] vor:

Lemma 3.5. *Sei $g \in H^k(\mathbb{R})$ mit $k \geq 4$. Dann gilt: Für alle $\varepsilon \in (0, 1]$ hat das modifizierte Anfangswertproblem (3.6) eine klassische Lösung u_ε mit $u_\varepsilon \in C_T(H^k(\mathbb{R}))$ und $\partial_t^l u_\varepsilon \in C_T(H^{k+1}(\mathbb{R}))$ für alle $l \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir gehen vom modifizierten Anfangswertproblem (3.6) aus. Durch die Transformation

$$v(x, t) := \varepsilon u(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x - t), \varepsilon^{\frac{3}{2}}t) \quad (3.7)$$

erhalten wir aus (3.6) ein Anfangswertproblem für die Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung:

$$\begin{aligned} v_t + v_x + vv_x - v_{xxt} &= 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ v(x, 0) &= h(x) = \varepsilon g(\varepsilon^{\frac{1}{2}}x) & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Da mit g auch h ein Element von $H^k(\mathbb{R})$ ist, können wir auf Satz 2.7, sowie auf Bemerkung 2.10 zurückgreifen (wir bemerken, dass wegen $k \geq 4$ die Funktionen g und h in $C^2(\mathbb{R})$ liegen, und die jeweilige zweite Ableitung beschränkt ist, siehe Satz 1.5). Es ergibt sich somit: Für jedes $\varepsilon \in (0, 1]$ hat obiges Anfangswertproblem eine eindeutige klassische Lösung $v_\varepsilon \in C_T(H^k(\mathbb{R}))$ mit $\partial_t^l v_\varepsilon \in C_T(H^{k+1}(\mathbb{R}))$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Durch Umkehrung der Transformation (3.7) erkennen wir, dass für alle $g \in H^4(\mathbb{R})$ eine klassische Lösung u_ε von (3.6) mit $u_\varepsilon \in C_T(H^k(\mathbb{R}))$ und $\partial_t u_\varepsilon \in C_T(H^{k+1}(\mathbb{R}))$ existiert. \square

Als nächstes benötigen wir für diese Lösungen u_ε eine a priori Abschätzung für die Sobolevnorm, die unabhängig von ε ist. Wir wollen exemplarisch eine Ungleichung für die H^1 -Norm beweisen, vgl. [6], Proposition 2:

Lemma 3.6. *Sei $g \in H^4(\mathbb{R})$, ε aus $(0, 1]$ beliebig und sei $u_\varepsilon \in C_T(H^4(\mathbb{R}))$ eine klassische Lösung des zu diesem ε gehörenden modifizierten Anfangswertproblems (3.6) mit $\partial_t u_\varepsilon \in C_T(H^4(\mathbb{R}))$. Dann erfüllt u_ε für alle $t \in [0, T]$ die Ungleichung*

$$\|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{H^1} \leq C,$$

mit einer Konstanten C , die nur von $\|g\|_{H^1}$ abhängt und insbesondere unabhängig von ε ist.

Beweis. Durch Multiplikation der Gleichung (3.5) mit u und Integration über \mathbb{R} und $[0, t]$ erhalten wir

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} uu_t - \varepsilon uu_{xxt} \, dx d\tau + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u^2 u_x + uu_{xxx} \, dx d\tau = 0.$$

Aus Satz 1.5 folgt, dass für alle $t \geq 0$ gilt, dass sowohl $u(\cdot, t)$, als auch $u_t(\cdot, t)$ in x dreimal stetig differenzierbar sind, und aus Lemma 1.7 ergibt sich, dass für alle $t \in [0, T]$ die

Funktionen $u(\cdot, t)$, $u_x(\cdot, t)$, $u_{xx}(\cdot, t)$ und $u_{xt}(\cdot, t)$ Elemente von C_0 sind. Durch partielle Integration folgt, dass das zweite Integral auf der linken Seite verschwindet, und aus dem ersten Integral folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(\cdot, t) + \varepsilon u_x^2(\cdot, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g^2 + \varepsilon g_x^2 dx. \quad (3.9)$$

Daraus ergibt sich wegen $\varepsilon \leq 1$ für alle $t \in [0, T]$ eine Abschätzung der L^2 -Norm von u :

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|g\|_{H^1}. \quad (3.10)$$

Weiters erhalten wir durch Multiplikation von (3.5) mit u_{xt} und Integration über \mathbb{R} (sowie partieller Integration) die Gleichung

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 u_{xxt} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} u_{xxt} dx. \quad (3.11)$$

Durch Multiplikation von (3.5) mit $u^2 + 2u_{xx}$ und Integration über \mathbb{R} und $[0, t]$ folgt mit partieller Integration und (3.11) für alle $t \in [0, T]$ folgende Gleichung (da $u(\cdot, t)$ beschränkt ist, ist mit $u^2(\cdot, t)$ auch $u^3(\cdot, t)$ integrierbar):

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(\cdot, t) - \frac{1}{3} u^3(\cdot, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g_x^2 - \frac{1}{3} g^3 dx.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir mithilfe von (3.10) und Lemma 1.6 folgende Ungleichungskette (wir lassen die Zeitabhängigkeit hier weg und schreiben u statt $u(\cdot, t)$):

$$\begin{aligned} \|u_x\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{3} \|u\|_{L^3}^3 + \|g_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{3} \|g\|_{L^3}^3 \\ &\leq \frac{1}{3} \|u(\cdot, t)\|_{\infty} \|u\|_{L^2}^2 + \|g_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{3} \|g\|_{\infty} \|g\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{3} \|u\|_{H^1} \|g\|_{H^1}^2 + \|g\|_{H^1}^2 + \frac{1}{3} \|g\|_{H^1}^3. \end{aligned}$$

Mit (3.10) folgt daraus für alle $t \in [0, T]$:

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1}^2 \leq \frac{1}{3} \|u(\cdot, t)\|_{H^1} \|g\|_{H^1}^2 + 2\|g\|_{H^1}^2 + \frac{1}{3} \|g\|_{H^1}^3.$$

Diese Ungleichung fassen wir als quadratische Ungleichung in der Variable $\|u(\cdot, t)\|_{H^1}$ auf. Die Funktion

$$f(x) = -x^2 + \frac{1}{3}x\|g\|_{H^1}^2 + 2\|g\|_{H^1}^2 + \frac{1}{3}\|g\|_{H^1}^3.$$

beschreibt eine nach unten offene Parabel, die für $g \neq 0$ an der Stelle Null positiv ist, und daher mindestens eine positive Nullstelle haben muss (für $g = 0$ ist das Lemma trivial, da dann auch u die konstante Nullfunktion ist). Sei C die größte positive Nullstelle von f . Dann gilt die Aussage des Lemmas mit diesem C . \square

Aufbauend auf obiges Lemma können mittels ähnlicher Methoden wie im obigen Beweis weitere von ε unabhängige Abschätzungen für höhere Sobolevnormen von u_ε hergeleitet werden. Da die Beweise recht lang sind, zitieren wir hier nur folgenden Satz, vgl. [6], Abschnitt 4:

Satz 3.7. Sei $g \in H^\infty(\mathbb{R})$ und $T > 0$ beliebig. Seien weiters k und l zwei beliebige natürliche Zahlen. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ gilt: Es existieren zwei von ε unabhängige Konstante C und D , sodass für alle $t \in [0, T]$ die Ungleichungen

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^k} \leq C,$$

und

$$\|\partial_t^l u(\cdot, t)\|_{H^k} \leq D$$

gelten.

Es gilt folgender Satz bezüglich der Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems (3.4), vgl. [6], Appendix A:

Satz 3.8. Sei $g \in H^4(\mathbb{R})$ und $T > 0$ beliebig. Dann besitzt das Anfangswertproblem (3.4) eine klassische Lösung u mit $u \in C_T(H^2(\mathbb{R}))$.

Beweis. Wir beweisen hier nur eine abgeschwächte Version des Satzes, nämlich: Sei $g \in H^\infty(\mathbb{R})$ und $T > 0$ beliebig. Dann besitzt das AWP (3.4) eine klassische Lösung u mit $u \in C_T(H^\infty(\mathbb{R}))$.

Sei dazu (ε_n) eine Folge aus $(0, 1)$ mit $(\varepsilon_n) \rightarrow 0$ und sei (u_{ε_n}) die Folge der dazugehörigen klassischen Lösungen von (3.6). Sei $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Nach Satz 3.7 sind (u_{ε_n}) und $(\partial_t u_{\varepsilon_n})$ gleichmäßig beschränkt in $L_T^\infty(H^k(\mathbb{R}))$. Aus Lemma 1.4 und Satz 1.11 folgt die Existenz einer Teilfolge (u_l) von (u_{ε_n}) , sodass

$$u_l \rightarrow u \text{ schwach* in } L_T^\infty(H^k(\mathbb{R}))$$

und

$$\partial_t u_l \rightarrow v \text{ schwach* in } L_T^\infty(H^k(\mathbb{R})).$$

für zwei Funktionen $u \in L_T^\infty(H^k(\mathbb{R}))$ und $v \in L_T^\infty(H^k(\mathbb{R}))$.

Sei $\Omega := (0, T) \times \mathbb{R}$ und ϕ eine Funktion aus C^∞ -Funktion mit kompaktem Träger K in Ω . Wegen $\text{diam}(K) := \sup\{|a - b| : a, b \in K\} < \infty$ und

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \phi(x, t) \, dx dt \leq \text{diam}(K)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_{C_T} \int_0^T \|u(t)\|_{L^2} \, dt \leq \text{diam}(K)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_{C_T} \|u\|_{L_T^\infty}$$

können wir u vermöge

$$\langle u, \phi \rangle = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \phi(x, t) \, dx dt$$

als Distribution auffassen. Aus der schwach*-Konvergenz in $L_T^\infty(H^1(\mathbb{R}))$ folgt $u_l \rightarrow u$ im distributionellen Sinne, und damit folgt mit der Stetigkeit der distributionellen Ableitung, $\partial_t u = v$.

Wir bemerken noch, dass der schwach*-Grenzwert u unabhängig vom gewählten k ist; aus $k_1 < k_2$ folgt nämlich $L_T^\infty(H^{k_1}(\mathbb{R})) \subset L_T^\infty(H^{k_2}(\mathbb{R}))$. Aus $u_l \rightarrow u$ schwach* in $L_T^\infty(H^{k_2}(\mathbb{R}))$ folgt daher auch $u_l \rightarrow u$ schwach* in $L_T^\infty(H^{k_1}(\mathbb{R}))$.

Es gilt nun folgendes Lemma, vgl. [6], Appendix A:

Lemma 3.9. *Es gelte $u_n \rightarrow u$ schwach* in $L_T^\infty(H^s(\mathbb{R}))$ für ein $s \geq 1$ und $\partial_t u_n \rightarrow \partial_t u$ schwach* in $L_T^\infty(H^r(\mathbb{R}))$ für ein $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt: Es gibt eine Teilfolge u_l von u_n , sodass $u_l \rightarrow u$ punktweise fast überall in $[0, T] \times \mathbb{R}$ und $u_l \partial_x u_l \rightarrow uu_x$ im distributionellen Sinne.*

Durch Anwendung dieses Lemmas auf die Folge (u_l) folgt unmittelbar, dass u eine distributionelle Lösung der KdV-Gleichung (3.1) ist. Weiters folgt aus $u \in L_T^\infty(H^k(\mathbb{R}))$ und $u_t \in L_T^\infty(H^k(\mathbb{R}))$, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $u \in C_T(H^k(\mathbb{R}))$, vgl. [13], Seite 286.

Aus Satz 1.5 folgt, dass u in x unendlich oft differenzierbar ist, und aus der KdV-Gleichung (3.1) ergibt sich induktiv, dass $u(x, t)$ auf ganz Ω unendlich oft stetig differenzierbar ist.

Als nächstes müssen wir zeigen, dass die richtigen Anfangswerte angenommen werden, d.h. dass $u(\cdot, 0) = g$ gilt. Sei dazu $\phi \in C_T(L^2(\mathbb{R})) \cap L_T^1(L^2(\mathbb{R}))$ mit $\phi(x, T) = 0$ so, dass auch $\phi_t \in L_T^1(L^2(\mathbb{R}))$ gilt. Wir haben bereits gezeigt, dass $(\partial_t u_l)$ in $L_T^\infty(L^2(\mathbb{R}))$ schwach* gegen $\partial_t u$ konvergiert. Daraus folgt für alle ϕ , die obigen Voraussetzungen genügen:

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t u_l \phi \, dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t u \phi \, dx dt. \quad (3.12)$$

Auf beiden Seiten können wir nun in t partiell integrieren, somit erhalten wir auf der linken Seite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_l(x, 0) \phi(x, 0) \, dx - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} u_l \phi_t \, dx dt.$$

Auf der rechten Seite von (3.12) ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) \phi(x, 0) \, dx - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} u \phi_t \, dx dt.$$

Da u_l in $L_T^\infty(L^2(\mathbb{R}))$ schwach*-konvergiert folgt aus $\phi_t \in L_T^1(L^2(\mathbb{R}))$ und (3.12):

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_l(x, 0) \phi(x, 0) \, dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) \phi(x, 0) \, dx,$$

und da $u_l(x, 0) = g(x)$ für alle l , folgt $u(x, 0) = g(x)$ fast überall. Mit der Stetigkeit von $u(x, 0)$ folgt schließlich die Gleichheit überall. Somit ist die abgeschwächte Variante des Satzes gezeigt. Für den vollständigen Beweis des Satzes verweisen wir auf [6], Anhang A. \square

Bemerkung 3.10. *Obiger Satz kann auch ohne Verwendung des Satzes von Banach-Alaoglu bewiesen werden. Man kann zeigen, dass für $g \in H^4(\mathbb{R})$ die Folge der u_{ε_n} in $C_T(H^4(\mathbb{R}))$ eine Cauchyfolge ist und gegen eine Lösung der KdV-Gleichung konvergiert. Für mehr Details verweisen wir auf [6], Abschnitt 5.*

Bemerkung 3.11. *Die Voraussetzung $g \in H^4(\mathbb{R})$ kann auch abgeschwächt werden. Man kann zeigen, dass für $g \in H^k(\mathbb{R})$ mit $k \in \mathbb{N}$ das Anfangswertproblem (3.4) eine distributionelle Lösung $u \in L^\infty(H^k(\mathbb{R}))$ mit $u(\cdot, 0) = g$ besitzt. Wir bemerken, dass sich aus der KdV-Gleichung $u_t \in L^\infty(H^{k-3}(\mathbb{R}))$ ergibt, und man kann zeigen, dass daraus $u \in C_T(H^{k-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}))$ folgt. Somit macht die Auswertung von u an der Stelle $t = 0$ Sinn.*

Für $k \geq 2$ ist diese distributionelle Lösung eindeutig in $L_T^\infty(H^k(\mathbb{R}))$, für $k \geq 3$ ist u fast überall differenzierbar und u erfüllt die KdV-Gleichung punktweise fast überall. Für ausführlichere Details und weitere Ergebnisse zu diesem Thema sei auf [6] verwiesen.

3.3 Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten

Wir möchten weiters nach der Existenz noch die Eindeutigkeit und die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten von klassischen Lösungen diskutieren. Als Erstes geben wir ein Eindeutigkeitsresultat wieder. Wir gehen wieder vom Anfangswertproblem (3.4) aus. Der Beweis des folgenden Satzes ist so ähnlich in [19] bzw. auch in [12], Seite 8 zu finden; wir geben ihn der Vollständigkeit halber hier wieder.

Satz 3.12. *Seien u und v zwei klassische Lösungen des Anfangswertproblems (3.4), und es gelte für alle $t > 0$: $u(\cdot, t), v(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R})$ und $u_t(\cdot, t), v_t(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R})$. Dann gilt $u = v$.*

Beweis. Laut Voraussetzung gelten die beiden Gleichungen $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ und $v_t - 6vv_x + v_{xxx} = 0$. Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten erhalten wir mit $w = u - v$:

$$w_t - 6uw_x - 6wv_x + w_{xxx} = 0.$$

Multiplikation dieser Gleichung mit w und Integration von $-R$ bis R liefert

$$\frac{1}{2} \int_{-R}^R (w^2)_t dx - 3 \int_{-R}^R u(w^2)_x dx - 6 \int_{-R}^R w^2 v_x dx + \int_{-R}^R w w_{xxx} dx = 0.$$

Durch partielle Integration im zweiten und im letzten Term auf der linken Seite ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \int_{-R}^R (w^2)_t dx - 3[uw^2]_{-R}^R + 3 \int_{-R}^R u_x w^2 dx - 6 \int_{-R}^R w^2 v_x dx + [w w_{xx}]_{-R}^R - \frac{1}{2} [w_x^2]_{-R}^R = 0.$$

Da w, w_x und w_{xx} laut Voraussetzung und Lemma 1.7 im Unendlichen verschwinden, erhalten wir durch den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (w^2)_t dx + 3 \int_{-\infty}^{\infty} u_x w^2 dx - 6 \int_{-\infty}^{\infty} w^2 v_x dx = 0.$$

Mittels Vertauschung von Differentiation und Integration und mit $K := \|v_x - \frac{1}{2}u_x\|_{\infty}$ folgt

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 12 \int_{-\infty}^{\infty} (v_x - \frac{1}{2}u_x) w^2 dx \leq 12K \|w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Daraus folgt mit der Ungleichung von Gronwall, vgl. [16], Seite 105 und mit $w(\cdot, 0) = 0$:

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|w(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R})} e^{6Kt} = 0.$$

□

Somit ist die Eindeutigkeit bewiesen, weiters gilt noch folgender Satz bezüglich der stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten, den wir hier ohne Beweis zitieren:

Satz 3.13. *Die Abbildung*

$$U : H^4(\mathbb{R}) \rightarrow C_T(H^4(\mathbb{R})),$$

die $g \in H^4(\mathbb{R})$ auf die nach Satz 3.8 existierende, und nach Satz 3.12 eindeutige Lösung u von (3.4) abbildet, ist stetig.

Für den Beweis obiger Aussage verweisen wir auf [6], Abschnitt 6.

3.4 Inverse Streumethode

Wir werden im Folgenden eine spezielle Methode, die sogenannte *inverse Streumethode*, die von *Gardner, Greene, Kruskal und Miura* in [14] vorgestellt wurde, skizzieren. Mit dieser Methode lassen sich Lösungen der KdV-Gleichung zu gegebenen Anfangswerten (zumindest prinzipiell) konkret berechnen. In diesem Abschnitt gehen wir vor wie in [12]. Die entscheidende Idee der Inversen Streumethode ist, dass sich zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ die Lösung $u(x, t)$ der KdV-Gleichung als Potential $u(\cdot, t)$ der stationären Schrödinger-Gleichung

$$\phi_{xx}(x) - u(x, t)\phi(x) = 0$$

berechnen lässt.

3.4.1 Die Miura-Transformation

Wir möchten die Existenz einer Lösung der KdV-Gleichung mittels der sogenannten inversen Streutheorie zeigen; die Idee dabei ist, nach Lösungen $u(x, t)$ der KdV-Gleichung

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

zu suchen, indem man zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ die Funktion $u(\cdot, t)$ als Potential der stationären Schrödinger-Gleichung

$$v_{xx} - \{u(x, t) - \lambda\}v = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

auffasst, wobei λ eine beliebige reelle Zahl sei. Wir wollen zunächst den Zusammenhang zwischen der KdV-Gleichung und dem eindimensionalen Schrödingeroperator $\frac{\partial}{\partial xx} - (u - \lambda)$ motivieren. Die beiden folgenden Aussagen lassen sich leicht durch Einsetzen und Nachrechnen überprüfen.

Lemma 3.14. *Sei $v(x)$ eine Lösung von*

$$v_{xx} - \{u(x, t) - \lambda\}v = 0,$$

wobei λ eine beliebige reelle Konstante sei. Dann erfüllt die Funktion

$$w = \frac{v_x}{v}$$

die Riccati-Gleichung $w_x + w^2 = u - \lambda$.

Lemma 3.15. *Sei $v(x)$ eine Lösung der folgenden modifizierten KdV-Gleichung:*

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0$$

Dann erfüllt die Funktion $u = v^2 + v_x$ die KdV-Gleichung (3.1).

Bemerkung 3.16. *Obiges Lemma geht auf Robert Miura zurück, der diesen Zusammenhang 1968 fand; die Abbildung $v \rightarrow v^2 + v_x$ heißt auch Miura-Transformation.*

Wir interpretieren nun die *Miura-Transformation* in umgekehrter Richtung, d.h. wir definieren aus einer Lösung u der KdV-Gleichung eine Funktion v . Dann erfüllt v die Riccati-Gleichung $v_x + v^2 = u$. Da die KdV-Gleichung invariant ist unter der Transformation $\tilde{x} = x + \lambda t, \tilde{u} = u - \lambda$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, erhalten wir durch Einsetzen die Beziehung

$$v_x + v^2 = u - \lambda.$$

Aufgrund von Lemma 3.14 erscheint es naheliegend, den eindimensionalen Schrödingeroperator mit der KdV-Gleichung in einen Zusammenhang zu bringen, vgl. [12], Seite 9-10.

3.4.2 Das inverse Streuproblem für die Schrödingergleichung

Nachdem wir im obigen Abschnitt den Zusammenhang zwischen der KdV-Gleichung und dem eindimensionalen Schrödingeroperator

$$L := -\partial_{xx} + u$$

motiviert haben, untersuchen wir jetzt einige Spektraleigenschaften dieses Operators für ein gegebenes *Potential* u . Dazu treffen wir zunächst folgende Definition:

Definition 3.17. *Wir nennen eine reelle Funktion $u \in C_{00}$ ein zulässiges Potential, falls für alle $k \in \{0, 1, 2\}$ die Bedingung*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)||x|^k dx < \infty \tag{3.14}$$

erfüllt ist.

Bemerkung 3.18. *In [12], Kapitel 4 wird statt (3.14) die Bedingung*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|(1 + |x|)^k dx < \infty \quad \text{für } k \in \{0, 1, 2\} \tag{3.15}$$

gefordert. Offensichtlich folgt aber aus (3.14) die Gültigkeit von (3.15).

Wir gehen im Folgenden bei u immer von einem zulässigen Potential aus. Wir betrachten den Operator L mit dem Definitionsbereich $H^2(\mathbb{R})$, und sehen, dass L wegen der Beschränktheit von u nach $L^2(\mathbb{R})$ abbildet.

Wir erinnern an einige Definitionen aus der Funktionalanalysis: Das Spektrum $\sigma(L)$ des oben definierten Operators L besteht aus allen Werten $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $L - \lambda$ nicht invertierbar ist. Dass $L - \lambda$ nicht invertierbar ist kann zwei Gründe haben: Entweder $L - \lambda$ ist nicht injektiv, oder nicht surjektiv. Falls $L - \lambda$ nicht injektiv ist, oder äquivalent dazu, dass

$$L(v) - \lambda v = 0$$

eine nichttriviale Lösung in $v \in H^2(\mathbb{R})$ besitzt, dann heißt λ ein *Eigenwert* von L und jede nichttriviale Lösung v eine *Eigenfunktion* von L zum Eigenwert λ . Die Menge aller Eigenwerte von L wird auch *Punktspektrum* genannt; wir bezeichnen sie mit $\sigma_p(L)$. Ein Eigenwert heißt einfach, wenn die Menge der zugehörigen Eigenfunktionen einen eindimensionalen Vektorraum bildet. Weiters heißt ein Eigenwert λ_0 diskret, falls

$$\inf\{|\lambda - \lambda_0| : \lambda \in \sigma(L) \setminus \{\lambda_0\}\} > 0$$

gilt.

Auch für $\lambda \in \sigma(L) \setminus \sigma_p(L)$ kann $L(v) - \lambda v = 0$ eine nichttriviale Lösung ψ besitzen (die dann allerdings dann nicht in H^2 liegt, sonst wäre λ ja ein Eigenwert), dann nennen wir ψ eine *verallgemeinerte Eigenfunktion*.

Es gilt nun folgendes Resultat bezüglich des Spektrums des Operators L :

Satz 3.19. *Sei u ein zulässiges Potential. Dann gilt für den Operator $L := -\partial_{xx} + u$:*

$$\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup [0, \infty) \subset \mathbb{R}.$$

Weiters gilt: Es gibt nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten, d.h. $\sigma_p(L)$ ist eine endliche Menge (man beachte, dass $\sigma_p(L)$ auch leer sein kann). Jeder Eigenwert ist diskret und einfach, und für jeden Eigenwert λ gibt es eine reelle Zahl $k \neq 0$, sodass $\lambda = -k^2$.

Sei $N \geq 0$ die Anzahl der Eigenwerte, dann gilt:

$$N \leq 2 + \int_{-\infty}^{\infty} |y||u(y)| dy.$$

Beweis. Der Beweis des Satzes ist aufwändig und würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Wir verweisen auf [12], Kapitel 4; speziell auf Theorem 4.3.1 und Theorem 4.3.11. \square

Damit haben wir alle Informationen, die wir über das Spektrum und insbesondere die Eigenwerte benötigen. Als nächstes sind für uns die Eigenfunktionen wichtig:

Satz 3.20. *Sei u ein zulässiges Potential. Dann gilt für jede Eigenfunktion $v_n \in H^2(\mathbb{R})$ zum Eigenwert $\lambda_k = -k_n^2$, $n \in \{1, \dots, N\}$, dass v_n sogar eine klassische Lösung von $Lv - \lambda v = 0$ ist.*

Für das asymptotische Verhalten dieser Eigenfunktionen gilt:

$$v_n \approx C_n e^{-k_n x},$$

für $x \rightarrow \infty$, bzw.

$$v_n \approx \widetilde{C}_n e^{k_n x},$$

für $x \rightarrow -\infty$.

Jede dieser Eigenfunktionen v_n kann so normiert werden, dass $v_n(x)$ positiv ist für alle hinreichend großen x , und dass $\|v_n\|_{L^2} = 1$ gilt. Für jede solche normierte Eigenfunktion definieren wir den Normierungskoeffizienten C_n durch:

$$C_n := \lim_{x \rightarrow \infty} e^{k_n x} v_n(x).$$

Beweis. Auch für diesen Beweis verweisen wir auf die Literatur, etwa auf [12], Kapitel 4, dort speziell Korollar 4.3.1 und Seite 80. \square

Nun da wir die Situation für Eigenfunktionen geklärt haben, schauen wir uns jetzt den Rest des Spektrums, also $\sigma(L) \setminus \sigma_p(L)$ an:

Satz 3.21. *Sei u ein zulässiges Potential. Für alle $\lambda = k^2$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat die Schrödingergleichung $L\psi - \lambda\psi = 0$ beschränkte, klassische Lösungen ψ_k , die allerdings nicht in $H^2(\mathbb{R})$ liegen.*

Diese Lösungen lassen sich asymptotisch für $|x| \rightarrow \infty$ als Linearkombination von e^{-ikx} und e^{ikx} darstellen. Sie lassen sich so normieren, dass für das asymptotische Verhalten im Unendlichen gilt:

$$\psi_k(x) \approx e^{-ikx} + b(k)e^{ikx},$$

für $x \rightarrow \infty$, bzw.

$$\psi_k(x) \approx a(k)e^{-ikx},$$

für $x \rightarrow -\infty$. Der Koeffizient $a(k) \in \mathbb{C}$ wird auch als Transmissionskoeffizient bezeichnet; $b(k) \in \mathbb{C}$ heißt Reflexionskoeffizient. Diese beiden Koeffizienten erfüllen das Erhaltungsgesetz $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Beweis. Der Beweis findet sich etwa in [12], Kapitel 4. \square

Wir sind nun endlich dazu in der Lage, das inverse Streuproblem zu definieren. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff der Streudaten:

Definition 3.22. (*Streudaten*): *Das Spektrum des Schrödingeroperators, zusammen mit den Normierungskoeffizienten C_n aus Satz 3.20 und den Koeffizienten $a(k)$ bzw. $b(k)$ aus Satz 3.21 heißen Streudaten des gegebenen Potentials $u(x)$.*

Die Streudaten lassen sich aus dem Potential berechnen, sofern das Potential bekannt ist. Die Frage ist nun, ob sich aus den Streudaten umgekehrt auch das Potential bestimmen lässt. Dieses Problem wird auch als *inverses Streuproblem* bezeichnet, und im Folgenden werden wir zeigen, dass es sich tatsächlich lösen lässt, wenn wir von einem zulässigen Potential ausgehen.

Wir nehmen an, dass wir die Streudaten zu einem zulässigen Potential u gegeben haben und erwähnen folgende Eigenschaft des Reflexionskoeffizienten $b(k)$:

Lemma 3.23. *Sei das Potential u zulässig. Dann ist der Reflexionskoeffizient $b(k)$ ein Element von $L^2(\mathbb{R})$.*

Beweis. Der Beweis dieser Aussage findet sich in [12], Abschnitt 4.5. □

Als nächstes definieren wir folgende Funktion:

$$B(x) = \sum_{n=1}^N C_n^2 e^{-k_n x} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}[b(k)](x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

\mathcal{F} sei hier der Fourier-Plancherel-Operator, also die stetige Fortsetzung der Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R})$, und mit N bezeichnen wir hier wie oben schon die Anzahl der Eigenwerte des Operators L . Aus Lemma 3.23 und der Isometrie des Fourier-Plancherel-Operators folgt, dass die Funktion B wohldefiniert ist, und für jedes beliebige $d \in \mathbb{R}$ in $L^2(d, \infty)$ liegt.

Folgender Satz beweist die Lösbarkeit des inversen Streuproblems:

Satz 3.24. *Sei u ein zulässiges Potential der Schrödingergleichung und B die zu den Streudaten von u gehörende Funktion aus (3.16). Es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, mit $K(x, y) = 0$ für $y < x$ und $K(x, \cdot) \in L^2(x, \infty)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiters ist $K(x, y)$ in x stetig differenzierbar und löst die sogenannte Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung:*

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_x^\infty B(z + y)K(x, z) dz = 0 \quad \text{für } y > x.$$

Für das Potential u gilt dann:

$$u(x) = -2K_x(x, x).$$

Beweis. Der Beweis dieses Satzes findet sich in [12], Kapitel 4. □

Obiger Satz zeigt uns, dass sich jedes zulässige Potential aus seinen Streudaten rekonstruieren lässt. Der nächste Schritt ist nun, dieses Ergebnis in einen Zusammenhang mit der KdV-Gleichung zu bringen.

3.4.3 Die inverse Streumethode für die KdV-Gleichung

Wir gehen im Folgenden von einer klassischen Lösung $u(x, t)$ der KdV-Gleichung aus. Wir fassen u als zeitabhängiges Potential der Schrödingergleichung auf, d.h. wir betrachten den zeitabhängigen Operator $L(t) := -\partial_{xx} + u(\cdot, t)$. Wir nehmen vorerst an, dass für alle $t > 0$ die Funktion $u(\cdot, t)$ ein zulässiges Potential ist.

Für alle $t \geq 0$ kennen wir aufgrund der Ergebnisse im vorigen Abschnitt schon gewisse Eigenschaften bezüglich des Spektrums und der Eigenfunktionen der Operatoren $L(t)$. Die Frage ist nun, wie sich das Spektrum und die Eigenfunktionen in der Zeit entwickeln. Eine Antwort darauf gibt der folgende Satz:

Satz 3.25. Sei das zulässige Potential $u(x, t)$ der Schrödingergleichung gleichzeitig eine klassische Lösung der KdV-Gleichung, und es gelte zusätzlich

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0$$

gleichmäßig in t auf allen kompakten Zeitintervallen. Weiters seien für alle $t \geq 0$ auch $u_{xx}(x, t)$ und $u_{xxx}(x, t)$ beschränkt in x . Dann gilt:

i. Das zum zeitabhängigen Operator $L(t) = -\partial_{xx} + u(\cdot, t)$ gehörende Spektrum $\sigma(L, t)$ ist invariant in der Zeit t . D.h. $\sigma(L, t) = \sigma(L, 0) =: \sigma(L)$;

ii. Für jede (verallgemeinerte) Eigenfunktion $\psi(x, t)$ zum Wert $\lambda \in \sigma(L)$ existiert eine Konstante D , sodass

$$\psi_t = 2(u + 2\lambda)\psi_x + (D - u_x)\psi$$

gilt;

iii. Für jeden diskreten Eigenwert $\lambda = -k_n^2$ gilt für den Normierungskoeffizienten C_n der zugehörigen normierten Eigenfunktion (siehe Satz 3.20):

$$C_n(t) = C_n(0)e^{4k_n^3 t};$$

iv. Für jeden Punkt $\lambda = k^2 \in \sigma(L)$ erfüllt der Reflexionskoeffizient $b(k, t)$ die Gleichung

$$b(k, t) = b(k, 0)e^{8ik^3 t}.$$

Beweis. Wir geben hier nur Beweisskizzen bzw. heuristische Überlegungen für die Aussagen [i.], [iii.] und [iv.]: Sei also $u(x, t)$ eine Lösung der KdV-Gleichung. Wir gehen von der eindimensionalen Schrödingergleichung

$$L(t)\psi = \psi_{xx} - (u(\cdot, t) - \lambda)\psi = 0$$

aus. Natürlich hängen die Eigenfunktionen $\psi(x, t)$ und die Eigenwerte $\lambda(t)$ parametrisch von der Zeit t ab.

Durch differenzieren der Schrödingergleichung nach t erhalten wir:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u - \lambda) \right] \psi_t = (u_t - \lambda_t)\psi.$$

Durch die KdV-Gleichung können wir u_t eliminieren und bekommen:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u - \lambda) \right] \psi_t - (6uu_x - u_{xxx})\psi + \lambda_t\psi = 0.$$

Mit

$$u_{xxx}\psi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_x \psi - u_x \psi_{xx} - 2u_{xx} \psi_x$$

kommen wir durch Umformungen und mithilfe der Schrödingergleichung schlussendlich auf

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (u - \lambda) \right] M = -\lambda_t \psi,$$

wobei

$$M = \psi_t - 2(u + 2\lambda)\psi_x + u_x \psi$$

gilt. Durch Multiplikation mit ψ und mittels der Schrödingergleichung ergibt sich

$$-\lambda_t \psi^2 = \frac{\partial}{\partial x} (\psi M_x - \psi_x M).$$

Da M aufgrund der Voraussetzungen des Satzes beschränkt ist, und da ψ und ψ_x im Unendlichen verschwinden, so ergibt sich durch Integration in x , dass $\lambda_t = 0$ gelten muss, d.h. jeder Eigenwert von $L(0)$ ist auch Eigenwert von $L(t)$. Man kann weiters auch zeigen, dass für größer werdendes t keine neuen Eigenwerte entstehen können. Also ist das Punktspektrum invariant in der Zeit.

Nach Satz 3.19 ist wegen

$$\sigma(L(t)) \setminus \sigma_p(L(t)) = [0, \infty)$$

das Spektrum insgesamt invariant in der Zeit.

Kommen wir zu Aussage [iii.]. Wir gehen von einer normierten Eigenfunktion ψ zum Eigenwert $\lambda = -k_n^2$ aus (also $\|\psi(\cdot, t)\|_{L^2} = 1$ für alle $t > 0$) und der Gleichung aus [ii.], also

$$\psi_t = 2(u + 2\lambda)\psi_x + (D - u_x)\psi.$$

aus. Durch Multiplikation mit ψ und Integration in x ergibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} [2(u + 2\lambda)\psi\psi_x - u_x\psi^2] dx + D \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx.$$

Der Term auf der linken Seite ist Null und durch partielle Integration und durch Anwenden der Schrödingergleichung folgt, dass auch das erste Integral auf der rechten Seite Null ist. Also $D = 0$ und damit

$$\psi_t = 2(u + 2\lambda)\psi_x - u_x\psi.$$

Wir setzen $w(x, t) = e^{k_n x} \psi(x, t)$ und erhalten durch einsetzen in obige Differentialgleichung:

$$w_t = 4k_n^3 w + 2(u - 2k_n^2)w_x - (2k_n u + u_x)w.$$

Es ist möglich für w eine Integraldarstellung anzugeben (Variation der Konstanten), und für das Verhalten für $x \rightarrow \infty$ ergibt sich dann

$$C_n(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, 0) e^{4k_n^3 t} = C_n(0) e^{4k_n^3 t}.$$

Als nächstes geben wir noch eine heuristische Überlegung zu Aussage [iv.]:

Wir gehen von einer verallgemeinerten Eigenfunktion ψ zu $\lambda = k^2$ aus. Da u als zulässiges Potential im Unendlichen verschwindet, approximieren wir ψ_t ausgehend von der Gleichung in Aussage [ii.] für $x \rightarrow \infty$ durch

$$\psi_t \approx 4k^2 \psi_x + D\psi. \tag{3.17}$$

Aus Satz 3.21 kennen wir das asymptotische Verhalten von ψ , daher nehmen wir an:

$$\psi_t \approx b_t e^{ikx},$$

und

$$\psi_x \approx \frac{\partial}{\partial x} [e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}].$$

Durch Einsetzen in (3.17) ergibt sich die Bedingung $D = 4ik^3$, und $b_t = 8ik^3b$. Daraus folgt

$$b(k, t) = b(k, 0)e^{8ik^3t}.$$

In den obigen Überlegungen haben wir einige Annahmen getroffen und ein paar wichtige Dinge unterschlagen. So ist etwa nicht klar, ob wir die Eigenfunktionen ψ überhaupt im klassischen Sinn differenzieren dürfen. Für eine genaue Ausarbeitung der obigen Beweisskizzen und einen Beweis für Aussage [ii.] verweisen wir auf [12], Seite 17-26. □

Bemerkung 3.26. *Wir haben im obigen Satz die Transmissionskoeffizienten $a(k, t)$ nicht behandelt, da wir diese nicht weiter benötigen werden. Man kann aber zeigen, dass auch die Transmissionskoeffizienten in der Zeit konstant sind, also $a(k, t) = a(k, 0)$. Für den Beweis verweisen wir etwa auf [15].*

Sei nun $u(x, t)$ eine (noch unbekannt) Lösung der KdV-Gleichung, von der wir nur wissen, dass sie existiert (z.B. wegen Satz 3.8). Die Funktion $u(x, t)$ genüge den folgenden drei Bedingungen: Für alle $t \geq 0$ soll $u(\cdot, t)$ ein zulässiges Potential sein, d.h. für $k \in \{0, 1, 2\}$ muss

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k |u(x, t)| dx < \infty$$

gelten. Weiters sollen die ersten drei Ortsableitungen von u beschränkt sein. Und schließlich soll gelten, dass

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_x(x, t) = 0$$

gleichmäßig in t auf allen kompakten Zeitintervallen. Unter diesen Voraussetzungen können wir u mit der *inversen Streumethode* (zumindest im Prinzip) explizit bestimmen:

Als erstes berechnen wir die Streudaten von $u(x, 0)$. Aufgrund von Satz 3.25 kennen wir damit auch die Streudaten von $u(x, t)$ für alle Zeiten $t > 0$, ohne u zu kennen. Zu den Streudaten von $u(x, t)$ gibt es nach Satz 3.24 eine eindeutige Lösung $K(x, y, t)$ der *Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung*. Das Potential zum Zeitpunkt $t > 0$ ist dann durch

$$u(x, t) = -2K_x(x, x, t)$$

gegeben.

Das einzige noch bestehende Problem in der eben skizzierten Methode ist noch, dass wir annehmen müssen, dass die Lösung $u(x, t)$ den eben genannten drei Bedingungen genügt. Folgendes Resultat zeigt aber, dass dies bereits der Fall ist, wenn $u(x, 0)$ regulär genug ist:

Satz 3.27. *Für die Anfangswerte $u_0(x) := u(x, 0)$ gelte: u_0 sei dreimal stetig differenzierbar und habe eine stückweise stetige vierte Ableitung. Weiters gelte für alle $j \in \{1, 2, 3, 4\}$:*

$$\frac{d^j u_0(x)}{dx^j} = \mathcal{O}(|x|^{-\alpha}) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty,$$

mit $\alpha > \gamma$, wobei $\gamma = 8$, falls die Schrödingergleichung mit Potential u_0 zum Wert $\lambda = 0$ keine beschränkte Lösung besitzt. Sonst sei $\gamma = 10$.

Dann gilt für alle kompakten Zeitintervalle auf der positiven reellen Halbachse für $|x| \rightarrow \infty$:

$$\frac{d^j u(x, t)}{dx^j} = \mathcal{O}(|x|^\sigma) \quad \text{für } j \leq 2[\alpha] - \gamma.$$

$[\alpha]$ bezeichnet hier die größte natürliche Zahl kleiner gleich α , wobei $[0] := 0$ sei. Der Exponent σ ist definiert als:

$$\sigma := \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}\gamma - [\alpha].$$

Beweis. Wir verweisen auf [12], Kapitel 2 und [10], Abschnitt 4. □

Dieser Satz ist bemerkenswert, nicht nur weil er uns notwendige a priori Informationen über die Regularität einer Lösung u gibt, sondern weil er auch zeigt, dass die KdV-Gleichung die Anfangswerte zu einem gewissen Grad glättet. Für $\gamma = 8$ und $\alpha = 9$ gilt zum Beispiel: u ist achtmal differenzierbar und u klingt für $|x| \rightarrow \infty$ mit $\mathcal{O}(|x|^{-4})$ ab.

Bemerkung 3.28. *Wir haben in Abschnitt 3.2 die Existenz einer klassischen Lösung der KdV-Gleichung gezeigt und haben dann mit der inversen Streumethode eine Möglichkeit erläutert, mit der diese existierende Lösung berechnet werden kann. Es ist aber auch möglich mithilfe der inversen Streumethode schon den Existenzbeweis zu führen. Für mehr Details dazu verweisen wir auf [10].*

3.5 Die Konstruktion von Solitonenlösungen

Die inverse Streumethode gibt uns nicht nur eine Möglichkeit, die Lösung u des Anfangswertproblems (3.4) explizit zu bestimmen, sondern man kann mit ihr auch zeigen, dass es zu jeder beliebigen natürlichen Zahl n eine Solitonenlösung u gibt, die sich genau aus n solitären Wellen zusammensetzt. Wir skizzieren kurz (analog zu [12], Abschnitt 2.5 bzw. [15]) die Idee dazu.

Der Schlüssel sind Potentiale der Schrödingergleichung mit verschwindenden Reflexionskoeffizienten, also $b(k) = 0$ für alle nichtnegativen k . Sei $g \in H^4(\mathbb{R})$ ein zulässiges Potential, sodass alle Reflexionskoeffizienten verschwinden, so gilt nach Satz 3.25, dass für die Lösung u von (3.4) die Reflexionskoeffizienten für alle Zeiten Null bleiben.

Der folgende Satz sichert die Existenz von solchen Potentialen mit verschwindenden Reflexionskoeffizienten:

Satz 3.29. *Für jede nichtleere endliche Menge M von negativen reellen Zahlen kann man ein Potential g konstruieren, sodass die Reflexionskoeffizienten von g verschwinden und die Elemente von M genau den diskreten, zum Potential g gehörenden Eigenwerten entsprechen.*

Beweis. Wir verweisen auf [12], Abschnitt 2.5 und [11], Kapitel 3. □

Sei nun g ein zulässiges Potential mit verschwindenden Reflexionskoeffizienten und N diskreten Eigenwerten. Nach Satz 3.25 bleiben die Reflexionskoeffizienten $b(k, t)$ der zugehörige Lösung $u(x, t)$ von (3.4) in der Zeit konstant Null. Somit vereinfacht sich die Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung aus Satz 3.24 und wir erhalten (wir schreiben die Zeitabhängigkeit von u , K und C_n im Folgenden nicht an):

$$K(x, y) + \sum_{n=1}^N C_n^2 e^{-k_n(x+y)} + \int_x^\infty \sum_{n=1}^N C_n^2 e^{-k_n(z+y)} K(x, z) dz = 0. \quad (3.18)$$

Mit der Definition

$$\phi_n = \int_x^\infty e^{-k_n z} K(x, z) dz$$

kann die vereinfachte GLM-Gleichung (3.18) umgeformt werden, und es ergibt sich:

$$K(x, y) + \sum_{n=1}^N C_n^2 e^{-k_n y} \left(e^{-k_n x} + \phi_n(x) \right) = 0. \quad (3.19)$$

Wenn wir diese Gleichung mit $e^{-k_m y}$ multiplizieren und in der Variable y über das Intervall (x, ∞) integrieren, erhalten wir für $m \in \{1, \dots, N\}$

$$\phi_m(x) + \sum_{n=1}^N C_n^2 \frac{1}{k_n + k_m} e^{-(k_n + k_m)x} \left(e^{-k_n x} + \phi_n(x) \right) = 0.$$

Diese N Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem für ϕ_1, \dots, ϕ_N . Durch algebraisches Lösen dieses Gleichungssystems und Einsetzen in (3.19) erhalten wir $K(x, y)$ und durch

$$u(x) = K_x(x, x)$$

gelangen wir zu einer Darstellung von u .

Eine eingehende Analyse des asymptotischen Verhaltens von u (zu finden z.B. in [15], Abschnitt 3.4) führt dann zum Ergebnis, dass u für jeden der N Eigenwerte λ_n eine solitäre Welle enthält. Für die Geschwindigkeit c_n mit der sich die n -te solitäre Welle nach rechts bewegt gilt:

$$c_n = 4k_n^2.$$

Es stellt sich die Frage, ob u sich rein als Überlagerung von solitären Wellen darstellen lässt, oder ob u auch einen Anteil hat, der keiner solitären Welle entspricht. Folgender Satz gibt darüber Aufschluss:

Satz 3.30. *Wenn die Anfangsbedingung g ein Potential mit verschwindenden Reflexionskoeffizienten und N Eigenwerten ist, dann ist die zugehörige Lösung u des Anfangswertproblems (3.4) als Überlagerung der zu den Eigenwerten $\lambda_n = -k_n^2$ gehörenden N solitären Wellen gegeben. Es gilt folgende Darstellung:*

$$u(x, t) = -4 \sum_{n=1}^N k_n \psi_n(x, t),$$

wobei ψ_n die zu λ_n gehörende Eigenfunktion bezeichne. Insbesondere ist u eine Solitonlösung.

Beweis. Der Beweis findet sich in [15], Theoreme 3.4 und 3.8. □

Wir fassen zusammen: Für ein Potential mit verschwindenden Reflexionskoeffizienten entspricht jeder diskrete Eigenwert einer solitären Welle in der Lösung u . Diese Welle bewegt sich mit einer Geschwindigkeit, die proportional zum Betrag des Eigenwerts ist, nach rechts. Die Lösung u besteht aus einer Überlagerung von endlich vielen solitären Wellen.

Bemerkung 3.31. *Wir haben hier nur einen Spezialfall betrachtet, nämlich dass die Anfangswerte g verschwindende Reflexionskoeffizienten haben. Für weiterführende Ergebnisse zum Zusammenhang von Eigenwerten und Solitonen im Fall, dass die Reflexionskoeffizienten nicht verschwinden, verweisen wir z.B. auf [12], Abschnitt 2.7 oder [19].*

Kapitel 4

Vergleich von Dispersion und Erhaltungsgesetzen

Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden wir zwei wichtige Eigenschaften behandeln, in denen sich die Korteweg-de Vries- und die Benjamin-Bona-Mahony Gleichung unterscheiden. Einerseits untersuchen wir Dispersionseigenschaften und behandeln unter anderem, wie sich die Lösungen der beiden Gleichungen unter dem Einfluss einer hochfrequenten Störung der Anfangswerte verhalten. Andererseits betrachten wir für beide Gleichungen auch mögliche Erhaltungsgesetze genauer. Es ist eine auf den ersten Blick überraschende Tatsache, dass es für die BBM-Gleichung nur drei Erhaltungsgesetze gibt, während für KdV-Gleichung unendlich viele davon existieren.

4.1 Dispersionsrelationen und Phasengeschwindigkeiten

In diesem Abschnitt untersuchen wir die dispersiven Eigenschaften der linearisierten Versionen der KdV- und der BBM-Gleichung. Wir erläutern kurz den Begriff einer dispersiven Wellengleichung anhand der linearisierten KdV-Gleichung

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0. \quad (4.1)$$

Die Funktion

$$u(x, t) = \exp(i(\kappa x - \omega t))$$

ist genau dann eine Lösung von (4.1), wenn die *Dispersionsrelation*

$$\omega = \kappa - \kappa^3 \quad (4.2)$$

erfüllt ist. Aufgrund der Linearität von (4.1) ist in dem Fall mit $u(x, t)$ auch die Funktion

$$\operatorname{Re}(u(x, t)) = \cos(\kappa x - \omega t)$$

eine Lösung von (4.1). Obige Funktion stellt eine Welle dar; der Parameter κ wird dabei als *Wellenzahl* bezeichnet, und ω nennen wir die *Kreisfrequenz* der Welle. Der Ausdruck

$$\theta(x, t) = \kappa x - \omega t$$

ist die *Phase* der Welle. Sei a eine Konstante. Wegen

$$\kappa x - \omega t = a \Leftrightarrow x = \frac{\omega}{\kappa} t + a$$

erkennen wir, dass sich Punkte gleicher Phase mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{\omega}{\kappa} \tag{4.3}$$

ausbreiten. Aufgrund von (4.2) folgt, dass die Phasengeschwindigkeit von der Wellenzahl κ abhängt. Wellen mit unterschiedlicher Wellenzahlen haben also unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

Betrachten wir die Funktion

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \cos(\kappa_i x - \omega_i t).$$

Wenn alle κ_i und ω_i die Dispersionsrelation (4.2) erfüllen, so ist w eine Lösung von (4.1). Da sich Wellen mit unterschiedlicher Wellenzahl mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit ausbreiten, zerfließt w aber im Laufe der Zeit. Dieses Phänomen wird als *Dispersion* bezeichnet.

Auch bei linearisierten Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung

$$v_t + v_x - v_{xxt} = 0 \tag{4.4}$$

tritt Dispersion auf. Man rechnet unmittelbar nach, dass die Funktion

$$v(x, t) = \exp(i(\kappa x - \omega t))$$

genau dann die Gleichung (4.4) löst, wenn

$$\omega = \frac{\kappa}{1 + \kappa^2}$$

gilt. Auch hier hängt die Phasengeschwindigkeit (4.3) von der Wellenzahl κ ab.

Man erkennt, dass sich die Phasengeschwindigkeit für Lösungen der KdV-Gleichung nicht nach unten beschränken lässt. Ursprünglich wurde die KdV-Gleichung eingeführt, um Flachwasserwellen zu beschreiben, welche sich in positive x -Richtung ausbreiten. Für Wellenzahlen κ mit $|\kappa| > 1$ breiten sich Lösungen der Form $u(x, t) = \exp(i(\kappa x - \omega t))$ aber in negative x -Richtung aus. Bei der BBM-Gleichung tritt das nicht auf, denn dort bleibt die Phasengeschwindigkeit durch Null nach unten beschränkt.

Das Phänomen, dass sich Lösungen der linearisierten KdV-Gleichung mit negativer Phasengeschwindigkeit ausbreiten, tritt nicht nur bei Lösungen der Form $u(x, t) = \exp(i(\kappa x - \omega t))$ auf:

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine beliebige Schwartzfunktion und $u(x, t)$ eine klassische Lösung der linearisierten KdV-Gleichung (4.1) mit Anfangswerten f , d.h. u ist dreimal stetig differenzierbar, löst (4.1) punktweise und es gilt $u(\cdot, 0) = f$.

Durch räumliche Fouriertransformation von (4.1) erhalten wir

$$\hat{u}_t + ik\hat{u}_x - ik^3\hat{u} = 0,$$

und somit

$$\hat{u} = \hat{f}(k)\exp(-i(k - k^3)t).$$

Durch Anwendung der inversen Fouriertransformation erhalten wir

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\exp(ikx - i\omega(k)t) dk,$$

mit $\omega(k) := k - k^3$. Die Funktion u lässt sich also als Überlagerung von Wellen der Form $\exp(ik - i\omega t)$ darstellen. Sofern $\widehat{f}(k)$ für $k > 1$ nicht verschwindet, so folgt daraus, dass die Phasengeschwindigkeit $\omega(k)/k$ für gewisse Anteile von u negativ ist. Dieser Sachverhalt lässt sich wie folgt interpretieren: Wir gehen davon aus, dass die Anfangswelle eine Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenzen ist. Durch die räumliche Fouriertransformation wird diese Anfangswelle in ihre Frequenzanteile zerlegt. Für die hochfrequenten Anteile ist die Phasengeschwindigkeit negativ, sie breiten sich also in negativer x -Richtung aus, während die niederfrequenten Anteile in positive x -Richtung transportiert werden.

Ein solches Verhalten ist merkwürdig, da die KdV-Gleichung eigentlich zur Beschreibung von sich in positiver x -Richtung ausbreitender Wellen hergeleitet wurde. Man kann zwar einwenden, dass die KdV-Gleichung für lange Wellen mit kleinen Wellenzahlen hergeleitet wurde, und man daher die Anfangswelle richtig (d.h. ohne hochfrequente Anteile) wählen muss, damit die Gleichung ihre Gültigkeit beibehält. Dennoch führt dieses Phänomen zu Problemen, etwa bei der numerischen Berechnung von Lösungen der KdV-Gleichung. Durch Rundungsfehler können sich etwa künstliche Störungen in der Anfangswelle ergeben, somit können in der Anfangswelle künstliche hochfrequente Anteile enthalten sein, die sich dann in negativer x -Richtung ausbreiten. Die numerische Lösung könnte in so einem Fall künstliche Oszillationen enthalten, und es stellt sich die Frage, ob die numerische Lösung in so einem Fall als Näherungslösung der KdV-Gleichung noch akzeptabel ist, vgl. [3].

Es sei noch erwähnt, dass es bei stark oszillierenden Anfangswellen sogar vorkommen kann, dass die hochfrequenten Anteile der Anfangswelle so in negative x -Richtung zurückgestreut werden, dass die analytische Lösung der linearisierten KdV-Gleichung (4.1) in endlicher Zeit eine Singularität entwickelt und abbricht. Für ein (recht technisches) Beispiel einer Anfangswelle aus $L^2(\mathbb{R})$, für die dieses Phänomen tatsächlich auftritt, verweisen wir auf [3], Abschnitt 2. Im vorigen Kapitel haben wir mit Satz 3.8 die Existenz von Lösungen der KdV-Gleichung sichergestellt. Als Voraussetzung hatten wir aber, dass die Anfangswelle g hinreichend regulär sein muss (in Satz 3.8 etwa $g \in H^4(\mathbb{R})$). Die Anfangswelle aus dem eben erwähnten Beispiel in [3] ist allerdings nur eine Funktion aus $L^2(\mathbb{R})$, somit erhalten wir hier keinen Widerspruch.

Analog zur linearisierten KdV-Gleichung lässt sich auch für eine klassische Lösung v von (4.4) mit Anfangswerten f die Darstellung

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \exp(ikx - i\omega(k)t) dk$$

herleiten, wobei hier ω durch $\omega(k) := \frac{k}{1+k^2}$ definiert ist. Die Funktion $\omega(k)/k$ ist somit nach unten durch Null beschränkt, d.h. alle Wellen, aus denen sich v zusammensetzt, breiten sich mit positiver Phasengeschwindigkeit aus. Es wäre natürlich dennoch denkbar, dass sich hochfrequente Anteile einer Lösung so überlagern, dass die Lösung nach endlicher Zeit abbricht, doch zumindest breiten sich alle Informationen, die in den Anfangswerten enthalten sind, in positive Richtung aus, so wie es auch in der Modellierung angenommen wurde.

4.2 Erhaltungsgesetze

Als nächstes zeigen wir, dass die KdV-Gleichung unendlich viele Erhaltungsgesetze hat, die Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung dagegen nur 3. In diesem Abschnitt stützen wir uns auf [21], sowie auf [22]. Wir gehen bis auf weiteres von der KdV-Gleichung in der Form

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.5)$$

aus. Alle bisherigen Ergebnisse bezüglich Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösung bleiben dabei gültig, siehe auch Bemerkung 3.1.

Wir spezifizieren als allererstes den Begriff Erhaltungsgesetz genauer, vgl. [21]:

Definition 4.1. *Ein Erhaltungsgesetz der Differentialgleichung $\Delta(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0$ in zwei unabhängigen Variablen x und t , sowie einer abhängigen Variable u ist eine Gleichung der Form*

$$T_t + X_x = 0,$$

die für alle klassischen Lösungen u von $\Delta(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0$ erfüllt ist. Falls T und X Polynome in u und den x -Ableitungen von u sind, d.h. $T = T(u, u_x, u_{xx}, \dots, \partial_x^k u)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und $X = X(u, u_x, u_{xx}, \dots, \partial_x^n u)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so nennen wir

$$T_t + X_x = 0$$

ein *polynomielles Erhaltungsgesetz*.

Für ein polynomielles Erhaltungsgesetz besteht T aus endlich vielen Termen der Form $u_0^{a_0} u_1^{a_1} \dots u_j^{a_j}$, wobei u_k für $\partial^k u / \partial x^k$ steht. Der Rang r eines jeden solchen Terms sei definiert als:

$$r = \sum_{k=0}^j (1 + \frac{1}{2}k) a_k.$$

Falls für ein polynomielles Erhaltungsgesetz $T_t + X_x = 0$ die Funktion T nur aus Termen mit Rang r besteht, so nennen wir das Gesetz $T_t + X_x = 0$ ein *polynomielles Erhaltungsgesetz mit Rang r* .

Die obige Definition des Ranges eines polynomiellen Termes ist nicht sonderlich intuitiv, wir werden jedoch sehen, dass es mit dieser Definition des Ranges zu jeder natürlichen Zahl $r \in \mathbb{N}$ ein polynomielles Erhaltungsgesetz der KdV-Gleichung mit Rang r gibt.

Falls u und hinreichend viele x -Ableitungen von u für $|x| \rightarrow \infty$ schnell genug abklingen, so ist für jedes polynomielle Erhaltungsgesetz der Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(u, u_x, u_{xx}, \dots) dx,$$

sofern er existiert, invariant in der Zeit. Dieser Zusammenhang gibt einen Hinweis darauf, warum Erhaltungsgesetze in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen sehr nützlich sind. Größen, welche in der Zeit invariant bleiben, können oft verwendet werden, um etwa die Beschränktheit von Lösungen zu zeigen. Wir erinnern uns z.B. an die Invarianz der H^1 -Norm von Lösungen der BBM-Gleichung (Lemma 2.6). Diese Invarianz haben wir ausgenutzt, um die Lösung in der Zeit fortzusetzen. Solche und ähnliche Überlegungen spielen im Bereich der partiellen Differentialgleichungen oft eine wichtige Rolle.

Offensichtlich ist die KdV-Gleichung $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ selbst ein polynomielles Erhaltungsgesetz der KdV-Gleichung mit Rang 1. Wegen

$$uu_t + u^2 u_x + uu_{xxx} = \frac{1}{2}(u^2)_t + \left(\frac{1}{3}u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 \right)_x$$

ist $uu_t + u^2u_x + uu_{xxx} = 0$ ein polynomielles Erhaltungsgesetz zweiten Ranges. Polynomielle Erhaltungsgesetze der KdV-Gleichung höherer Ordnung existieren zwar gemäß dem nächsten Satz, diese lassen sich aber nicht mehr durch Multiplikation der KdV-Gleichung mit Potenzen von u darstellen. Sei n eine natürliche Zahl und $P(x, t, u, u_x, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n})$ eine nach x und t zweimal stetig differenzierbare Funktion, so ist durch $T = P_x$ und $X = -P_t$ offensichtlich ein Erhaltungsgesetz gegeben. Dies führt zu folgender Definition:

Definition 4.2. *Wir nennen ein Erhaltungsgesetz $T_t + X_x = 0$ trivial, falls es eine in x und t zweimal stetig differenzierbare Funktion P gibt, sodass $T = P_x$ und $X = -P_t$ gilt, andernfalls nennen wir es nichttrivial.*

Wir untersuchen im Folgenden die nichttrivialen polynomiellen Erhaltungsgesetze und zeigen (analog wie in [21]), dass es unendlich viele von ihnen gibt:

Satz 4.3. *Für jede natürliche Zahl r existiert ein nichttriviales polynomielles Erhaltungsgesetz von (4.5) mit Rang r . Dieses Erhaltungsgesetz ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer reellen Zahl und Addition einer x -Ableitung, d.h. Addition einer Funktion P_x , wobei P in x und t zweimal stetig differenzierbar ist.*

Beweis. Wir erinnern uns an die Miura-Transformation aus 3.4.1. Da wir in diesem Kapitel eine KdV-Gleichung mit veränderten Koeffizienten betrachten, muss die Miura-Transformation leicht angepasst werden. Sei dazu v eine Lösung der Gleichung

$$v_t + v^2v_x + v_{xxx} = 0. \quad (4.6)$$

Dann ist

$$u = v^2 \pm (-6)^{\frac{1}{2}}v_x \quad (4.7)$$

eine Lösung von (4.5). Durch die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t, \quad \tilde{x} = x - \frac{3}{2\varepsilon^2}t, \\ u(x, t) &= \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{t}) + \frac{3}{2\varepsilon^2}, \\ v(x, t) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}}w(\tilde{x}, \tilde{t}) + \frac{\sqrt{6}}{2\varepsilon} \end{aligned}$$

wird die Gleichung (4.6), wenn wir die Tilde über den neuen Koordinaten weglassen, zu

$$w_t + \left(w + \frac{1}{6}\varepsilon^2w^2 \right) w_x + w_{xxx} = 0, \quad (4.8)$$

während (4.5) invariant bleibt. Der Faktor $\varepsilon \in (0, 1)$ kann dabei als Skalierungsgröße betrachtet werden; er wird später eine wichtige Rolle spielen. Die Transformation (4.7) (die Variante mit Plus) wird dabei zu

$$u = w + i\varepsilon w_x + \frac{1}{6}\varepsilon^2w^2. \quad (4.9)$$

Die Idee ist nun, zu versuchen, diese Transformation umzukehren. Wir können, ausgehend von (4.9), w mithilfe von u und ε als formale Reihe darstellen: Umformen von (4.9) liefert

$$w = u - i\varepsilon w_x - \frac{1}{6}\varepsilon^2w^2. \quad (4.10)$$

Indem wir diese Darstellung von w rekursiv immer wieder in die rechte Seite einsetzen, erhalten wir eine formale Reihendarstellung von w der Form

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t) \varepsilon^n. \quad (4.11)$$

Die Koeffizienten von a_n sind dabei Polynome in u und den x -Ableitungen von u , wobei jedes a_n Rang $1 + \frac{n}{2}$ hat (Rang im Sinne von Definition 4.1).

Einsetzen von (4.9) in (4.5) liefert für $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\left(1 + i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3} \varepsilon^2 w\right) \left[w_t + \left(w + \frac{1}{6} \varepsilon^2 w^2\right) w_x + w_{xxx}\right] = 0.$$

Daraus folgt mit der Darstellung (4.11), dass der Ausdruck in eckigen Klammern verschwindet, also dass das durch (4.9) definierte w die Gleichung (4.8) erfüllt (man beachte, dass wir mit einer formalen Reihe rechnen, somit können wir den in der runden Klammer stehenden Differentialoperator mit der Reihenbildung vertauschen). Somit erfüllen

$$T = w \quad \text{und} \quad X = \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{18} \varepsilon^2 w^3 + w_{xx} \quad (4.12)$$

die Gleichung $T_t + X_x = 0$. Durch Einsetzen von (4.11) in (4.12) erhalten wir (da wir mit formalen Reihen rechnen, können wir Differentiation mit der Reihe vertauschen) :

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t) \varepsilon^n,$$

und

$$X = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t) \varepsilon^n \right)^2 + \frac{1}{18} \varepsilon^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, t) \varepsilon^n \right)^3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} a_n(x, t) \varepsilon^n.$$

Mithilfe der Cauchy-Produktformel können wir diesen Ausdruck umformen zu:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} b_n(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} a_n(x, t) \right) \varepsilon^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{18} c_n(x, t) \varepsilon^{n+2},$$

wobei b_n und c_n im Sinne des Cauchy-Produktes definiert sind:

$$b_n := \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \quad \text{und} \quad c_n := \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}.$$

Offensichtlich sind auch b_n und c_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Polynome in u und den x -Ableitungen von u .

Da u und alle x -Ableitungen von u unabhängig von ε sind, müssen aufgrund der Gleichung $T_t + X_x = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Koeffizienten von ε^n in T und X ein polynomielles Erhaltungsgesetz von (4.5) bilden. Wir erhalten somit für jede natürliche Zahl n ein Erhaltungsgesetz $\partial_t T_n + \partial_x X_n = 0$ mit Rang $1 + \frac{n}{2}$.

Als nächstes muss gezeigt werden, dass für jedes gerade n das dazugehörige Erhaltungsgesetz $\partial_t T_n + \partial_x X_n = 0$ nichttrivial ist. Es reicht zu zeigen, dass T_n einen Term enthält, der rein von u abhängt, da ein solcher Term niemals durch Ableiten nach x entstehen kann. Dazu bemerken wir, dass wir, wenn wir nur an den rein von u -abhängigen Termen interessiert sind, in der Rekursions (4.10) den Summanden mit w_x weglassen können, da

durch diesen Term keine nur von u abhängigen Terme entstehen können. Die rein von u abhängigen Terme entstehen also auch, wenn wir obige Rekursion mit der Gleichung

$$w = u - \frac{1}{6}\varepsilon^2 w^2$$

durchführen. Wenn wir analog zu oben w rekursiv als Potenzreihe in ε entwickeln, so erkennen wir, dass genau die geraden natürlichen Zahlen als Exponenten von ε auftreten, und die Koeffizienten der ε^n Polynome in u sind, und daher insbesondere nur von u abhängen. Dies beweist die Existenzaussage des Satzes.

Für die Eindeutigkeitsaussage verweisen wir auf [18]. \square

Die im obigen Beweis hergeleiteten Erhaltungsgesetze gelten im Allgemeinen natürlich nur für solche Lösungen von (4.5), die glatt genug sind, damit all die formalen Rechnungen, die wir im obigen Beweis gemacht haben, sinnvoll sind. Wir haben uns im letzten Teil des Beweises aus gutem Grund nur für die Erhaltungsgesetze $\partial_t T_n + \partial_x X_n = 0$ mit geraden n interessiert:

Lemma 4.4. *Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Dann ist $\partial_t T_n + \partial_x X_n = 0$ ein triviales Erhaltungsgesetz.*

Der Beweis dieses Lemmas findet sich in [21].

Für weitere Details zu den Erhaltungsgesetzen der KdV-Gleichung verweisen wir auf [18] und [21]. Dort findet sich insbesondere eine Tabelle mit den ersten zehn polynomiellen Erhaltungsgesetzen. Wir bemerken noch, dass die im Beweis von Satz 4.3 definierte Rekursion theoretisch dazu verwendet werden kann, um zu jedem $n \in \mathbb{N}$ das polynomielle Erhaltungsgesetz mit Rang n herzuleiten. Praktisch ist das jedoch sehr umständlich. In [18] wird eine systematische Methode präsentiert, um solche Erhaltungsgesetze herzuleiten.

Aus dem obigen Satz folgt, dass die KdV-Gleichung unendlich viele Erhaltungsgesetze zulässt. Es stellt sich nun die Frage nach den Erhaltungsgesetzen der Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung. Hierbei beschränken wir uns im Folgenden nicht nur auf polynomielle Erhaltungsgesetze, sondern lassen allgemein Erhaltungsgesetze

$$T_t + X_x = 0$$

zu, bei denen T in stetig differenzierbarer Weise von x, u , und endlich vielen x -Ableitungen von u abhängt. Es stellt sich heraus, dass die BBM-Gleichung genau drei nichttriviale Erhaltungsgesetze dieser Form hat. Zur Präzisierung dieser Aussage benötigen wir noch den Begriff der *Unabhängigkeit von Erhaltungsgesetzen*:

Definition 4.5. *Falls eine endliche Anzahl von verschiedenen Erhaltungsgesetzen $\partial_t T_1 + \partial_x X_1 = 0, \dots, \partial_t T_n + \partial_x X_n = 0$ gegeben ist, so heißen diese n Erhaltungsgesetze abhängig, falls es eine in x und t zweimal stetig differenzierbare Funktion P und reelle Zahlen c_1, \dots, c_n , von denen mindestens eine von Null verschieden sei, gibt, mit*

$$\sum_{i=1}^n c_i T_i = P_x.$$

Andernfalls nennen wir die Erhaltungsgesetze unabhängig.

Man beachte, dass aus der Unabhängigkeit einer Menge M von Erhaltungsgesetzen folgt, dass alle Gesetze in M nichttrivial sind (man setze für P die Nullfunktion ein). Weiters gilt, dass kein Gesetz aus M durch eine Linearkombination der anderen Gesetze und eines trivialen Erhaltungsgesetzes erzeugt werden kann.

Es gilt folgendes Resultat:

Satz 4.6. *Für die Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung existieren (bis auf Multiplikation mit reellen Zahlen und Addition von x -Ableitungen) genau drei unabhängige Erhaltungsgesetze, in denen T in stetig differenzierbarer Weise von x, u , und endlich vielen x -Ableitungen von u abhängt. Diese Erhaltungsgesetze sind gegeben durch:*

$$\begin{aligned} u_t - \left(u_{xt} + \frac{1}{2}u^2 \right)_x &= 0, \\ \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 \right)_t - \left(uu_{xt} + \frac{1}{3}u^3 \right)_x &= 0, \\ \left(\frac{1}{3}u^3 \right)_t + \left(u_t^2 - u_{xt}^2 - u^2u_{xt} - \frac{1}{4}u^4 \right)_x &= 0. \end{aligned}$$

Durch Rechnung überprüft man, dass die obigen drei Gleichungen tatsächlich Erhaltungsgesetze der BBM-Gleichung sind. Zu beweisen, dass dies (bis auf Multiplikation mit einer reellen Zahl und Addition einer x -Ableitung) die einzigen unabhängigen Erhaltungsgesetze sind, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Für den Beweis dazu verweisen wir auf [22].

Dieses Ergebnis ist insbesondere bemerkenswert, da es auch für solche T gilt, die nicht als Polynom in x, t, u und endlich vielen x -Ableitungen von u darstellbar sind.

4.3 Zusammenfassung und abschließende Bemerkungen

Zum Schluss dieser Arbeit wollen wir noch einmal kurz die wichtigsten Dinge rekapitulieren. Wir haben gesehen, dass sowohl die Korteweg-de Vries-, als auch die Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung als Modelle für lange Wellen mit geringer Amplitude dieselbe physikalische Berechtigung haben. Beide Gleichungen sind, wie wir gesehen haben, im mathematischen Sinne wohlgestellt, d.h. bei vernünftig gewählten Anfangswerten besitzen beide Gleichungen eindeutige klassische Lösungen, und diese Lösungen hängen auch stetig von den Anfangswerten ab.

Wir haben gesehen, dass sich die Benjamin-Bona-Mahony-Gleichung mathematisch etwas einfacher behandeln lässt, als die KdV-Gleichung. Insbesondere stützt sich der in dieser Arbeit wiedergegebene Beweis zur Existenz von Lösungen der KdV-Gleichung stark auf die Ergebnisse zur BBM-Gleichung. Doch dafür hat die KdV-Gleichung die schöne Eigenschaft, dass sich ihre Lösungen zu gegebenen Anfangswerten prinzipiell konkret berechnen lassen. Die KdV-Gleichung war dabei einer der Ausgangspunkte zur Entwicklung der inversen Streutheorie, die nicht nur im Rahmen der KdV-Gleichung, sondern auch in einigen anderen Differentialgleichungen eine wichtige Rolle spielt.

Des Weiteren gilt, dass für die KdV-Gleichung unendlich viele Erhaltungsgesetze existieren. Es wird dabei vermutet, dass dies auch der Grund für die Existenz von Solitonenlösungen der KdV-Gleichung ist. Für weitere Details zur KdV-Gleichung verweisen wir auf die vielfältige Literatur zu dem Thema.

Im Gegensatz zur KdV-Gleichung hat die BBM-Gleichung im Wesentlichen nur drei Erhaltungsgesetze. Soweit es dem Autor bekannt ist, sind auch keine Solitonenlösungen für die BBM-Gleichung bekannt. In [9] wird z.B. argumentiert, dass es keine Solitonenlösung der BBM-Gleichung gibt, die sich als Überlagerung von zwei solitären Wellen darstellen lässt.

Ein großer Themenbereich, den wir in dieser Arbeit nicht behandelt haben, ist die Numerik zu den beiden Gleichungen. Wir haben zwar angedeutet, dass die KdV-Gleichung für Anfangswerte mit hochfrequenten Anteilen numerisch instabil sein könnte, doch wir haben keine weiterführenden numerischen Simulationen durchgeführt. Im Allgemeinen wäre die Frage, welche der beiden Gleichungen sich numerisch besser behandeln lässt, wohl umfangreich genug, um als Thema für eine weitere Bachelorarbeit dienen zu können. Vom allgemeinen Standpunkt aus gesehen, und insbesondere ohne numerische Simulationen, ist es schwierig bis unmöglich zu sagen, welche der beiden Gleichungen zu bevorzugen ist. Aus mathematischer Sicht zumindest ist die Korteweg-de Vries-Gleichung als vollständig integrables System mit Solitonenlösungen aus Sicht des Autors interessanter.

Zum Abschluss möchte ich Professor Arnold für die geduldige Betreuung dieser Arbeit meinen Dank aussprechen. Ebenso möchte ich in besonderer Weise meine Familie erwähnen, die mir immer zur Seite stand, und für deren umfangreiche Unterstützung ich zutiefst dankbar bin.

Literaturverzeichnis

- [1] ARNOLD, A.: *Nichtlineare partielle Differentialgleichungen*. Vorlesungsskript an der TU Wien, 2019.
- [2] ARNOLD, A.: *Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen*. Vorlesungsskript an der TU Wien, 2020.
- [3] BENJAMIN, T.B., J.L. BONA und J.J. MAHONY: *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems*. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 272(1220):p. 47–78, 1972.
- [4] BESTEHORN, M.: *Hydrodynamik und Strukturbildung*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [5] BLÜMLINGER, M.: *Analysis 3*. Vorlesungsskript an der TU Wien, 2017.
- [6] BONA, J.L. und R. SMITH: *The Initial-Value Problem for the Korteweg-De Vries Equation*. Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 278(1287):p. 555–601, 1975.
- [7] BREZIS, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [8] BROER, L.J.F.: *On the interaction of non-linearity and dispersion in wave propagation. I. Boussinesq's equation*. Appl. sci. Res B, 11:p. 273–285, 1964.
- [9] BRYAN, A.C. und A.E.G. STUART: *Solitons and the Regularized Long Wave Equation: A Nonexistence Theorem*. Chaos, Solitons & Fractals, 7(11):p. 1881–1886, 1996.
- [10] COHEN, A.: *Existence and regularity for solutions of the Korteweg-de Vries equation*. Arch. Rat. Mech. Anal., 71(2):p. 143–175, 1979.
- [11] DEIFT, P. und E. TRUBOWITZ: *Inverse scattering on the line*. Comm. Pure and Appl. Math., XXXII:p. 121–251, 1979.
- [12] ECKHAUS, W. und A. VAN HARTEN: *The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons. An introduction*. North-Holland Publishing Company, 1981.
- [13] EVANS, L.C.: *Partial Differential Equations*, Band 19. American Mathematical Society, 1997.
- [14] GARDNER, C.S., J.M. GREENE, M.D. KRUSKAL und R.M. MIURA: *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*. Phys. Rev. Lett, 19:p. 1095–1097, 1967.
- [15] GARDNER, C.S., J.M. GREENE, M.D. KRUSKAL und R.M. MIURA: *Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. VI*. Comm. Pure Appl. Math., 27:p. 97–133, 1974.

- [16] JÜNGEL, A.: *Partielle Differentialgleichungen*. Vorlesungsskript an der TU Wien, 2017.
- [17] KALTENBÄCK, M.: *Analysis 3 für Technische Mathematik*. Vorlesungsskript an der TU Wien, 2018.
- [18] KRUSKAL, M.D., R.M. MIURA, C.S. GARDNER und N.J. ZABUSKY: *Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. V*. J. Math. Phys., 11(3):p. 952–960, 1970.
- [19] LAX, P.D.: *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*. Comm. Pure App. Math., 21:p. 467–490, 1968.
- [20] MIURA, R.M.: *The Korteweg-de Vries equation: A survey of results*. SIAM Review, 18(3):p. 412–459, 1976.
- [21] MIURA, R.M., C.S. GARDNER und M.D. KRUSKAL: *Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. II*. J. Math. Phys., 9(9):1204–1209, 1968.
- [22] OLVER, P.J.: *Euler operators and conservation laws of the BBM equation*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 85:p. 143–160, 1979.
- [23] TODA, M.: *Nonlinear Waves and Solitons*. Kluwer Academic Publishers, 1989.