Gelfand-Tripel und der verallgemeinerte Spektralsatz

Claudia Winklmayr (1005896)

30.10.2015

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit behandelt das Thema der sogenannten *Rigged Hilbert Spaces* oder *Gelfand-Tripel* und orientiert sich dabei in großen Teilen an [G](Gelfand/Vilenkin: *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen). Bd. 4*). Ein Gelfand-Tripel ist ein Tripel aus einem Hilbertraum H, einem nuklearen dichten Teilraum X des Hilbertraums und dem Dualraum X' des Raumes X. Diese drei Räume werden durch spezielle Einbettungen miteinander verbunden und erlauben es das Konzept der Spektralzerlegung linearer Operatoren zu verallgemeinern.

Im ersten Kapitel werden einige wichtige Begriffe und Resultate aus der Funktionalanalysis wiederholt, etwa zu topologischen Vektorräumen und Hilberträumen. Auf dieser Grundlage werden wir dann das direkte Integral von Hilberträumen sowie das Konzept abzählbarer Hilberträume behandeln.

Im zweiten Kapitel werden wir einige bekannte Resultate zu linearen Operatoren auf normierten Räumen und Hilberträumen wiederholen und insbesondere den Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren aufstellen. Von dort aus entwickeln wir dann den Begriff des nuklearen Operators und beweisen einige Resultate zu dessen Charakterisierung. Zum Schluss führen wir den Begriff des verallgemeinerten Eigenvektors ein, der eine wesentliche Rolle für die Verallgemeinerung des Spektralsatzes spielt.

Im dritten Kapitel definieren wir nukleare Räume und damit schließlich die Gelfand-Tripel. Mithilfe der Identifikation eines Hilbertraums mit einem direkten Integral können wir schließlich einen verallgemeinerten Spektralsatz beweisen, der besagt, dass jeder selbstadjungierte (oder unitäre) Operator, der auf einem Gelfand-Tripel definiert ist, ein vollständiges System verallgemeinerter Eigenvektoren besitzt.

Das Konzept der Gelfand-Tripel spielt besonders in der theoretische Physik eine wichtige Rolle, da mithilfe des verallgemeinerten Spektraltheorems die Entwicklung quantenmechnischer Operatoren in verallgemeinerte Eigenzustände gewährleistet wird und so auch die häufig verwendete Bra-Ket-Notation mathematisch gerechtfertigt werden kann. Im letzten Abschnitt wollen wir einige dazu benötigte Überlegungen grob skizzieren.

Kapitel 1

Begriffe

In diesem Kapitel erinnern wir an einige wesentliche Konzepte aus der Analysis und Funktionalanalysis, die die Grundlage für die weiterführenden Resultate dieser Arbeit bilden. Dies beinhaltet einerseits bekannte Sätze und Definitionen über Hilberträume und topologische Vektorräume. Weiters werden wir abzählbare Hilberträume einführen und das Prinzip des direkten Integrals von Hilberträumen vorstellen.

1.1 Grundlagen

Dieser Abschnitt beinhaltet grundlegende Definitionen und Sätze über topologische Vektorräume und ihre Dualräume. Die Darstellung orientiert sich dabei im wesentlichen an den Quellen [F] und [PDG].

1.1.1 Definition Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, dann heißt eine Abbildung $\|.\| : X \to [0, \infty)$ *Norm*, wenn für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

(i) $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Ein Paar $(X, \|.\|)$ bestehend aus einem Vektorraum und einer Norm heißt *normierter Raum*. Falls in einem normierten Raum alle Cauchy-Folgen konvergieren, so spricht man von einem *vollständigen normierten Raum* oder einem *Banachraum*.

1.1.2 Definition Sei X ein Vektorraum und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Dann heißt X ein *topologischer Vektorraum*, wenn die Abbildungen

$$+ : \begin{cases} X \times X \to X \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases} \quad \cdot : \begin{cases} \mathbb{C} \times X \to X \\ (\lambda, y) \mapsto \lambda \cdot x \end{cases}$$

stetig sind. Dabei ist X versehen mit der Topologie $\mathcal{T}$, $X \times X$ mit der Produkttopologie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$, $\mathbb{C}$ mit der euklidischen Topologie $\mathcal{E}$ und $\mathbb{C} \times X$ mit der Produktopologie $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$.

Bemerkung: Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und $x \in X, \epsilon > 0$. Wir bezeichnen mit $U_\epsilon(x)$ die offene ϵ-Kugel um x d.h. $U_\epsilon(x) = \{y \in X : \|x - y\| < \epsilon\}$. Analog definieren wir die abgeschlossene ϵ-Kugel um x durch $K_\epsilon(x) = \{y \in X : \|x - y\| \leq \epsilon\}$. Die *von der Norm induzierte Topologie auf* X (bzw. *Normtopologie*) besteht gerade aus allen offenen Kugeln $\mathcal{T}_{\|.\|} = \{U_\epsilon(x), x \in X, \epsilon > 0\}$.

1.1.3 Lemma *Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und sei $\mathcal{T}_{\|.\|}$ die von der Norm induzierte Topologie. Dann ist $(X, \mathcal{T}_{\|.\|})$ ein topologischer Vektorraum.*

Beweis Sei $y_1 \in U_\epsilon^X(x_1)$ und $y_2 \in U_\epsilon^X(x_2)$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung:

$$\|(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)\| = \|(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| \leq 2\epsilon$$

und damit $U_\epsilon^X(x_1) + U_\epsilon^X(x_2) \subseteq U_{2\epsilon}^X(x_1 + x_2)$ weshalb die Addition stetig ist.
Für den Nachweis der Stetigkeit der Multiplikation mit Skalaren sei $\beta \in U_\epsilon^{\mathbb{C}}(\alpha)$ und $y \in U_\epsilon^X(x)$. Wegen

$$\|\alpha x - \beta y\| = \|\alpha(x - y) + (\alpha - \beta)y\| \leq |\alpha|\|(x - y)\| + |(\alpha - \beta)|\|y\| \leq |\alpha|\epsilon + \epsilon(\|x\| + \epsilon)$$

gilt $U_\epsilon^{\mathbb{C}}(\alpha)U_\epsilon^X(x) \subseteq U_{\epsilon(|\alpha|+\|x\|+\epsilon)}(\alpha x)$. □

1.1.4 Definition Ein topologischer Vektorraum, heißt *lokalkonvex*, falls er eine Nullumgebungsbasis besitzt, die nur aus konvexen Mengen besteht.

Bemerkung: Da offene ϵ-Kugeln stets konvex sind, ist jeder von einer Norm induzierte topologische Vektorraum lokalkonvex.

1.1.5 Definition Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $p : X \to [0, \infty)$, die alle Eigenschaften aus Definition 1.1.1 außer $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ erfüllt, heißt *Seminorm*. Eine Familie $(p_i)_{i \in I}$ von Seminormen heißt *separierend*, wenn $\bigcap_{i \in I} \ker(p_i) = \{0\}$.

Bemerkung: Mithilfe einer separierenden Familie von Seminormen, kann auf einem Vektorraum X stets eine Topologie erzeugt werden, die ihn zu einem lokalkonvexen Vektorraum macht. Eine Nullumgebungsbasis ist dann gegeben durch

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in X : p_i(x) < \epsilon_i\}, \quad m \in \mathbb{N}, \epsilon_i > 0 \right\}.$$

Für den Beweis siehe: [F] Satz 5.1.4.

1.1.6 Definition Sei X ein topologischer Vektorraum. Die Menge der bezüglich der Topologie stetigen linearen Funktionale $f : X \to \mathbb{C}$ wird *(topologischer) Dualraum* von X genannt und mit X' bezeichnet.

Im folgenden benötigen wir diese Charakterisierungen stetiger Funktionale:

1.1.7 Lemma *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum und $f : X \to \mathbb{C}$ linear und $f \neq 0$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) f *ist stetig.*

(ii) $\ker(f)$ *ist abgeschlossen.*

(iii) *Es existiert eine Nullumgebung* U*, sodass* $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ *beschränkt ist.*

Beweis Siehe [F] Proposition 2.1.14 □

1.1.8 Definition Sei wieder X ein topologischer Vektorraum. Mit $X^\times$ bezeichnen wir die Menge der stetigen *anti*linearen (oder *konjugiert linearen*) Funktionale. D.h. die Menge der $g : X \to \mathbb{C}$, die bezüglich der Topologie stetig sind und erfüllen: $g(\alpha x+\beta y) = \overline{\alpha} g(x) + \overline{\beta} g(y), \alpha, \beta \in \mathbb{C}, x, y \in X$. Die Abbildung $x \mapsto \overline{x}$ bezeichnet die komplexe Konjugation.

Ist X ein normierter Raum, dann kann für ein $f \in X'$ durch

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| = 1\} \tag{1.1.1}$$

die sogenannte *Abbildungsnorm* definiert werden. Damit wird auch X' zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum.

Bemerkung: Für die Auswertung eines Funktionals $f \in X'$ an einem Element $x \in X$ schreiben wir manchmal auch

$$\langle f, x\rangle := f(x)$$

und bezeichnen $\langle f, x\rangle$ als *duales Paar.*

Im Folgenden stellen wir ein besonders prominentes Raum-Dualraum-Paar vor: Testfunktionen und Distributionen. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf [PDG] verwiesen.

Beispiel: Für eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ verstehen wir unter den Testfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$ die Menge $C_{00}^\infty = \{f \in C^\infty(\Omega) : \mathrm{supp}(f) \text{ ist kompakt in } \Omega\}$. Dabei ist $C^\infty(\Omega)$ die Menge aller auf Ω beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen und $\mathrm{supp}(f) = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$. Die Menge der Testfunktionen ist ein lokalkonvexer Raum, denn für eine kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ und $\mathcal{D}_K(\Omega) := \{f \in C_{00}^\infty : \mathrm{supp}(f) \subset K\}$ können wir eine Familie von Seminormen mittels:

$$p_m(f) := \sup_{k\leq m} \sup_{x\in K} |f^{(j)}(x)| \quad m \in \mathbb{N}$$

definieren. Wegen $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K\subset\Omega \text{ kompakt}} \mathcal{D}_K(\Omega)$ wird auch $\mathcal{D}(\Omega)$ damit zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum.

Die Menge der *Distributionen* $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist die Menge aller bezüglich der oben beschriebenen Topologie stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{D}(\Omega)$. Die Menge der Distributionen unterteilt sich weiter in die Mengen der *regulären* und der *singulären* Distributionen. Reguläre Distributionen sind solche, die durch lokal integrierbare Funktionen dargestellt werden können. D.h. es gibt $f \in L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} :$ für alle kompakten Mengen $K \subseteq \Omega :$ $\int_K |f| < \infty\}$ so, dass

$$u(\phi) = \langle u, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx \tag{1.1.2}$$

Das bekannteste Beispiel einer singulären Distribution ist die *Dirac'sche δ-Distribution* definiert durch: $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$. Mit δ_a bezeichnen wir die verschobene δ-Distribution, definiert durch $\langle \delta_a, \phi \rangle = \phi(a)$.

1.2 Skalarprodukt und Hilberträume

Dieser Abschnitt behandelt einige grundlegende Definitionen und Resultate über Hilberträume. So etwa die Ungleichung von Cauchy-Schwarz, die Definition von Orthonormalsystemen und Orthonormalbasen sowie die Entwicklung in Fourierreihen. Als Quelle dient vornehmlich Kapitel 3 in [F].

1.2.1 Definition Sei X ein Vektorraum. Eine Abbildung $(.,.) : X \times X \to \mathbb{C}$ heißt *inneres Produkt* oder *Skalarprodukt*, wenn für alle $x, y, z \in X$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

(i) $(x, x) \geq 0$ und $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

(ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

(iii) $(x + y, z) = (x, y) + (x, z)$ und $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

Bemerkung: Aus *(ii)* und *(iii)* folgt, dass ein Skalarprodukt im zweiten Argument *konjugiert linear* oder *antilinear* ist. Das heißt: $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{(\alpha y + \beta z, x)} = \overline{\alpha(y, x)} + \overline{\beta(z, x)} = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$.

Da $(x, x) \geq 0$ ist die Abbildung $x \mapsto \sqrt{(x, x)}$ wohldefiniert und es lässt sich leicht nachrechnen, dass sie die Eigenschaften einer Norm erfüllt. Damit ist also jeder Vektorraum mit innerem Produkt auch ein normierter Raum.

1.2.2 Definition Sei H ein Raum mit innerem Produkt und sei wieder $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$. Ist $(H, \|.\|)$ ein Banachraum, dann heißt H *Hilbertraum.*

Bemerkung: Insbesondere kann jeder Vektorraum mit innerem Produkt zu einem Hilbertraum vervollständigt werden. Eine solche Vervollständigung ist bis auf Isomorphie eindeutig. Für den Beweis siehe [F] Proposition 3.1.8.

1.2.3 Lemma *Sei X ein Raum mit innerem Produkt und $x, y \in X$. Dann gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:* $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$.

Beweis Für $y = 0$ ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. Sei also $y \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$0 \leq \|x - \lambda y\|^2 = (x - \lambda y, x - \lambda y) = \|x\|^2 - \lambda(y, x) - \overline{\lambda}(x, y) + |\lambda|^2\|y\|^2 \tag{1.2.3}$$

Setzen wir nun $\lambda = \frac{(x,y)}{\|y\|^2}$ so wird (1.2.3) zu $0 \leq \|x\|^2 - \frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2}$. Durch Umformen und Wurzelziehen ist die Ungleichung bewiesen. □

In Räumen mit innerem Produkt lässt sich der Begriff der Orthogonalität einführen:

1.2.4 Definition Sei X ein Vektorraum mit innerem Produkt. Zwei Elemente $x, y \in X$ heißen *orthogonal*, wenn $(x, y) = 0$. Man schreibt $x \perp y$. Für eine Menge $E \subseteq X$ definiert man das *orthogonale Komplement* durch:

$$E^{\perp} = \{x \in X : x \perp e \quad e \in E\}.$$

1.2.5 Definition Sei H ein Hilbertraum. Eine Teilmenge $M \subseteq H$ heißt *Orthonormalsystem (ONS)*, wenn für alle $u, v \in M$ gilt $(u, v) = \delta_{uv}$.[1]
Ein Orthonormalsystem M heißt *vollständig* oder auch *Orthonormalbasis (ONB)*, wenn es kein echt größeres ONS gibt. D.h. wenn für alle Orthonormalsysteme $\tilde{M} \in H$ mit $M \subseteq \tilde{M}$ schon gilt $\tilde{M} = M$.

Bemerkung: Sei $M = \{u_i, i \in I\}$ ein Orthonormalsystem, dann sind die Elemente von M linear unabhängig, da ja aus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ bereits folgt $\lambda_k = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i, u_k) = 0$.
Zwar sind Orthonormalbasen nur für endlichdimensionale Hilberträume auch Vektorraumbasen, dennoch gilt für unendliche Hilberträume ein ähnliches Prinzip: Die Entwicklung in Fourierreihen. Im Folgenden präsentieren wir die dazu notwendigen Ergebnisse, die Beweise finden sich in [F].

1.2.6 Lemma *Sei H ein Hilbertraum und $M \subseteq H$ ein ONS. Dann existiert eine Orthonormalbasis $\tilde{M}$ mit $M \subseteq \tilde{M}$. Insbesondere existieren also in jedem Hilbertraum Orthonormalbasen.*

Beweis Anwendung des Lemmas von Zorn. Siehe [F] Lemma 3.3.2. □

Ein klassisches Beispiel eines Hilbertraums ist die Menge der reell- oder komplexwertigen, quadratisch summierbaren Folgen über einer Indexmenge I: $\ell^2(I) = \{(x_i)_{i \in I} : \sum_{i \in I} x_i^2 < \infty)$. Als Skalarprodukt dient $(x, y)_{\ell^2} = \sum_{i \in I} x_i y_i$ (bzw.:$\sum_{i \in I} x_i \overline{y_i}$). Das folgende Lemma zeigt, dass wir mithilfe von Orthonomalbasen jeden Hilbertraum H mit dem $\ell^2(I)$ über einer gewissen Indexmenge I in Beziehung setzen können.

1.2.7 Lemma *Sei H ein Hilbertraum und $M = \{u_i, \quad i \in I\}$ ein Orthonormalsystem. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) M ist eine Orthonormalbasis.

(ii) $\operatorname{span}\{u_i, \quad i \in I\}$ *liegt dicht in H.*

[1] δ_{uv} bezeichnet das Kronecker-Delta, welches durch $\delta_{uv} = \begin{cases} 1 & , u = v \\ 0 & , u \neq v \end{cases}$ definiert wird.

(iii) Sei $h \in H$ und bezeichne

$$\hat{h} : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ k \mapsto (h, u_k) \end{cases}$$

Dann gilt $\hat{h} \in \ell^2(I)$ für alle $h \in H$ und $\|h\|_H = \|\hat{h}\|_{\ell^2}$.

(iii) Mit der obigen Bezeichnung gilt für alle $g, h \in H : (g, h)_H = (\hat{g}, \hat{h})_{\ell^2}$ und

$$h = \sum_{k \in I} \hat{h}(k) u_k = \sum_{k \in I} (h, u_k) u_k \tag{1.2.4}$$

Die Gleichung (1.2.4) *nennen wir die Entwicklung des Elements h in seine Fourierreihe.*

Beweis [F] Satz 3.3.3 und Korollar 3.3.4. □

Es gehört zu den wichtigsten Eigenschaften eines Hilbertraums, dass wir ihn gewissermaßen mit seinem Dualraum identifizieren können. Die Grundlage dafür liefert der folgende Satz.

1.2.8 Satz *(von Riesz) Sei H ein Hilbertraum und H' sein Dualraum. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : \begin{cases} H \to H' \\ y \mapsto f_y := (., y) \end{cases}$$

eine bijektive konjugiert lineare Isometrie.

Beweis Aus den Eigenschaften des Skalarprodukts folgt sofort, dass f_y ein lineares Funktional und Φ eine konjugiert lineare Abbildung ist.
Die Injektivität von Φ folgt aus $f_{y_1}(x) = f_{y_2}(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow (x, y_1) = (x, y_2) \quad \forall x \in X \Rightarrow (x, y_1 - y_2) = 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow y_1 - y_2 = 0$.
Um die Surjektivität von Φ zu zeigen, sei $f \in X'$. Ist f das Nullfunktional, so gilt $f(x) = (x, 0)$. Sei also $f \neq 0$, dann ist aber $\ker f \neq H$ und wegen Lemma 1.1.7 ist $\ker f$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von H. Insbesondere existiert daher $w \in (\ker f)^\perp \quad w \neq 0$. Aus $f(f(x)w - f(w)x) = f(x)f(w) - f(w)f(x) = 0$ folgt $f(x)w - f(w)x \in \ker f \quad \forall x \in X$. Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (f(x)w - f(w)x, w) \Leftrightarrow \\ (f(x)w, w) &= (f(w)x, w) \Leftrightarrow \\ f(x) &= \left(x, \frac{\overline{f(w)}w}{(w, w)} \right). \end{aligned}$$

Die Isometrieeigenschaft ergibt sich daraus, dass einerseits aufgrund der Ungleichung von Cauchy-Schwarz stets gilt $|f_y(x)| = |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$ also $\|f_y\| \leq \|y\|$. Da aber außerdem gilt $|f_y(y)| = (y, y) = \|y\|^2$, folgt die Gleichheit $\|f_y\| = \|y\|$. □

Bemerkung: Aufgrund der Identifizierung eines Hilbertraums mit seinem Dualraum, können wir die Norm eines Elements $x \in H$ auch in Analogie zur Abbildungsnorm formulieren:

$$\|x\| = \sup\{|(x,y)| : y \in H, \|y\| \leq 1\} \tag{1.2.5}$$

Aufgrund der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt $|(x,y)| \leq \|x\|\|y\| \leq \|x\|$. Für die Umkehrung wähle $y = \frac{x}{\|x\|}$. Damit gilt $(x,y) \geq \|x\|$, wodurch die Gleichheit gezeigt ist.

1.3 Direkte Summen und Integrale von Hilberträumen

Auf den letzten Seiten haben wir gesehen, wie wir mittels der Entwicklung in Fourierreihen einen Hilbertraum isometrisch auf den Raum ℓ^2 der quadratisch summierbaren Folgen abbilden können. In diesem Abschnitt wollen wir diese Beziehung von einer etwas anderen Seite betrachten und schließlich weiter verallgemeinern. Die folgenden Überlegungen können auch in Kapitel 9 Nr.3 in [Ma] nachgelesen werden. Wir beginnen mit dem Begriff der *direkten Summe von Hilberträumen*:

1.3.1 Definition Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $H_1, H_2, \ldots H_n$ Hilberträume. Mit $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir die Menge der Tupel $\mathfrak{h} = (h_1, h_2, \ldots h_n)$ mit $h_i \in H_i \quad i \in \{1 \ldots n\}$. Auf H definieren wir Addition, Multiplikation mit Skalaren sowie ein inneren Produkt und die zugehörige Norm punktweise und zwar im folgenden Sinne:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} + \mathfrak{g} &= (h_1, h_2, \ldots h_n) + (g_1, g_2, \ldots g_n) = (h_1 + g_1, h_2 + g_2, \ldots h_n + g_n) \\
\alpha\mathfrak{h} &= \alpha(h_1, h_2, \ldots h_n) = (\alpha h_1, \alpha h_2, \ldots \alpha h_n) \\
(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})_{\mathfrak{H}} &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i (h_i, g_i)_{H_i} \quad \mu_i \geq 0 \\
\|\mathfrak{h}\|_{\mathfrak{H}}^2 &= (\mathfrak{h}, \mathfrak{h})_{\mathfrak{H}} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (h_i, h_i)_{H_i} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \|h_i\|_{H_i}^2 \quad \mu_i \geq 0
\end{aligned}$$

Die $\{\mu_i\}$ sind nichtnegative Gewichte. Im einfachsten Fall wählen wir einfach $\mu_i = 1 \quad \forall i$. Wir nennen den so konstruierten Raum $\mathfrak{H}$ die *direkte Summe* der Hilberträume $\{H_i\}_{i=1}^n$ und schreiben:

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i. \tag{1.3.6}$$

Bemerkung: Offensichtlich ist der so definierte Raum $\mathfrak{H}$ auch selbst ein Hilbertraum. Die Vollständigkeit folgt sogleich aus der Vollständigkeit der einzelnen H_i.

Bemerkung: Wählen wir die Gewichte $\{\mu_i\}$ als $\mu_i = 1 \quad \forall i$ lässt sich außerdem jeder der Räume H_i isometrisch in $\mathfrak{H}$ einbetten. Dafür betrachten wir die Abbildung

$$\iota : \begin{cases} H_i \to \mathfrak{H} \\ h_i \mapsto (0, 0, \ldots h_i, \ldots, 0) \end{cases}$$

Aus der Definition der Norm $\|.\|_{\mathfrak{H}}$ folgt dann sofort, dass $\|\Phi(h_i)\|_{\mathfrak{H}} = \|h_i\|_{H_i}$.

Im nächsten Schritt dehnen wir nun die obige Definition auf abzählbar viele Hilberträume aus.

1.3.2 Definition Seien $H_1, H_2, \ldots$ Hilberträume und bezeichne mit $\mathfrak{H}$ die Menge aller Folgen $\mathfrak{h} = \{h_n\}$ mit $h_n \in H_n$, für die die Summe $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \|h_i\|_{H_i}^2$ endlich ist. Werden Addition, Multiplikation mit Skalaren und ein inneres Produkt wie in der vorherigen Definition komponentenweise bestimmt, so nennen wir $\mathfrak{H}$ die *direkte Summe* der Hilberträume $\{H_1\}_{i=1}^{\infty}$ und schreiben wieder symbolisch:

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} H_i. \tag{1.3.7}$$

Bemerkung: Auch in diesem Fall ist $\mathfrak{H}$ selbst ein Hilbertraum. Der Vollständigkeitsbeweis kann analog zum Vollständigkeitsbeweis für ℓ^2 geführt werden.

Bemerkung: Hier sehen wir deutlich den Zusammenhang mit dem Konzept der Entwicklung in Fourierreihen aus dem vorherigen Abschnitt. Sei dafür H ein Hilbertraum mit einer abzählbaren ONB $M = \{u_\alpha\}$. Für jedes Element $u_\alpha \in M$ ist der von ihm aufgespannte lineare Unterraum (versehen mit dem ursprünglichen Skalarprodukt $(.,.)$ von H) selbst ein Hilbertraum, den wir mit H_α bezeichnen. Sei wieder $\mathfrak{H} = \bigoplus_\alpha H_\alpha$ das direkte Integral der Räume H_α, dann können wir offensichtlich wie oben jedes H_α isometrisch nach $\mathfrak{H}$ abbilden. Interessanter ist aber, dass wir auch H selbst isometrisch nach $\mathfrak{H}$ abbilden können. Dafür betrachten wir die Abbildung:

$$\Phi : \begin{cases} H \to \mathfrak{H} \\ h \mapsto \mathfrak{h} = (\alpha \mapsto (h, u_\alpha) u_\alpha). \end{cases}$$

Φ bildet jedes Element $h \in H$ auf eine Folge ab, deren α-tes Glied ein Element des Raumes H_α ist. Da die $\{u_\alpha\}$ eine ONB bilden, sieht man die Isometrieeigenschaft leicht durch:

$$\|\Phi(h)\|_{\mathfrak{H}}^2 = \sum_\alpha \|(h, u_\alpha) u_\alpha\|_{H_\alpha}^2 = \sum_\alpha |(h, u_\alpha)|^2.$$

Die letzte Summe ist aber wegen Punkt (iii) in Lemma 1.2.4 gleich $\|h\|_H$.

Wir haben also gesehen, dass sich jeder Hilbertraum mittels einer abzählbaren ONB isometrisch in eine abzählbare direkte Summe von Hilberträumen einbetten lässt. Zum Schluss wollen wir nun die Verallgemeinerung noch einen Schritt weiter treiben und auch nicht notwendigerweise abzählbare Indexmengen betrachten:

Sei dafür Ω ein lokalkompakter seperabler topologischer Raum mit einem positiven Maß μ und sei $N : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eine bezüglich μ messbare Funktion. Für jedes $\omega \in \Omega$ sei $H(\omega)$ ein Hilbertraum der Dimension $N(\omega)$.[2] Wir könne jeden der Hilberträume $H(\omega)$ kanonisch in den ℓ^2 einbetten, indem wir die Elemente von $H(\omega)$ auf Folgen abbilden,

[2] Da N messbar ist, gilt für alle ω außerhalb einer μ-Nullmenge $\dim H(\omega) < \infty$.

deren Glieder bis auf die ersten $N(\omega)$-vielen Stellen verschwinden. Betrachte nun die Abbildung

$$\mathfrak{h} : \begin{cases} \Omega \to H(\omega) \\ \omega \mapsto h. \end{cases}$$

$\mathfrak{h}$ ist dann eine Funktion, deren Wert für jedes $\omega \in \Omega$ ein Element des Hilbertraums $H(\omega)$ ist d.h. $\mathfrak{h}(\omega) \in H(\omega)$. Wir bezeichnen mit $\hat{\mathfrak{H}}$ die Menge jener $\mathfrak{h}$, die erfüllen:

1. Die reellwertige Funktion $\omega \mapsto (\mathfrak{h}(\omega), g)_{H(\omega)}$ ist für alle $g \in H(\omega)$ messbar.
2. Die reellwertige Funktion $\omega \mapsto \|\mathfrak{h}(\omega)\|^2_{H(\omega)}$ ist bezüglich μ integrierbar. D.h.:

$$\int_\Omega \|\mathfrak{h}(\omega)\|^2_{H(\omega)} d\mu(\omega) < \infty$$

Wieder definieren wir auf $\hat{\mathfrak{H}}$ Addition und Multiplikation mit Skalaren punktweise:

$$(\mathfrak{h} + \mathfrak{g})(\omega) = \mathfrak{h}(\omega) + \mathfrak{g}(\omega) \qquad (\alpha\mathfrak{h})(\omega) = \alpha\mathfrak{h}(\omega)$$

Ein inneres Produkt in $\hat{\mathfrak{H}}$ können wir über das Integral bestimmen:

$$(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = \int_\Omega (\mathfrak{h}(\omega), \mathfrak{g}(\omega))_H d\mu(\omega). \tag{1.3.8}$$

Um nachzuweisen, dass der obige Ausdruck wohldefiniert ist, wählen wir eine abzählbare ONB $\{h_n^\omega\}$ in $H(\omega)$. Wegen Bedingung 1. und den Eigenschaften des Skalarproduktes sind dann die Funktionen $\omega \mapsto (\mathfrak{h}(\omega), h_n^\omega)_{H(\omega)}$, $\omega \mapsto (h_n^\omega, \mathfrak{g}(\omega))_{H(\omega)}$ messbar, genauso wie die Funktionen:

$$(\mathfrak{h}(\omega), \mathfrak{g}(\omega))_{H(\omega)} = \sum_{n=1}^\infty (\mathfrak{h}(\omega), h_n^\omega)_{H(\omega)} (h_n^\omega, \mathfrak{g}(\omega))_{H(\omega)}$$

$$\|\mathfrak{h}(\omega)\|^2 = (\mathfrak{h}(\omega), \mathfrak{h}(\omega))_{H(\omega)} = \sum_{n=1}^\infty (\mathfrak{h}(\omega), h_n^\omega)_{H(\omega)} (h_n^\omega, \mathfrak{h}(\omega))_{H(\omega)}.$$

Da außerdem stets gilt

$$0 \leq [(\mathfrak{h}(\omega), h_n) - (h_n, \mathfrak{g}(\omega))]^2 = (\mathfrak{h}(\omega), h_n)^2 + (h_n, \mathfrak{g}(\omega))^2 - 2(\mathfrak{h}(\omega), h_n)(h_n, \mathfrak{g}(\omega))$$

folgt

$$|(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})| \leq \int_\Omega |(\mathfrak{h}(\omega), \mathfrak{g}(\omega))_H| d\mu(\omega) \leq \frac{1}{2} \left[\int_\Omega \|\mathfrak{h}(\omega)\|^2 d\mu(\omega) + \int_\Omega \|\mathfrak{g}(\omega)\|^2 d\mu(\omega) \right] < \infty$$

Identifizieren wir schließlich solche Funktionen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}$, für die gilt:

$$\int_\Omega \|\mathfrak{h}(\omega) - \mathfrak{h}(\omega)\|_{H(\Omega)} d\mu(\omega) = 0$$

Und faktorisieren wir $\hat{\mathfrak{H}}$ nach dieser Äquivalenzrelation, so erhalten wir die Funktionenmenge $\mathfrak{H}$ und bezeichnen diese als das *direkte Integral der Räume* $H(\omega)$. Wir schreiben dafür

$$\mathfrak{H} = \int_\Omega \bigoplus H(\omega) d\mu.$$

Bevor wir uns der Frage nach der Vollständigkeit von $\mathfrak{H}$ widmen, wollen wir zuerst diese doch sehr allgemeine Konstruktion anhand einiger einfacher Beispiele verdeutlichen:

Beispiel: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$, als Maß wählen wir das Lebesgue-Maß λ und für alle $\omega \in \Omega$ gelte $H(\omega) = \mathbb{R}$.[3] In diesem Fall ist das entstehende direkte Integral $\mathfrak{H}$ gerade der Raum $L^2_\lambda(\Omega, \mathbb{R})$ d.h. die λ-messbaren, quadratisch integrierbaren Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}$. Wobei wir wieder Funktionen, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, miteinander identifizieren. Bekannterweise ist $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum, für den Beweis siehe zum Beispiel: Satz 13.16 in [K].

Beispiel: Sei wieder $\Omega \subset \mathbb{R}$ und λ das Lebesgue-Maß. H sei ein Hilbertraum mit $\dim H = k \in \mathbb{N}$ und für alle $\omega \in \Omega$ gelte $H(\omega) = H$. Das resultierende direkte Integral $\mathfrak{H}$ ist dann der Raum $L^2_\lambda(\Omega, H)$. D.h: die H-wertigen quadratintegrablen Funktionen, die wir wieder nach der bekannten Äquivalenzrelation ausfaktorisieren. Insbesondere ist $\mathfrak{H}$ auch selbst ein Hilbertraum, der Beweis verläuft analog wie für den Fall des vorherigen Beispiels.

Um nun wieder der ursprünglichen Frage nach der Vollständigkeit des direkten Integrals nachzugehen, betrachten wir die Urbilder Ω_n der Dimensionsfunktion N: $\Omega_n = \{\omega \in \Omega : N(\omega) = \dim H(\omega) = n\}$. Für jedes solche Ω_n ist das direkte Integral $\mathfrak{H}_n = \int_{\Omega_n} \bigoplus H(\omega) d\mu(\omega)$ selbst ein Hilbertraum, wie wir im letzten Beispiel gesehen haben, außerdem gilt wegen der Messbarkeit der Funktion N: $\mu(\Omega_\infty) = 0$. Wir erhalten also eine Folge direkter Integrale $\mathfrak{H}_n$ die wir nun wiederum zu einer direkten Summe zusammenfassen können, nämlich:

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{H}_n$$

und wegen der Überlegungen zu Beginn dieses Abschnitts ist dann auch $\mathfrak{H}$ selbst ein Hilbertraum.

Oben haben wir gesehen, dass wir einen Hilbertraum H mittels einer abzählbaren ONB isometrisch in die direkte Summe der von den Elementen der ONB erzeugten Hilberträume einbetten können. Natürlich stellt sich hier die Frage, ob ein ähnliches Verfahren auch für direkte Integrale möglich ist. Im letzten Abschnitt dieser Arbeit, werden wir beweisen, dass dies tatsächlich der Fall ist und insbesondere werden wir zeigen welche Rolle der bisher nicht näher bestimmten Menge Ω zukommt.

[3] $H(\omega)$ ist also der Hilbertraum der reellen Zahlen, wobei die gewöhnliche Multiplikation als Skalarprodukt dient.

1.4 Abzählbare Hilberträume

In diesem Kapitel entwickeln wir den Begriff des abzählbaren Hilbertraums und beweisen einige seiner grundlegenden Eigenschaften. Die meisten dieser Resultate finden sich in §3 in [G].

Sei X ein Vektorraum, $\{(.,.)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge innerer Produkte und $\{\|.\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der dazugehörigen Normen (wie üblich definieren wir für $m \in \mathbb{N}$ die Norm $\|.\|_m$ durch $\|x\|_m := \sqrt{(x,x)_m}$ für alle $x \in X$). Wir nennen eine solche Folge innerer Produkte *(paarweise) miteinander verträglich*, wenn für jede Folge $\{x_k\} \subseteq X$, die sowohl bezüglich einer Norm $\|.\|_n$ als auch bezüglich einer Norm $\|.\|_m$ eine Cauchy-Folge ist, aus $\lim_{k\to\infty} \|x_k\|_n = 0$ schon folgt, dass auch $\lim_{k\to\infty} \|x_k\|_m = 0$.

Mithilfe einer solchen Folge paarweise verträglicher innerer Produkte auf einem Vektorraum X können wir auf X eine Topologie $\mathcal{T}_\infty$ definieren. Eine Nullumgebungsbasis ist gegeben durch:

$$U_{n,\epsilon} = \{x \in X : \|x\|_n < \epsilon\}$$

Diese Topologie macht X offensichtlich zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum.

Bemerkung: Die Skalarprodukte $(.,.)_n$ können stets auch so gewählt werden, dass gilt: $(x,x)_i \leq (x,x)_j$ für alle $x \in X$ und $i \leq j$. Dies kann zum Beispiel dadurch erreicht werden, dass statt der Folge $\{(.,.)_n\}$ die Folge $\{(.,.)_N\}$ betrachtet wird, wobei:

$$(x,y)_N := \sum_{k=1}^{N} (x,y)_k$$

Aufgrund der Linearität der Summe sind die $(.,.)_N$ Skalarprodukte und die von ihnen erzeugte Topologie stimmt mit $\mathcal{T}_\infty$ überein.

Bemerkung: Wenn wir die Skalarprodukte wie oben aufsteigend wählen, bilden wegen der Monotonie der Wurzelfunktion auch die Normen eine aufsteigende Folge. Für $x \in X$ und natürliche Zahlen j, i mit $j \leq i$ gilt dann offensichtlich: $(\|x\|_i < \epsilon) \Rightarrow (\|x\|_j < \epsilon)$. Bezeichnen wir mit X_m die Vervollständigung von X bezüglich der Norm $\|.\|_m$, so erhalten wir eine Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Hilberträumen für die gilt $X_i \subseteq X_j$ für alle $j \leq i$. Die Norm $\|.\|_m$ induziert außerdem auf X_m die Normtopologie $\mathcal{T}_m$. $\mathcal{T}_\infty$ ist feiner als jedes $\mathcal{T}_m$.

1.4.1 Definition Sei X ein Vektorraum und $(.,.)_n$ eine Folge innerer Produkte, die paarweise miteinander verträglich sind. Wir nennen X einen *abzählbaren Hilbertraum*, falls X bezüglich der durch die inneren Produkte definierten Topologie vollständig ist.

Bemerkung: Üblicherweise nennen wir einen metrischen Raum vollständig, wenn dort jede Cauchy-Folge einen Grenzwert besitzt. Da in einem topologischen Raum im Allgemeinen kein Abstandsbegriff definiert ist, können wir diesen Begriff von Vollständigkeit nicht einfach so verallgemeinern. Da aber in unserem Fall die Topologie $\mathcal{T}_\infty$ von einer Folge von Normen erzeugt wird, können wir sagen $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X$ heißt Cauchy-Folge, wenn

$$\forall U_{n,\epsilon} \in \mathfrak{U}(0) \quad \exists k \in \mathbb{N} : (y_i - y_j) \in U_{n,\epsilon} \quad \forall i,j \geq k \tag{1.4.9}$$

Aufgrund der Definition der Nullumgebungen $U_{n,\epsilon}$ heißt das aber gerade, dass $\forall n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0 \;\; \exists k \in \mathbb{N} : \|y_i - y_j\|_n < \epsilon$. D.h. y_k ist genau dann eine Cauchy-Folge bezüglich $\mathcal{T}_\infty$, wenn bezüglich jeder der Normen $\|.\|_n$ eine Cauchy-Folge ist.

1.4.2 Lemma *Sei für $n \in \mathbb{N}$ $X_n = \overline{X}^{\|.\|_n}$, dann ist X genau dann ein abzählbarer Hilbertraum, wenn*

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Beweis Sei zuerst X vollständig bezüglich $\mathcal{T}_\infty$. Das heißt jede Cauchy-Folge y_k hat einen Grenzwert $y \in X$. $y_k \xrightarrow{\mathcal{T}_\infty} y$ bedeutet aber gerade, dass $y_k \xrightarrow{\|.\|_n} y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. $X \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$.
Sei umgekehrt X nicht vollständig, dann gibt es mindestens eine Cauchy-Folge $\{z_k\} \subseteq X$ deren Grenzwert nicht in X liegt. Da aber $\{z_k\}$ bezüglich jeder der Normen $\|.\|_n$ eine Cauchy-Folge ist, enthält jede Vervollständigung X_n den Grenzwert z und insbesondere gilt $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \supsetneq X$. □

Bemerkung: Insbesondere ist natürlich jeder Hilbertraum $(H, (.,.))$ auch ein abzählbarer Hilbertraum, wenn wir für alle $n \in \mathbb{N}$ $(.,.)_n = (.,.)$ wählen. Andererseits muss ein abzählbarer Hilbertraum keineswegs selbst ein Hilbertraum sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel: Sei Ω eine offene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^p$ und sei $\partial\Omega$ stetig differenzierbar. Sei X die Menge $C^\infty(\overline{\Omega})$ d.h. die Menge der auf Ω inklusive dem Rand beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen.
Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p)$ und die Festlegung $|\alpha| = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$ definieren wir:

$$(f,g)_n := \sum_{|\alpha| \leq n} \int_\Omega \mathcal{D}^\alpha f \mathcal{D}^\alpha g dx$$

Hier bezeichnet $\mathcal{D}^\alpha f$ die *schwache Ableitung* der Funktion f. [4]

Es lässt sich zeigen, dass $(.,.)_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Skalarprodukt ist und wir definieren die Norm $\|.\|_n$ wie üblich durch $\|f\|_n := \sqrt{(f,f)_n}$. Vervollständigen wir nun X bezüglich einer der Normen $\|.\|_n$ so erhalten wir einen Hilbertraum, genauer den *Sobolevraum* H^n. Betrachten wir nun den Raum H definiert durch $H := \bigcap_{k=0}^{\infty} H^k$ so können wir zeigen, dass $X = H$:
Einerseits gilt ja für jedes $k \in \mathbb{N} : X \subseteq H^k$ also auch $X \subseteq H$. Für die umgekehrte Enthaltenkeitsrelation benötigen wir den *Einbettungssatz von Sobolev* (siehe Satz 5.9 [PDG]).

[4] Sei f eine über Ω lokal integrierbare Funktion $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ (natürlich ist jede unendlich oft differenzierbare Funktion lokal integrierbar) und $\phi \in C^\infty_{00}(\Omega)$ eine Testfunktion. Wir nennen eine Funktion g *α-te schwache Ableitung von f*, falls g die Gleichheit $\int_\Omega g\phi dx = \int_\Omega f \frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}} dx$ für alle ϕ erfüllt. Ist f selbst hinreichend oft partiell differenzierbar, so stimmt die schwache Ableitung mit der gewöhnlichen überein.

Dieser besagt, dass für eine offene, beschränkte Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ mit stetig differenzierbarem Rand der Raum $H^k(\Omega)$ stetig in alle Räume $C^m(\overline{\Omega})$ eingebettet werden kann, für die gilt $k - \frac{p}{2} > m$. Eine Funktion $f \in H$ erfüllt aber $f \in H^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ und somit auch $f \in C^m(\overline{\Omega}) \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Also liegt f auch in $C^\infty(\overline{\Omega}) = X$.
Zusammen mit Lemma 1.4.2 können wir also schließen, dass $C^\infty(\overline{\Omega}) = X$ ein abzählbarer Hilbertraum ist. Andererseits aber ist $C^\infty(\overline{\Omega})$ kein metrischer Raum und damit auch sicher kein Hilbertraum.

Zum Abschluss dieses Kapitels präsentieren wir noch einige Resultate, die den Dualraum eines abzählbaren Hilbertraums betreffen:

1.4.3 Lemma *Sei für $n \in \mathbb{N}$ $X_n = \overline{X}^{\|\cdot\|_n}$ und bezeichne mit X_n' die Menge aller stetigen linearen Funktionale $f : X_n \to \mathbb{C}$. Dann gilt*

$$X' = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n'.$$

Beweis Sei zuerst $f \in X_n'$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f stetig bezüglich $\mathcal{T}_n$. Da aber $\mathcal{T}_\infty$ feiner ist, als jedes $\mathcal{T}_n$, ist f auch stetig bezüglich $\mathcal{T}_\infty$ und somit $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n' \subseteq X'$.
Für die Umkehrung sei daran erinnert, dass ein lineares Funktional f auf einem topologischen Vektorraum genau dann stetig ist, wenn es eine Nullumgebung V gibt, sodass $f(V) \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt ist. Ist also $f \in X'$ so existiert eine Nullumgebung $U_{n,\delta} = \{x \in X : \|x\| \leq \delta\}$ sodass $f(U_{n\delta}) \leq 1$. Das impliziert aber, dass $f(x) \leq \epsilon$ für alle x aus $U_{n,\epsilon\delta}$ und damit ist f stetig bezüglich $\mathcal{T}_n$ d.h. $f \in X_n'$. □

1.4.4 Lemma *Werden die Skalarprodukte auf X so gewählt, dass aus $m \leq n$ folgt $(y,y)_m \leq (y,y)_n \quad \forall y \in X$, so bilden die Dualräume X_n' eine aufsteigende Folge*

$$X_1' \subseteq X_2' \subseteq \cdots \subseteq X_i' \subseteq \ldots$$

Beweis Sei $m \leq n$ und $U_{m,1}(0) := \{y \in X : (y,y)_m \leq 1\}$ sowie $U_{n,1}(0) := \{y \in X : (y,y)_n \leq 1\}$. Aus $(y,y)_m \leq (y,y)_n$ folgt dann sofort $U_{n,1}(0) \subseteq U_{m,1}(0)$. Ist also für ein lineares Funktional das Bild $f(U_{m,1}(0)) \in \mathbb{C}$ beschränkt dann auch $f(U_{n,1}(0))$. □

Bemerkung: Nach dem Satz von Riesz ist der Dualraum eines Hilbertraums selbst ein Hilbertraum. Insbesondere können wir jeden Raum X_n' folgendermaßen normieren:

$$\|f\|_{-n} = \sup\{|f(x)| : x \in X_n, \|x\|_n = 1\}.$$

Kapitel 2

Lineare Operatoren

2.1 Allgemeines

Dieser und der folgende Abschnitt enthalten grundlegende Definitionen und Resultate zu linearen Operatoren auf Banachräumen und Hilberträumen. Als Quelle dient hier größtenteils Kapitel 6 in [F].

2.1.1 Definition Seien X, Y Vektorräume. Ein linearer Operator ist eine Abbildung $T : X \to Y$, die die Gleichung

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

für alle $x, y \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ erfüllt.

Sind X und Y normierte Räume und $T : X \to Y$ ein linearer Operator, so wird die *Operatornorm* durch

$$\|T\| := \sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}, x \in X \setminus \{0\}\right\} = \sup\{\|Tx\|_Y, x \in X \setminus \{0\}, \|x\|_X = 1\} \tag{2.1.1}$$

definiert. Falls für alle x gilt $\|Tx\| = \|x\|$ d.h. $\|T\| = 1$, so heißt T *isometrisch.* Die Abbildungsnorm kann auch mithilfe des Dualraums bestimmt werden.

2.1.2 Lemma *Seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ ein linearer Operator. dann gilt:*

$$\|T\| = \sup\{|\langle y', Tx\rangle| : x \in X, \|x\| \leq 1, y' \in Y', \|y'\| \leq 1\} \tag{2.1.2}$$

Beweis Dieses Resultat folgt aus dem Satz von Hahn-Banach und kann in Lemma 6.1.1 in [F] nachgelesen werden. □

Bemerkung: Ein Operator heißt *beschränkt* falls $\|T\| < \infty$. Für zwei normierte Räume X, Y wird die Menge aller beschränkten linearen Operatoren $T : X \to Y$ mit $\mathcal{B}(X, Y)$

bezeichnet. Offensichtlich ist eine Linearkombination linearer beschränkter Operatoren, wieder ein linearer beschränkter Operator. Versehen mit der Operatornorm bildet die Menge $\mathcal{B}(X,Y)$ sogar einen Banachraum.

2.2 Duale und Adjungierte Operatoren

Jeder Operator $T \in B(X,Y)$ hat außerdem ein "duales Gegenstück"d.h. einen Operator T' der Y' auf X' abbildet. Die Existenz und Eindeutigkeit dieses *dualen* Operators zeigt das folgende Lemma.

2.2.1 Lemma *Seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, dann existiert genau ein Operator $T' \in \mathcal{B}(Y',X')$, für den gilt*

$$\langle y', Tx \rangle = \langle T'y', x \rangle \quad \forall x \in X, y' \in Y'. \tag{2.2.3}$$

Der Operator T' erfüllt außerdem $\|T'\| = \|T\|$.

Beweis Wir definieren die Abbildung $T'y' : X \to \mathbb{C}$ durch

$$T'y'(x) := y'(Tx). \tag{2.2.4}$$

$y' \in Y'$ ist definitionsgemäß stetig und linear, T ist linear und beschränkt und damit ebenfalls stetig. Als Zusammensetzung stetiger linearer Abbildungen ist auch $T'y' \in X'$. Die Linearität der Abbildung $T' : Y' \to X'$ läßt sich leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned} \langle T'(\alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2), x \rangle &= \langle \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2, Tx \rangle = \alpha_1 \langle y'_1, Tx \rangle + \alpha_2 \langle y'_2, Tx \rangle \\ \alpha_1 \langle T'y'_1, x \rangle + \alpha_2 \langle T'y'_2, x \rangle &= \langle \alpha_1 T'y'_1 + \alpha_2 T'y'_2, x \rangle \end{aligned}$$

Die Gleichheit $\|T'\| = \|T\|$ folgt mit (2.1.2) und

$$\begin{aligned} \|T'\| &= \sup\{\|T'y'\|_{X'}, \|y'\|_{Y'} \leq 1\} = \sup\{|\langle T'y', x \rangle|, \|y'\|Y' \leq 1, \|x\|_X \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle y', Tx \rangle|, \|y'\|_{Y'} \leq 1, \|x\|_X \leq 1\} = \|T\| \end{aligned}$$

□

Betrachten wir nun lineare Operatoren zwischen Hilberträumen, so ist es nicht überraschend, dass die Norm des Operators über das Skalarprodukt definiert werde kann.

2.2.2 Lemma *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $T : H_1 \to H_2$ ein linearer Operator, dann gilt*

$$\|T\| = \sup\{|(Tx, y)_{H_2}| : x \in H_1, y \in H_2 \|x\|_{H_1}, \|y\|_{H_2} \leq 1\} \tag{2.2.5}$$

Beweis Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt $|(Tx,y)| \leq \|Tx\|\|y\|$ und somit $|(Tx,y)| \leq \|T\|$ für $\|x\|, \|y\| \leq 1$. Für die Umkehrung sei $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$. Dann gilt $|(Tx,y)| = \frac{1}{\|Tx\|}|(Tx,Tx)| = \|Tx\|$ und insbesondere $|(Tx,y)| \geq \|Tx\|$. Damit ist die Aussage gezeigt. □

2.2.3 Lemma *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \in \mathcal{B}(H_1,H_2)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Operator T^*, der erfüllt*

$$(Tx,y)_{H_2} = (x, T^*y)_{H_1} \quad \forall x \in H_1, y \in H_2$$

$T^* : H_2 \to H_1$ wird der zu T adjungierte Operator genannt.

Beweis Für jedes $y \in H_2$ ist die Abbildung $h : x \mapsto (Tx,y)$ ein stetiges lineares Funktional auf H_1. Nach dem Satz von Riesz gibt es also ein eindeutig bestimmtes Element $T^*y \in H_1$, sodass

$$(Tx,y) = (x, T^*y) \quad \forall x \in H_1, y \in H_2$$

erfüllt ist. Die Abbildung $y \mapsto T^*y$ ist dann offensichtlich eine lineare Abbildung von H_2 nach H_1. □

Bemerkung: Für Operatoren zwischen Hilberträumen sind die Konzepte des dualen und des adjungierten Operators eng verbunden. Seien nämlich H_1, H_2 Hilberträume, $T : H_1 \to H_2$ ein beschränkter linearer Operator und $\Phi_i : H_i \to H_i', i \in \{1,2\}$ die Isometrie zwischen dem Hilbertraum und seinem Dualraum. Dann gilt: $\Phi_1 \circ T^* = T' \circ \Phi_2$.

Es gelten die folgenden Rechenregeln für die Bildung des adjungierten Operators:

2.2.4 Lemma *Für alle $T, S \in \mathcal{B}(H_1,H_2), R \in \mathcal{B}(H_2,H_3)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt*

(i) $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}S^*$.

(ii) $(RS)^* = S^*R^*$.

(iii) $T^{**} = T$.

Beweis Seien $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2, h_3 \in H_3$

(i) $(h_1, (\alpha T + \beta S)^* h_2) = ((\alpha T + \beta S)h_1, h_2) = (\alpha T h_1, h_2) + (\beta S h_1, h_2) = (\alpha h_1, T^* h_2) + (\beta h_1, S^* h_2) = (h_1, \overline{\alpha} T^* h_2) + (h_1, \overline{\beta} S^* h_2) = (h_1, (\overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*) h_2)$

(ii) $(h_1, (RS)^* h_3) = (RSh_1, h_3) = (R(Sh_1), h_3) = (Sh_1, R^* h_3) = (h_1, S^* R^* h_3)$

(iii) Offensichtlich gilt $T^{**} : H_1 \to H_2$ und damit $(Th_1, h_2) = (h_1, T^* h_2) = \overline{(T^* h_2, h_1)} = \overline{(h_2, T^{**} h_1)} = (T^{**} h_1, h_2)$

□

Die folgende Definition fasst noch einige wichtige Bezeichnungen zusammen:

2.2.5 Definition Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{B}(H)$, dann nennen wir T

- *selbstadjungiert*, wenn $T = T^*$.
- *positiv semidefinit*, wenn für jedes $y \in H$ mit $y \neq 0$ gilt: $(Ty, y) \geq 0$.
- *unitär*, wenn für alle $x, y \in H$ gilt $(x, y) = (Tx, Ty)$.
- eine *Projektion*, wenn $T^2 = T$. Gilt außerdem $(Tx, y) = (x, Ty)$, dann heißt T eine *orthogonale Projektion*.

Bemerkung: Insbesondere ist also jede orthogonale Projektion selbstadjungiert.

2.3 Spektralzerlegung kompakter selbstadjungierter Operatoren

Dieser Abschnitt behandelt die Spektralzerlegung kompakter selbstadjungierter Operatoren und orientiert sich dabei an Kapitel 7 in [F]. Außerdem zeigen wir, dass wir einige der Resultate auch auf kompakte (aber nicht notwendigerweise selbstadjungierte) Operatoren ausdehnen können. Schließlich definieren wir Operatoren vom Hilbert-Schmidtschen-Typ und nukleare Operatoren. Hierbei stützen wir uns auf §2 Nr.1 in [G].

Bekannterweise bezeichnen wir für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und ein Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ einen Vektor $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ als *Eigenvektor zum Eigenwert* λ, wenn gilt

$$Av = \lambda v$$

oder äquivalent

$$(A - \lambda I)v = 0$$

wobei $I \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Daraus können wir schließen, dass ein $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann ein Eigenwert einer Matrix A ist, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$. Die Menge aller solchen λ heißt das *Spektrum* von A und seine Mächtigkeit ist kleiner oder gleich der Dimension von A. Falls $\det(A - \lambda I) \neq 0$ so ist λ kein Eigenwert von A und insbesondere ist die Matrix $(A - \lambda I)$ invertierbar. Im Falle allgemeiner linearer Operatoren zwischen normierten Räumen müssen diese Konzepte verallgemeinert werden:

Für einen normierten Raum X ist $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$ eine Algebra mit 1 (Vgl. [F] Abschnitt 6.3), wobei die Abbildung $I : X \to X, x \mapsto x$ das Einselement darstellt. Ein Operator $T \in \mathcal{B}(X)$ ist dabei genau dann invertierbar, wenn T bijektiv und seine Inverse beschränkt ist. Wegen dem Satz von der offenen Abbildung (Vgl. [F] Satz 4.3.1 und Korollar 4.3.4), ist aber die Inverse bereits beschränkt, wenn nur $\ker T = 0$ und $\operatorname{ran} T = X$.

Dementsprechend ist $T - \lambda I$ nicht invertierbar, wenn entweder $\ker(T - \lambda I) \neq 0$ oder $\operatorname{ran}(T - \lambda I) \neq X$. Damit ergeben sich die folgenden Bezeichnungen:

2.3.1 Definition

- $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I$ ist invertierbar$\}$ heißt *Resolventenmenge* von T.
- $\sigma(T) = \rho(T)^{\complement} = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I$ ist nicht invertierbar$\}$ heißt *Spektrum* von T
  - $\{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$ heißt *Punktspektrum* von T. Ein λ aus dem Punktspektrum wird auch als Eigenwert von T bezeichnet.
  - $\{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) = \{0\}, \operatorname{ran}(T - \lambda I) \neq X$und $\overline{\operatorname{ran}(T - \lambda I)} = X\}$ heißt *stetiges Spektrum* von T
  - $\{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) = \{0\}, \operatorname{ran}(T - \lambda I) \neq X\}$ heißt *Residualspektum* von T.

Einige Typen von beschränkten linearen Operatoren weisen besondere spektrale Eigenschaften auf, die wir im Folgenden anführen wollen.

2.3.2 Definition Seien H_1, H_2 Hilberträume, dann heißt ein linearer Operator $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *kompakt*, wenn die Menge $\overline{T(K_1^{\|.\|_{H_1}}(0))}^{\|.\|_{H_2}}$ als Teilmenge von H_2 kompakt ist. Die Menge aller kompakten Operatoren von H_1 nach H_2 wird mit $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ bezeichnet.

2.3.3 Definition Seien H_1, H_2 Hilberträume, dann heißt ein beschränkter linearer Operator $T : H_1 \to H_2$ *ausgeartet*, wenn $\dim T(H_1) < \infty$. Falls $\dim T(H_1) = 1$, so nennen wir T einen *Operator vom Rang 1*.

Bemerkung: Die ausgearteten Operatoren sind stets kompakt, denn wegen $\dim T(H_1) < \infty$ ist $T(H_1)$ isomorph zu $\mathbb{C}^{\dim T(H_1)}$. Die abgeschlossene, beschränkte Teilmenge $\overline{T(K_1^{\|.\|_{H_1}}(0))}^{\|.\|_{H_2}}$ ist demnach kompakt (Vgl. [F] Proposition 6.4.4).

Das folgende Lemma listet einige wichtige Abschlusseigenschaften der Menge der kompakten Operatoren auf.

2.3.4 Lemma *Seien H_1, H_2, H_3 Hilberträume $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ und $S \in \mathcal{K}(H_2, H_3)$*

(i) Der Operator $ST : H_1 \to H_3$ ist kompakt.

(ii) $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ ist ein bezüglich der Operatornorm abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ d.h. $(\mathcal{K}(H_1, H_2), \|.\|)$ ist ein Banachraum.

(iii) Der Operator T ist genau dann kompakt, wenn der duale Operator T' kompakt ist.

Beweis Siehe [F] Proposition 6.4.4 und Satz 6.4.8. □

Es ist eine wesentliche Eigenschaft kompakter selbstadjungierter Operatoren, die einen Hilbertraum H in sich selbst abbilden, dass ihr Spektrum fast nur aus Eigenwerten besteht und wir den Operator mittels seiner Eigenvektoren als unendliche Reihe darstellen können.

2.3.5 Satz *(Spektralsatz) Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{K}(H) = \mathcal{K}(H,H)$ selbstadjungiert. Dann ist das Spektrum von T eine endliche oder unendliche Folge von paarweise verschiedenen Eigenwerten $\tau_n > 0$, die im unendlichen Fall $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$ erfüllt. Außerdem gibt es eine ONB von H, die aus Eigenvektoren (t_n) von T besteht d.h. $Tt_n = \tau_n t_n$. Insbesondere können wir jedes $h \in H$ als Fourierreihe darstellen*

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} (h, t_n) t_n \tag{2.3.6}$$

und auch den Operator T in eine solche Reihe entwickeln

$$Th = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n (h, t_n) t_n. \tag{2.3.7}$$

Beweis Siehe [F] Korollar 7.2.13. □

Es gilt auch die Umkehrung d.h. jeder Operator $T \in B(H)$ der die Darstellung (2.3.7) mit einer ONB t_n und einer Nullfolge positiver Zahlen τ_n erlaubt, ist kompakt. Dies folgt sofort, wenn wir die Folge ausgearteter (und damit kompakter) Operatoren $T_N := \sum_{n=1}^{N} \tau_n (h, t_n) t_n$ betrachten. Man sieht leicht, dass die T_N bezüglich der Operatornorm gegen T konvergieren, da für alle $h \in H$ mit $\|h\| = 1$:

$$\|T - T_N h\|_H \leq \sum_{n=N}^{\infty} \tau_n |(h, t_n)| \underbrace{\|t_n\|}_{=1} \leq \sup_{n \geq N} \tau_n \underbrace{\|h\|_H}_{=1} = \sup_{n \geq N} \tau_n.$$

Da die τ_n eine Nullfolge sind, konvergiert $T_N \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ und da die kompakten Operatoren einen Banachraum bilden ist auch T kompakt.

Der folgende Satz verallgemeinert die aus der linearen Algebra bekannte Polar-Zerlegung und zeigt, dass wir auch für kompakte (aber nicht notwendigerweise selbstadjungierte) Operatoren, die einen Hilbertraum H_1 in einen Hilbertraum H_2 abbilden, eine Spektralzerlegung finden können.

2.3.6 Satz *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $A \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Dann existieren ein Operator $T \in \mathcal{K}(H_1, H_1)$, der selbstadjungiert und positiv semidefinit ist, sowie ein isometrischer Operator $U : T(H_1) \to H_2$, so dass $A = UT$.*

Beweis Betrachte den Operator $B := A^*A$. Wegen: $A : H_1 \to H_2$ und $A^* : H_2 \to H_1$ gilt $B : H_1 \to H_1$. Als Hintereinanderausführung kompakter Operatoren ist auch B kompakt und wegen der Rechenregeln für die Adjungierte gilt $B^* = (A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A = B$, d.h. B ist selbstadjungiert. Außerdem ist B auch positiv semidefinit, da $(Bh,h) = (A^*Ah,h) = (Ah,Ah) \geq 0$. Damit erfüllt also B die Voraussetzungen von Satz 2.3.5 und es gibt eine positive Nullfolge von Eigenwerten $\{\tau_n^2\}$ von B und eine ONB aus Eigenvektoren $\{t_n\}$ von B, sodass $Bt_n = \tau_n^2 t_n$ und $Bh = \sum_n \tau_n^2(h,t_n)t_n \quad \forall h \in H_1$. Nun definieren wir den Operator T durch

$$Tt_n = \sqrt{\tau_n^2}t_n = \tau_n t_n$$

mit den positiven Wurzeln τ_n der reellen Zahlen $\tau_n^2 > 0$. Offensichtlich gilt $T^2 = TT = B$ und auch T ist kompakt. Wegen $(Tt_n,t_n) = (\tau_n t_n, t_n) \geq 0$ ist T positiv semidefinit und wegen $(Tt_n,t_n) = (\tau_n t_n,t_n) = (t_n,\tau_n t_n) = (t_n,\overline{\tau_n}t_n) = (t_n,T^*t_n)$ selbstadjungiert. Außerdem gilt

$$\|Ah\|^2 = (Ah,Ah) = (A^*Ah,h) = (T^2h,h) = (Th,Th) = \|Th\|^2$$

für alle $h \in H_1$ und wir können den isometrischen Operator $U : T(H_1) \to H_2$ durch $Ug = Af$ für alle $g = Tf$ definieren. Offensichtlich gilt $Af = Ug = U(Tf)$, wodurch die Zerlegung bestimmt ist. □

Mithilfe dieser Zerlegung, können wir nun auch kompakte Operatoren $A : H_1 \to H_2$ als unendliche Summe darstellen:

2.3.7 Satz *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $A \in \mathcal{K}(H_1,H_2)$ mit der Darstellung $A = UT$ aus dem vorherigen Satz. Dann bilden die Eigenvektoren $\{t_n\}$ von T eine ONB von H_1 und die Eigenvektoren $\{u_n\}$ von U bilden eine ONB von H_2. Die Eigenwerte $\{\tau_n\}$ von T bilden eine Nullfolge positiver Zahlen und A hat die Darstellung:*

$$Ax = \sum_n \tau_n(x,t_n)u_n \tag{2.3.8}$$

Umgekehrt ist für zwei Hilberträume H_1, H_2 jeder Operator $A : H_1 \to H_2$ kompakt, der die Darstellung (2.3.8) *mit orthonormierten Systemen $\{t_n\} \subseteq H_1$ und $\{u_n\} \subseteq H_2$ und einer Nullfolge positiver Zahlen $\{\tau_n\}$ erlaubt.*

Beweis Wir wenden den vorhergehenden Satz an und zerlegen A in einen positiv semidefiniten selbstadjungierten kompakten Operator $T : H_1 \to H_1$ mit den Eigenwerten $\{\tau_n\}$ und der Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $\{t_n\} \subset H_1$, sowie einen isometrischen Operator $U : T(H_1) \to H_2$. Dabei definieren wir : $u_n := Ut_n$ und da U isometrisch ist, bilden die $\{u_n\}$ eine ONB im Bild von A.
Sei $h \in H_1$, dann können wir h in einer Fourierreihe darstellen: $h = \sum_n (h,t_n)t_n$ und erhalten

$$Ah = UTh = U\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(h,t_n)t_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(h,t_n)u_n.$$

Für die Umkehrung definieren wir eine Folge von ausgearteten Operatoren $\{A_N\}$ mittels $A_N h = \sum_{n=1}^{N} \tau_n(h,t_n)u_n$. Offensichtlich ist A_N für alle $n \in \mathbb{N}$ kompakt. Wir zeigen nun, dass bezüglich der Operatornorm gilt $\lim_N A_N = A$, denn da die Menge der kompakten

Operatoren bezüglich der Operatornorm einen Banachraum bildet, ist die Aussage damit bewiesen. Sei also $h \in H_1$ mit $\|h\|_{H_1} = 1$, dann gilt:

$$\|(A - A_N)h\|^2 \le \sum_{n=N}^{\infty} \tau_n^2 |(h, t_n)|^2 \underbrace{\|u_n\|_{H_2}^2}_{=1} \le \max_{N<n<\infty} \tau_n^2 \underbrace{\|h\|_{H_1}}_{=1} = \max_{N<n<\infty} \tau_n^2$$

und daher $\|A - A_N\| = \sup_{\|h\|_{H_1}=1} \|(A - A_N)h\|_{H_2} \le \max_{N<n<\infty} \tau_n^2$. Da die τ_n eine Nullfolge bilden, ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Häufig ist es sinnvoll, stärkere Konvergenzforderungen an die Folge $\{\tau_n\}$ zu stellen. Mittels dieser Konvergenzforderungen können wir zwei Teilmengen der kompakten Operatoren klassifizieren:

2.3.8 Definition Seien H_1, H_2 Hilberträume. Ein kompakter Operator $A \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ heißt *Operator vom Hilbert-Schmidtschen Typ*, wenn

$$\sum_n \tau_n^2 < \infty$$

wobei die τ_n wieder die Eigenwerte des Operators T in der Zerlegung (2.3.6) bezeichnen.

Mit dem folgenden Lemma können wird Operatoren vom Hilbert-Schmidtschen Typ recht einfach charakterisieren:

2.3.9 Lemma *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $A : H_1 \to H_2$ ein linearer Operator. A ist genau dann vom Hilbert-Schmidtschen Typ, wenn es eine Orthonormalbasis $\{h_n\} \subset H_1$ gibt, sodass die Reihe $\sum_n \|Ah_n\|_{H_2}^2$ konvergiert.*
Beweis Siehe [G] §2 Nr.2 Satz 2. $\square$

2.3.10 Definition Seien H_1, H_2 Hilberträume. Ein kompakter Operator $A \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ heißt *nuklear*, wenn

$$\sum_n \tau_n < \infty$$

wobei die τ_n wieder die Eigenwerte des Operators T in der Zerlegung (2.3.6) bezeichnen.

Bemerkung: Offensichtlich ist jeder nukleare Operator vom Hilbert-Schmidtschen Typ. Und es gilt auch die folgende Beziehung:

2.3.11 Lemma *Ein Operator A ist genau dann nuklear, wenn er als Produkt zweier Operatoren vom Hilbert-Schmidtschen Typ geschrieben werden kann.*
Beweis Siehe [G] §2 Nr.3 Satz 4. $\square$

2.4 Eigenschaften nuklearer Operatoren

Nukleare Operatoren spielen eine wichtige Rolle für die Definition von Gelfand-Tripeln. Im Folgenden wollen wir daher einige wichtige Eigenschaften und Charakterisierungen vorstellen. Die zugehörigen Beweise sind häufig recht umfassend und auch für das eigentliche Thema dieser Arbeit nicht zielführend. Wir werden daher die meisten Resultate ohne Beweis zitieren und für diejenigen Aussagen einen Beweis anführen, die wir im weiteren Verlauf explizit benötigen. Alle folgenden Resultate können in [G] §2 Nr.2 nachgelesen werden.

2.4.1 Definition Sei H ein Hilbertraum und $A : H \to H$ ein kompakter positiv semidefiniter Operator. Wir sagen der Operator A habe eine *endliche Spur*, wenn für jede Orthonormalbasis $\{h_n\}$ von H gilt:

$$\mathrm{Sp}(A) := \sum_{n=1}^{\infty} (Ah_n, h_n) < \infty. \tag{2.4.9}$$

Man kann insbesondere zeigen, dass die Eigenschaft der endlichen Spur die nuklearen Operatoren charakterisiert:

2.4.2 Lemma *Ist H ein Hilbertraum und $A : H \to H$ ein kompakter positiv semidefiniter Operator, dann ist A genau dann nuklear, wenn $\mathrm{Sp}(A) < \infty$.*
Beweis Siehe [G] §2 Nr.3 Hilfssatz 3. □

2.4.3 Definition Seien H_1, H_2 Hilberträume. Dann ist die *Spurnorm* eines Operators $A : H_1 \to H_2$ definiert durch

$$\|A\|_S = \sup_{\{g_n\} \in H_1, \{f_n\} \in H_2} \sum_{n=1}^{\infty} |(Ag_n, f_n)| \tag{2.4.10}$$

Wobei das Supremum über alle Orthonormalbasen $\{g_n\}$ von H_1 und $\{f_n\}$ von H_2 gebildet wird.

Es lässt sich zeigen, dass $\|.\|_S$ die Axiome einer Norm erfüllt und sich die nuklearen Operatoren auch mithilfe des Begriffs der Spurnorm charakterisieren lassen.

2.4.4 Lemma *Seien H_1, H_2 Hilberträume. Ein linearer Operator $A : H_1 \to H_2$ ist nuklear genau dann, wenn seine Spurnorm endlich ist.*
Beweis Siehe [G] §2 Nr.4 □

Bemerkung: Die beiden Begriffe Spur und Spurnorm sind eng miteinander verbunden. Denn wenn wir einen nuklearen Operator $A : H_1 \to H_2$ mithilfe von Satz 2.3.6 in ein

Produkt $A = UT$ zerlegen, gilt $\|A\|_S = \mathrm{Sp}(T)$ und insbesondere sind beide gleich der Summe der Eigenwerte von T d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Tf_n, f_n) = \sup_{\{f_n\}\in H_1, \{g_n\}\in H_2} \sum_{n=1}^{\infty} |(Af_n, g_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n. \tag{2.4.11}$$

Hier sind wieder $\{f_n\} \subseteq H_1$ und $\{g_n\} \subseteq H_2$ Orthonormalbasen. Für den Beweis siehe [G] §2 Nr.4 Satz 9.

Bemerkung: Mithilfe der Charakterisierung der nuklearen Operatoren durch die Spurnorm ist auch klar, dass die nuklearen Operatoren einen Vektorraum bilden, da für zwei nukleare Operatoren A und B und Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sup \sum_{n=1}^{\infty} |(\alpha A + \beta B f_n, g_n)| \leq \alpha \sup \sum_{n=1}^{\infty} |(Af_n, g_n)| + \beta \sup \sum_{n=1}^{\infty} |(Bf_n, g_n)|.$$

Es gilt sogar der folgende Satz:

2.4.5 Satz *Die Menge der nuklearen Operatoren $A : H_1 \to H_2$ ist bezüglich der Spurnorm vollständig.*
Beweis Siehe [G] §2 Nr.3 Satz 10. □

Mithilfe des Zusammenhangs von Spur und Spurnorm können wir eine besonders handliche Charakterisierung nuklearer Operatoren beweisen:

2.4.6 Satz *Seien H_1, H_2 Hilberträume. Dann ist ein Operator $A : H_1 \to H_2$ genau dann nuklear, wenn es eine orthonormierte Basis $\{f_n\}$ von H_1 gibt, sodass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|_{H_2}$ konvergiert.*

Beweis Sei eine ONB $\{f_n\}$ von H_1 gegeben, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|_{H_2}$ konvergiert. Dann konvergiert sicher auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|_{H_2}^2$ und wegen Lemma 2.3.9 ist A vom Hilbert-Schmidtschen Typ und insbesondere kompakt. Wegen Satz 2.3.6 können wir also in der Form $A = UT$ schreiben mit einem kompakten selbstadjungierten Operator $T : H_1 \to H_1$ und einem isometrischen Operator $U : T(H_1) \to H_2$. Es gilt die Abschätzung:

$$(Tf_n, f_n) \leq \sup\{(Tf_n, g_n), \|g_n\|_{H_1} = 1\} = \|Tf_n\|_{H_1} = \|UTf_n\|_{H_2} = \|Af_n\|_{H_2}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \|Af_n\|_{H_2}$ ist daher auch $\|A\|_S = \mathrm{Sp}(T) = \sum_{n=1}^{\infty}(Tf_n, f_n)$ endlich und A nuklear.
Sei umgekehrt A nuklear und $A = UT$ eine Zerlegung wie oben. Sei $\{t_n\}$ eine ONB von H_1 bestehend aus Eigenvektoren von T, dann gilt

$$\sum_n \|At_n\|_{H_2} = \sum_n \|Tt_n\|_{H_1} = \sum_n \tau_n < \infty.$$

□

Ist $A : H_1 \to H_2$ ein nuklearer Operator, so hat A bekanntlich die Darstellung

$$Af = \sum_n \lambda_n (f, f_n) g_n \tag{2.4.12}$$

mit Orthonormalbasen $\{f_n\} \subseteq H_1$ und $\{g_n\} \subseteq H_2$ sowie einer Nullfolge positiver reeller Zahlen $\{\lambda_n\}$, für die die Reihe $\sum_n \lambda_n$ konvergiert. Anhand der Überlegungen zu ausgearteten Operatoren im vorangegangenen Abschnitt wird deutlich, dass für einen nuklearen Operator A und $N \in \mathbb{N}$ auch

$$A_N f = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (f, f_n) g_n \tag{2.4.13}$$

stets ein nuklearer Operator ist. Es gilt sogar der folgende Satz:

2.4.7 Satz *Der Raum der nuklearen Operatoren ist bezüglich der Spurnorm die abgeschlossene lineare Hülle der Menge der ausgearteten Operatoren.*
Beweis Siehe [G] §2 Nr.3 Satz 10. □

Einen ausgearteten Operator $A : H_1 \to H_2$ können wir stets auch als Summe von Operatoren vom Rang 1 schreiben. Dazu wählen wir eine Basis $\{g_n\}_{n=1}^m$ in $A(H_1) \subseteq H_2$ mit $m = \dim A(H_1)$und setzen für ein $f \in H_1$:

$$Af = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(f) g_k. \tag{2.4.14}$$

Wegen der vorausgesetzten Linearität von A sind die Koeffizienten $\{\alpha_k(f)\}_{k=1}^m$ lineare Funktionale auf H_1 und aus dem Satz von Riesz erhalten wir Hilbertraumelemente $\{f_k\}_{k=1}^m \subset H_1$ sodass $(f, f_k) = \alpha_k(f)$ für alle $f \in H_1$ und $k \in \{1 \dots m\}$ erfüllt ist. Die Abbildung $P_k f \mapsto (f, f_k) g_k$ ist ein linearer Operator vom Rang 1 und hat die Operatornorm:

$$\|P_k\| = \sup_{\|f\|=1} \|P_k f\|_{H_2} = \sup_{\|f\|=1} |(f, f_k)| \|g_k\|_{H_2} = \|f_k\|_{H_1} \|g_k\|_{H_2}.$$

Das folgende Lemma zeigt nun, dass für Operatoren vom Rang 1, die Operatornorm mit der Spurnorm übereinstimmt.

2.4.8 Lemma *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $P : H_1 \to H_2$ ein Operator vom Rang 1, definiert durch $Pf = (f, t)u$ mit $t \in H_1$ und $u \in H_2$, dann gilt*

$$\|P\|_S = \|P\|. \tag{2.4.15}$$

Wobei $\|.\|_S$ die Spurnorm und $\|.\|$ die übliche Operatornorm bezeichnet.

Beweis Aufgrund der Definition der Spurnorm folgt sofort, dass $\|P\| \leq \|P\|_S$. Andererseits gilt für Orthogonalsysteme $\{f_k\} \in H_1$ und $\{g_k\} \in H_2$ unter Verwendung der

Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\|P\|_S^2 = \sup_{f_k,g_k} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(Pf_k, g_k)_{H_2}| \right)^2 = \sup_{f_k,g_k} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(f_k, t)_{H_1}||(u, g_k)_{H_2}| \right)^2 \leq$$
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\|f_k\|=1} |(f_k, t)_{H_1}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\|g_k\|=1} |(u, g_k)_{H_2}|^2 \right) = \|t\|_{H_1} \|u\|_{H_2} = \|P\|.$$

□

Wir können also den ausgearteten Operator $A : H_1 \to H_2$ als Summe von Operatoren vom Rang 1 darstellen

$$Af = \sum_{k=1}^{m} P_k f.$$

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, aber es gilt das folgende Lemma:

2.4.9 Lemma *Seien H_1, H_2 Hilberträume und $A : H_1 \to H_2$ ein ausgearteter Operator dann gilt:*

$$\|A\|_S = \inf \sum_{k=1}^{m} \|P_k\|. \tag{2.4.16}$$

Wobei das Infimum über alle Zerlegungen des Operators A in Summen von Operatoren vom Rang 1 gebildet wird.

Beweis Da A kompakt ist, können wir A in ein Produkt UT zerlegen und schreiben:

$$Af = \sum_{k=1}^{m} \tau_k (f, t_k) u_k$$

wobei wieder $Tt_k = \tau_k t_k$ mit $\tau_k > 0$ und $u_k = Ut_k$ sind. $P_k := \tau_k (f, t_k) u_k$ ist dann ein Operator vom Rang 1 und es folgt:

$$\sum_{k=1}^{m} \|P_k\| = \sum_{k=1}^{m} \sup_{\|f\|=1} \tau_k |(f, t_k)| \|u_k\|_{H_2} = \sum_{k=1}^{m} \tau_k = \mathrm{Sp}(T).$$

Und also auch

$$\inf \sum_{k=1}^{m} \|P_k\| \leq \mathrm{Sp}(T) = \|A\|_S.$$

Für die Gegenrichtung sei wieder $A = \sum_{k=1}^{m} P_k$. Aufgrund der Definition der Spurnorm und Lemma 2.4.8 gilt

$$\|A\|_S \leq \sum_{k=1}^{m} \|P\|_S = \sum_{k=1}^{m} \|P\|$$

für alle Zerlegungen des Operators A. Also gilt auch

$$\|A\|_S \leq \inf \sum_{k=1}^{m} \|P\|$$

und es folgt insgesamt die Gleichheit

$$\|A\|_S = \inf \sum_{k=1}^{m} \|P\| = \inf \sum_{k=1}^{m} \|t_k\| \|u_k\| \tag{2.4.17}$$

wobei das Infimum über alle Zerlegungen des Operators A in Operatoren vom Rang 1 gebildet wird. □

Bemerkung: Wegen dem letzten Lemma sind also die nuklearen Operatoren auch die abgeschlossene lineare Hülle der Operatoren vom Rang 1.

2.5 Verallgemeinerte Eigenvektoren

Bisher haben wir nur gewisse Spezialfälle kompakter Operatoren betrachtet, die stets ein vollständiges System von Eigenvektoren in einem Hilbertraum H besitzen. Für viele allgemeinere lineare Operatoren gestaltet sich die Suche nach Eigenwerten wesentlich schwieriger. Das folgende Beispiel zeigt einen besonders extremen Fall und findet sich in etwas kürzerer Form auch in Kapitel 1.3 in [B].

Beispiel: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und μ ein positives Maß auf Ω. Wir betrachten den Hilbertraum $L^2_\mu(\Omega)$ und definieren dort den Operator Q durch die (Eigenwert-)gleichung:

$$Qf(x) = xf(x) \tag{2.5.18}$$

Diese Gleichung ist folgendermaßen zu lesen: Wirkt der Operator Q auf eine Funktion $f \in L^2_\mu(\Omega)$, so entsteht eine neue Funktion $\tilde{f}$, die an der Stelle x den Wert $xf(x)$ besitzt. Eine Eigenfunktion q von Q zum Eigenwert λ müsste erfüllen:

$$\begin{aligned} Qq(x) = xq(x) = \lambda q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (x-\lambda)q(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Eine solche Funktion müsste für alle $x \neq \lambda$ verschwinden und entspräche damit im L^2 der Nullfunktion. Demnach hat Q im L^2 keine nichttrivialen Eigenfunktionen.

Mittels des Konzepts der Distributionen wollen wir nun den Begriff der Eigenfunktionen verallgemeinern. Die nachfolgenden Begriffsbildungen finden sich auch in [G]§5 Nr.4. Zuerst aber setzen wir das obige Beispiel fort:

Beispiel: Sei wieder $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und $\mathcal{D}(\Omega)$ die Menge der Testfunktionen auf Ω. Die verschobene δ-Distribution δ_α erfüllt dann die Gleichung

$$\langle \delta_\alpha, \phi \rangle = \phi(\alpha) \tag{2.5.19}$$

Mithilfe der Rechenregeln für Distributionen und der Tatsache, dass für eine Testfunktion ϕ auch $\psi := x\phi$ eine Testfunktion ist, erhalten wir:

$$\langle \delta_\alpha, x\phi \rangle = \langle \delta_\alpha, \psi \rangle = \psi(\alpha) = \alpha\phi(\alpha) = \langle \delta_\alpha, \alpha\phi \rangle \tag{2.5.20}$$

Die Gleichheit $\langle \delta_\alpha, x\phi \rangle = \langle \delta_\alpha, \alpha\phi \rangle$ ähnelt dann in gewissem Sinne einer Eigenwertgleichung und wir können definieren:

2.5.1 Definition Es sei X ein topologischer Vektorraum und A ein Operator auf X. Erfüllt ein Funktional F aus X' die Gleichung

$$\langle F, A\phi \rangle = \lambda \langle F, \phi \rangle \tag{2.5.21}$$

für alle $\phi \in X$, so nennen wir F einen *verallgemeinerten Eigenvektor* des Operators A zum Eigenwert λ.

Bemerkung: Die Gleichung (2.5.21) kann auch in der äquivalenten Form $\langle A'F, \phi \rangle = \langle \lambda F, \phi \rangle$ geschrieben werden. D.h. wir können F auch als Eigenvektor des dualen Operators A' verstehen.

Bemerkung: Falls es zu einem Eigenwert λ mehrere verallgemeinerte Eigenwerte F gibt, so fassen wir sie im *(verallgemeinerten) Eigenraum* X'_λ zusammen.

2.5.2 Definition Es sei X ein topologischer Vektorraum und A ein linearer Operator auf X. X' sei der Dualraum von X und für jedes λ im Spektrum von A sei X'_λ der Raum aller verallgemeinerten Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ. Für ein $x \in X$ bezeichnen wir mit $\tilde{x_\lambda}$ das Punktauswertungsfunktional:

$$\tilde{x_\lambda} : \lambda \mapsto \{F(x), F \in X'_\lambda\} \subset \mathbb{C},$$

welches alle Funktionale zum Eigenwert λ an x auswertet. Sind alle (verallgemeinerten) Eigenräume eindimensional so ist $\tilde{x}_\lambda$ eine skalare Funktion.
Für festes λ nennen wir die Abbildung $x \mapsto \tilde{x_\lambda}$ *Spektralzerlegung des Elements x.*

2.5.3 Definition Sei X ein topologischer Vektorraum, A ein linearer Operator auf X und $\tilde{x}_\lambda$ definiert wie oben. Wir sagen A hat ein *vollständiges System verallgemeinerter Eigenvektoren* wenn für alle Eigenwerte λ von A aus $\tilde{x}_\lambda \equiv 0$ folgt $x = 0$.

Auf den folgenden Seiten werden wir für einige Typen von Operatoren zeigen, dass sie ein vollständiges System verallgemeinerter Eigenvektoren besitzen.

Kapitel 3

Nukleare Räume und Gelfand-Tripel

In diesem Kapitel definieren wir Gelfand-Tripel und beweisen den verallgemeinerten Spektralsatz. Inhaltlich stützen wir uns größtenteils auf §§ 3 und 4 in [G], wobei wir jedoch den Aufbau etwas abwandeln. Wir beginnen mit der Definition nuklearer Räume:

3.1 Nukleare Räume

Ein abzählbarer Hilbertraum wurde in Kapitel 1 als Schnitt über alle Vervollständigungen X_n eines Raumes X bezüglich einer abzählbaren Folge von Skalarprodukten $(.,.)_n$ definiert. Aufgrund der Definition $X_n = \overline{X}^{\|\cdot\|_n}$ ist X dicht in allen X_n. Wollen wir ein $x \in X$ explizit als Element von X_n fassen, so schreiben wir $x^{(n)}$. Wir betrachten nun die Einbettung:

$$t_{mn} : \left\{ \begin{array}{c} X \subseteq X_m \to X_n \\ x^{(m)} \mapsto x^{(n)} \end{array} \right. \tag{3.1.1}$$

zusammen mit dem folgenden Satz:

3.1.1 Satz *Seien $(Y_1, d_1), (Y_2, d_2)$ metrische Räume und (Y_2, d_2) vollständig. Sei weiters $D \subseteq Y_1$ eine dichte Teilmenge von Y_1 und $f : D \to Y_2$ eine gleichmäßig stetige Abbildung d.h.*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Dann existiert genau eine (gleichmäßig) stetige Abbildung $F : Y_1 \to Y_2$, sodass $F|_D = f$. Ist f außerdem isometrisch, so auch F.

Beweis Siehe [F] Satz 1.1.1. □

Wählen wir die Skalarprodukte aufsteigend, so ist für $n \leq m$ $t_{mn} : X \subseteq X_m \to X_n$ offensichtlich eine gleichmäßig stetige Abbildung von einer dichten Teilmenge von X_m auf eine dichte Teilmenge von X_n und mithilfe von Satz 3.1.1 können wir t_{mn} zur Abbildung $T_{mn} : X_m \to X_n$ fortsetzen. Insbesondere gilt für $p \leq m \leq n : T_{mp} = T_{mn} T_{np}$. Wir definieren nun:

3.1.2 Definition Ein abzählbarer Hilbertraum heißt *nuklear*, wenn zu jedem m ein n existiert, sodass die Abbildung $T_{mn} : X_m \to X_n$ nuklear ist. D.h. wir können T_{mn} darstellen als:

$$T_{mn}x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, m_k)_m n_k \tag{3.1.2}$$

mit Orthonormalsystemen $\{m_k\} \subseteq X_m$ und $\{n_k\} \subseteq X_n$, sowie einer positiven Nullfolge $\{\lambda_k\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$.

Bemerkung: Es genügt sogar zu fordern, dass zu jedem m ein n existiert, sodass die Abbildung $T_{mn} : X_m \to X_n$ ein Hilbert-Schmidtscher Operator ist. Wir wählen dann für $m \in \mathbb{N}$ die Hilbert-Schmidtschen Operatoren T_{mn} und T_{np} und erhalten durch Hintereinanderausführung den nuklearen Operator $T_{mp} = T_{np}T_{mn}$.

Der so bestimmte Begriff eines nuklearen Raums ist noch recht abstrakt, weshalb wir im Folgenden einige konkrete Beispiele nuklearer Räume anführen:

Beispiel: Wir betrachten den Raum

$$P(a) := \{f \in C^{\infty}(-a, a) : f \text{ ist } 2a\text{-periodisch}\} \tag{3.1.3}$$

und weisen nach, dass $P(a)$ ein nuklearer Raum ist. Dafür definieren wir eine abzählbare Folge von Skalarprodukten $(.,.)_k$ mittels:

$$(f, g)_n = \sum_{k=0}^{n} \int_{-a}^{a} \frac{d^k}{dx^k} f(x) \overline{\frac{d^k}{dx^k} g(x)} dx. \tag{3.1.4}$$

Die Funktionen $e_\mu = e^{\frac{i\pi\mu x}{a}}$ mit $\mu \in \mathbb{Z}$ sind wegen

$$\int_{-a}^{a} (\frac{d^k}{dx^k} e^{\frac{i\pi\mu x}{a}})(\frac{d^k}{dx^k} e^{\frac{-i\pi\nu x}{a}}) dx = \int_{-a}^{a} \left(\frac{\pi\mu}{a}\right)^{2k} e^{\frac{i\pi x}{a}(\mu-\nu)} dx = \begin{cases} 2a\left(\frac{\pi\mu}{a}\right)^{2k} & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

bezüglich aller Skalarprodukte orthogonal (wenn auch nicht normiert) und bilden ein vollständiges System (für den Beweis siehe: [A] Lemma 17.4.1). Offensichtlich ist dann $\|e_\mu\|_n^2 = 2a \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\pi\mu}{a}\right)^{2k}$.

Bezeichne $P_n(a)$ die Vervollständigung von $P(a)$ bezüglich $\|.\|_n$, dann ist die Folge $\{\hat{e}_\mu^{n+2}\}_{\mu\in\mathbb{Z}}$ definiert durch $\hat{e}_\nu^{n+2} = \frac{1}{\|e_\nu\|_{n+2}} e_\nu$ eine ONB in $P_{n+2}(a)$, da

$$(\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu)_{n+2} = \frac{1}{\|e_\mu\|_{n+2}} \sum_{j=0}^{n+2} \int_{-a}^{a} (\frac{d^k}{dx^k} e^{\frac{i\pi\mu x}{a}})(\frac{d^k}{dx^k} e^{\frac{-i\pi\nu x}{a}}) dx = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ \frac{1}{\|e_\mu\|_{n+2}} 2a \sum_{j=1}^{n+2} \left(\frac{\pi\mu}{a}\right)^{2j} = 1, & \mu = \nu \end{cases}$$

Die Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|T_{n,n+2}\hat{e}_\mu\|_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|e_\mu\|_n}{\|e_\mu\|_{n+2}}$$

konvergiert und wegen Satz 2.4.6 sind alle Operatoren $T_{n,n+2}$ nuklear und damit auch der Raum $P(a)$.

Weitere wichtige nukleare Räume sind etwa der bereits vorgestellte Raum der Testfunktionen sowie die Schwartz-Klasse $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^k f^{(m)}(x)| < \infty \forall k, m \in \mathbb{N}\} \tag{3.1.5}$$

Die entsprechenden Beweise sind weit umfangreicher als im obigen Fall. Sie können in [G] §3 Nr.6 oder [Ka] Abschnitt 11.4 und 11.5 nachgelesen werden.

3.2 Gelfand Tripel

Sei X ein nuklearer abzählbarer Hilbertraum, definiert durch eine Folge von Skalarprodukten $\{(.,.)_n\}$. Sei nun $(.,.)$ ein weiteres Skalarprodukt, das zusätzlich zu den Eigenschaften aus Definition 1.2.1 noch

$$x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\infty} x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n, y) = (x, y) \quad x_n, x, y \in X \tag{3.2.6}$$

erfüllt. Hier ist die erste Konvergenz bezüglich der von den Skalarprodukten $\{(.,.)_n\}$ induzierten Topologie auf X zu verstehen.

Bemerkung: Offensichtlich folgt aus $y_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\infty} y$ auch $\lim_{n\to\infty}(x, y_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{(y_n, x)} = \overline{(y, x)} = (x, y)$.
Nicht ganz so offensichtlich ist vielleicht, dass ein Skalarprodukt, das Bedingung (3.2.6) erfüllt auch bezüglich einer der Normen $\|.\|_m$ stetig ist. Ein sehr allgemeiner Beweis dieser Behauptung kann in [G] §1 Nr.1 - Nr.2 nachgelesen werden. Wir präsentieren hier nur die für die weiteren Überlegungen relevante Fassung und skizzieren die wichtigsten Beweisschritte:

3.2.1 Satz *Sei X ein abzählbarer Hilbertraum und $(.,.)$ ein Skalarprodukt auf X, das die Bedingung (3.2.6) erfüllt. Dann ist $(.,.)$ auch stetig bezüglich einer der Normen $\|.\|$, die die Topologie auf X bilden. Das heißt*

$$\exists m \in \mathbb{N} \exists M > 0 : |(x, y)| \leq M \|x\|_m \|y\|_m \forall x, y \in X \tag{3.2.7}$$

Beweisskizze

1. Zuerst benötigen wir den folgenden Hilfssatz:

   Sei $\{f_n\}$ eine monoton fallende Folge konvexer nach unten halbstetiger Funktionale auf einem abzählbaren Hilbertraum X[1], die außerdem erfüllen, dass für jedes x aus

[1] Wir nennen ein Funktional f auf X *konvex*, wenn für alle $x, y \in X$ gilt $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.
Wir nennen ein Funktional f auf X *nach unten halbstetig im Punkt* x_0, wenn für alle $\epsilon > 0$ eine Umgebung U um x_0 existiert, sodass: $f(x_0) - \epsilon < f(y)$ für alle $y \in U$. f heißt *nach unten halbstetig auf* X, wenn f an allen Punkten $x \in X$ nach unten halbstetig ist

X ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $f_n(x) < \infty \quad \forall n \geq n_0$. Dann gibt es Konstanten $m, k \in \mathbb{N}$ und $M > 0$, sodass

$$f_n(x) \leq M\|x\|_m \quad \forall x \in Xn \geq k.$$

Für den Beweis dieser Aussage betrachten wir die Mengen $A_n := \{x \in X : f_n(x) \leq 1\}$ und zeigen, dass für einen Index n_0 gilt $U_{m,\frac{1}{M}} := \{x \in X : \|x\|_m < \frac{1}{M}\} \subseteq A_{n_0}$. Also folgt aus $\|x\|_m < \frac{1}{M}$, dass $f_{n_0}(x) \leq 1$. Da die Funktionale monoton fallen, gilt dann: $f_n(x) \leq M\|x\|_m \quad \forall n \geq n_0$.

2. Für den nächsten Schritt betrachten wir die Funktionalfolge $\{g_n\}$ definiert durch:

$$g_n(x) := \sup_{\|y\|_n \leq 1} |(x, y)|$$

und zeigen, dass sie die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllen. Insbesondere ergibt sich die Monotonie der Folge aus der Tatsache, dass wir die Normen in X aufsteigend wählen. Aus dem Hilfsatzes folgt dann die Existenz natürliche Zahlen m_1, k sowie $M > 0$, sodass:

$$g_n(x) = \sup_{\|y\|_n \leq 1} |(x, y)| \leq M\|x\|_{m_1} \quad \forall n > k.$$

Aufgrund der Definition von g_n und mit der Festlegung $m := \max\{m_1, n\}$ folgt schließlich

$$|(x, y)| \leq M\|x\|_{m_1}\|y\|_n \leq M\|x\|_m\|y\|_m.$$

□

Wenn wir X bezüglich der von $(.,.)$ induzierten Norm $\|.\|$ vervollständigen, so erhalten wir einen Hilbertraum H. X ist damit eine dichte Teilmenge von H und mit Satz 3.2.1 können wir besonders einfach zeigen, dass die kanonische Einbettung $\iota : X \to H$ ein stetiger linearer Operator ist:

Bekannterweise ist eine Abbildung f von einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ in einen topologischen Raum $(Y, \mathcal{O})$ stetig, wenn für alle $U \in \mathcal{O}$ ein $V \in \mathcal{T}$ existiert, sodass $f(V) \subseteq U$. Sei also $U_\epsilon := \{h \in H, \|x\| < \epsilon\}$ eine Nullumgebung in der vom Skalarprodukt $(.,.)$ erzeugten Normtopologie $\mathcal{T}$ auf H. m sei eine natürliche Zahl, für die die Ungleichung (3.2.7) gilt und $U_{m,\frac{\epsilon}{\sqrt{M}}} = \{x \in X : \|x\|_m < \frac{\epsilon}{\sqrt{M}}\}$ sei eine Nullumgebung aus $\mathcal{T}_\infty$. Dann gilt: $\iota(U_{m,\frac{\epsilon}{M}}) \subseteq U_\epsilon$, da

$$\|\iota(x)\| = \sqrt{(x, x)} \leq \sqrt{M}\|x\|_m < \epsilon.$$

Für beliebige andere Umgebungen $U \in \mathcal{T}$ kann das Problem wegen der Linearität der kanonischen Einbettung auf den obigen Fall zurückgeführt werden.

Definieren wir den zu ι dualen Operator $\iota' : H' \to X'$ wie üblich durch

$$\langle \iota' h', x \rangle = \langle h', \iota x \rangle \quad h' \in H', x \in X$$

und identifizieren wir mithilfe des Satz von Riesz H' mit H, so können wir ι' als Abbildung von H nach X' verstehen und wir erhalten das Tripel:

$$X \xrightarrow{\iota} H = H' \xrightarrow{\iota'} X'. \tag{3.2.8}$$

Bemerkung: Der Kürze halber schrieben wir statt $X \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\iota'} X'$ oft auch $X \subset H \subset X'$.

3.2.2 Definition Ein Tripel $X \subset H \subset X'$ heißt *Gelfand'sches Raumtripel* oder *Gelfand-Tripel*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- X ist ein nuklearer abzählbarer Hilbertraum, in dem ein Skalarprodukt $(.,.)$ definiert ist.
- H ist die Vervollständigung von X bezüglich $(.,.)$.
- X' ist der zu X duale Raum.

X liegt aber nicht nur dicht in H sondern auch in allen X_n. Da Konstanten $m \in \mathbb{N}$ und $M > 0$ existieren, sodass $\|\iota(x)\| \leq \sqrt{M}\|x\|_m$ ist ι auch stetig bezüglich $\|.\|_n$ mit $n \geq m$. Mithilfe von Satz 3.1.1 können wir daher ι zu abzählbar vielen Abbildungen $\iota_n : X_n \to H, n \geq m$ fortsetzen.

Es lässt sich sogar zeigen, dass die Abbildungen ι_n nuklear sind (der Nachweis erfolgt über eine abstrakte Fassung des Lemmas von Lax Milgram und kann in [G] §3 Nr.5 Satz 5 nachgelesen werden). Insbesondere gibt es also Orthonormalbasen $\{h_k\} \subseteq H$ und $\{x_k^{(n)}\} \subseteq X_n$, sowie eine Nullfolge $\{\lambda_k\} \subseteq \mathbb{R}$ mit $\sum_k \lambda_k < \infty$, sodass für alle $x \in X$ gilt:

$$\iota_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, x_k^{(n)})_n h_k. \tag{3.2.9}$$

Da für alle $x \in X$ außerdem gilt $\iota(x) = \iota_n(x)$ können wir Gleichung (3.2.9) auch für die Einbettung ι aufstellen. Mit dem Satz von Riesz können wir außerdem die Skalarprodukte $(x, x_k^{(n)})_n$ als Funktionale $F_k^n(x) \in X_n'$ verstehen. Wegen der Identifikation von X_n und X_n' bilden die $\{F_k^n\}$ auch eine ONB in X_n'. Wir können also schreiben:

$$\iota(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k^n(x) h_k. \tag{3.2.10}$$

3.3 Nocheinmal direkte Integrale

Bevor wir den Hauptsatz über die Spektralzerlegung in Gelfand-Tripeln beweisen können, wollen wir nocheinmal zu den in Abschnitt 1 vorgestellten direkten Integralen zurückkehren. Dort hatten wir gezeigt, dass wir einen Hilbertraum über eine abzählbare ONB isometrisch in eine direkte Summe abbilden können. Nun wollen wir der Frage nachgehen, inwiefern diese Aussage auf direkte Integrale verallgemeinert werden kann. Hauptaufgabe dieses Abschnitt ist der Beweis des folgenden Satzes, der auch in [G] §4 nachgelesen werden kann:

3.3.1 Satz *Sei H ein Hilbertraum und $A : H \to H$ ein selbstadjungierter linearer Operator. Wenn wir $\mathbb{R}$ mit der σ-Algebra der Borelmengen versehen, gibt es ein positives Maß μ und eine isometrische Abbildung von H in das direkte Integral:*

$$\mathfrak{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \bigoplus H(\omega) d\mu(\omega)$$

sodass A dort der Multiplikation mit der reellen Zahl ω entspricht.

Für den Beweis müssen wir etwas weiter ausholen:

3.3.2 Definition Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einer Menge Ω, einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und einem Maß μ. Sei weiters H ein Hilbertraum und bezeichne mit $\mathcal{B}(H)$ die Menge aller beschränkten linearen Operatoren $A : H \to H$. Eine *Zerlegung der Einheit* ist dann eine Abbildung $E : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(H)$ mit den Eigenschaften:

1. Für jedes $\Delta \in \mathfrak{A}$ ist $E(\Delta)$ eine orthogonale Projektion mit $E(\Delta)^2 = E(\Delta)$.
2. $E(\Omega) = I$ und $E(\emptyset) = 0$.
3. Für $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{A}$ gilt:$E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$.
4. Ist $\Delta_n \in \mathfrak{A}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen und $\Delta = \bigcup_n \Delta_n$ so gilt

$$E(\Delta) = \sum_n E(\Delta_n).$$

Bemerkung: Sei $f \in H$ und $\Delta \in \mathfrak{A}$ dann gilt aufgrund der obigen Eigenschaften:

$$(E(\Delta)f, f) = (E(\Delta)^2 f, f) = (E(\Delta)f, E(\Delta)f) \geq 0$$

3.3.3 Definition Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, H ein Hilbertraum und $E : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(H)$ eine Zerlegung der Einheit. Sei $f \in H$ beliebig. Wir nennen die Abbildung

$$\mu_f \begin{cases} \mathfrak{A} \to \mathbb{R} \\ \Delta \mapsto (E(\Delta)f, f) \end{cases}$$

ein zur Zerlegung E gehöriges Spektralmaß.

Bemerkung: Mithilfe der Eigenschaften aus Definition 3.3.2 lässt sich leicht zeigen, dass μ_f tatsächlich eine nichtnegative σ-additive Maßfunktion ist. Falls außerdem $\Omega = \mathbb{R}$ so verwenden wir für $x \in \mathbb{R}$ auch die Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} E(x) &:= E((-\infty, x]) \\ \mu_f(x) &:= (E(x)f, f). \end{aligned}$$

Für beschränkte selbstadjungierte Operatoren, gilt nun der folgende Satz:

3.3.4 Satz *(Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren) Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{B}(H)$ ein selbstadjungierter Operator. Bezeichne mit $\sigma(A)$ das Spektrum von A und mit $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf $\sigma(A)$. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung der Einheit $E : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(H)$, sodass wir A schreiben können als*

$$Af = \int_{\sigma(A)} \omega dE(\omega). \tag{3.3.11}$$

Beweis Siehe [F] Satz 7.2.1. □

Dieser Satz lässt sich auch auf unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren verallgemeinern:

3.3.5 Satz *Sei A ein linearer selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum H. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zerlegung der Einheit definiert auf dem Spektrum $\sigma(A)$ von A, sodass das zugehörige Spektralmaß auf $\mathbb{R} \setminus \sigma(A)$ verschwindet und der Definitionsbereich von A durch*

$$\mathcal{D} = \{h \in H : \int_{\sigma(A)} \omega^2 d\mu_h(\omega) < \infty\}$$

bestimmt wird. Für ein Hilbertraumelement f können wir dann schreiben

$$Af = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \omega E(d\omega) f.$$

Beweis Siehe [DS] XII Theorem 3. □

Um nun nachzuweisen, dass jeder Hilbertraum H isometrisch in ein direktes Integral von Hilberträumen eingebettet werden kann, betrachten wir zuerst einen Spezialfall:

3.3.6 Definition Sei H ein Hilbertraum $A : H \to H$ selbstadjungiert und E die eindeutige zu A gehörige Zerlegung der Einheit, welche nach Satz 3.3.5 existiert. Wir nennen A *zyklisch*, wenn es ein $f \in H$ gibt, sodass

$$\overline{\operatorname{span}\{E(\Delta)f, \Delta \in \mathfrak{A}\}} = H.$$

Hier bezeichnet $\mathfrak{A}$ wieder die σ-Algebra der Borelmengen auf $\sigma(A)$.

3.3.7 Satz *Sei H ein Hilbertraum $A : H \to H$ ein zyklischer Operator. Dann können wir H isometrisch auf den Hilbertraum $L^2_{\mu_f}(\mathbb{R})$ abbilden. A wird unter dieser Abbildung zum Multiplikationsoperator und hat den Definitionsbereich:*

$$\mathcal{D}(A) = \{\phi \in L^2_{\mu_f}(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \phi(\omega)^2 d\mu_f(\omega) < \infty\}.$$

Beweis Voraussetzungsgemäß gibt es ein $f \in H$, sodass die Menge $D = \text{span}\{E(\Delta)f, \Delta \in \mathfrak{A}\}$ dicht in H liegt. Die Elemente von D haben die Form $d = \sum_k a_k E(\Delta)f$ mit reellen Koeffizienten a_k. Wir betrachten die Abbildung $\Psi : D \to L^2_{\mu_f}(\mathbb{R})$ die jedem $d \in D$ eine Treppenfunktion $t_d = \sum_k a_k \mathbb{1}_\Delta(\omega)$ zuordnet. Insbesondere ist $\Psi(f)$ der Indikator der Gesamtmenge. Bekanntlich liegt die Menge der Treppenfunktionen dicht im L^2 (Vgl. [K] Satz 7.20). Die Isometrie der Abbildung Ψ folgt wegen:

$$\|E(\Delta)f\|_H = (E(\Delta)f, E(\Delta)f) = (E(\Delta)f, f) = \mu_f(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbb{1}_\Delta|^2(\omega) d\mu_f(\omega).$$

Mit dem vorhergegangenen Satz gilt für jedes $\Delta \in \mathfrak{A}$ und $g \in H$

$$(AE(\Delta)f, g) = \int_\Delta \omega d(E(\omega)f, g)$$

und insbesondere:

$$(AE(\Delta)f, f) = \int_\Delta \omega d(E(\omega)f, f) = \int_\Delta \omega d\mu_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega \mathbb{1}_\Delta(\omega) d\mu_f(\omega).$$

D.h. A entspricht unter der Abbildung Ψ dem Operator der Multiplikation mit ω. $\square$

Über den Umweg zyklischer Operatoren können wir jetzt Satz 3.3.1 beweisen:

Beweis (Von Satz 3.3.1) Wir führen den Beweis in mehreren Schritten

1. Sei f ein Vektor aus H und E die zum Operator A gehörige Zerlegung der Einheit. Bezeichne mit H_f jenen Teilraum von H, der alle Linearkombinationen der Vektoren $E(\Delta)f$ enthält. Wir nennen H_f *den durch den Vektor f erzeugten zyklischen Teilraum von H*. Sei h ein Vektor in H mit $h \perp H_f$. Man sieht leicht, dass für beliebige Δ auch $E(\Delta)h \perp H_f$, denn da $E(\Delta)$ selbstadjungiert ist, gilt

$$(E(\Delta)h, g) = (h, E(\Delta)g) = 0 \quad \forall g \in H_f$$

2. Wir wählen eine abzählbare ONB $\{f_n\}$ von H und konstruieren damit induktiv eine Zerlegung von H in eine abzählbare orthogonale Summe. Setze $h_1 = f_1$ und sei H_1 der von h_1 erzeugte zyklische Teilraum. Für n paarweise orthogonale zyklische Teilräume, betrachten wir das erste Element f_{nk} der ONB, das nicht zu $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$ gehört. Wir wählen einen normierten Vektor h_{n+1} aus dem von $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$ und f_{nk} aufgespannten Raum und erzeugen damit den Raum H_{n+1}. Da die Menge $\{f_n\}$ dicht in H liegt, können wir auf diese Weise den gesamten Hilbertraum aufspannen. d.h.

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n.$$

3. Da die H_n lineare Teilraume von H sind, die bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Norm abgeschlossen wurden, sind die H_n selbst Hilberträume und wegen Satz 3.3.7 können wir sie mit Funktionenräumen $L^2_{\mu_n}(\sigma(A))$ identifizieren. Ein Skalarprodukt ist in H_n gegeben durch

$$(f_n, g_n)_{H_n} = \int f_n(\omega)\overline{g_n(\omega)}d\mu_n(\omega) \quad \text{mit } \mu_n(\omega) = (E(\omega)h_n, h_n)$$

wobei die h_n wieder die erzeugenden Vektoren der Teilräume H_n bezeichnen. Die Elemente aus H verstehen wir als Funktionenfolgen $f := \{f_n(\omega)\}$ mit $f_n \in H_n \simeq L^2_{\mu_n}$ und das Skalarprodukt in H als

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(\omega)\overline{g_n(\omega)}d\mu_n(\omega). \tag{3.3.12}$$

Da der Operator A unter der Abbildung $\Psi_n : H_n \to L^2_{\mu_n}$ dem Operator der Multiplikation mit ω entspricht, erhalten wir insgesamt:

$$Af = (\omega f_n(\omega))_n.$$

4. Wir wollen nun die Skalarprodukte in den Räumen H_n als Integrale bezüglich demselben Maß definieren. Dazu setzen wir

$$\mu(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mu_n(\Delta). \tag{3.3.13}$$

Wegen der Definition $0 < \mu_n(\Delta) = (E(\Delta)h_n, h_n)_H \leq \|h_n\| = 1$ ist diese Reihe für alle Δ konvergent. Insbesondere gilt $\mu(\Delta) = 0 \Rightarrow \mu_n(\Delta) = 0 \forall n$ d.h. alle μ_n sind absolut stetig bezüglich μ. Wir können den Satz von Radon-Nikodym (Vgl. [K] Satz 11.19) anwenden und alle μ_n als Integral positiver Funktionen ϕ_n bezüglich μ schreiben.

$$\mu_n(\Delta) = \int_{\Delta} \phi_n(\omega)d\mu(\omega).$$

Die Abbildung $h_n \mapsto \psi_n := \sqrt{\phi_n}h_n$ ist eine isometrische Abbildung von $H_n \simeq L^2_{\mu_n}$ nach L^2_{μ} da

$$\|\psi_n\|^2_{L^2} = \int |\psi_n(\omega)|^2 d\mu(\omega) = \int |h_n(\omega)|^2 \phi(\omega)d\mu = \int |h_n(\omega)|^2 d\mu_n = \|h_n\|^2_H.$$

Damit können wir die Elemente des Raumes H mit Folgen $\psi = \{\psi_n\}$ von quadratisch integrierbaren Funktionen identifizieren. Mit $h \mapsto \{\psi_n\}$ und $g \mapsto \{\varphi_n\}$ folgt:

$$(h, g)_H = \int \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \overline{\varphi_n} d\mu.$$

5. Da für alle $f \in H$ mit der Identifikation $h \mapsto \{\psi_n\}$ der Ausdruck $\int \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2 d\mu$ endlich ist, konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2$ überall außerhalb einer μ-Nullmenge.

Wir interpretieren also für fast alle ω die Funktionen $\psi_n(\omega)$ als Koordinaten $h_n(\omega)$ eines Vektors $h(\omega)$ in einem Hilbertraum $H(\omega)$. Es gilt:

$$\|h\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int |h_n(\omega)|^2 d\mu(\omega) = \int \|h(\omega)\|_{H(\omega)}^2 d\mu(\omega) \tag{3.3.14}$$

Was wiederum bedeutet, dass H isometrisch in das direkte Integral

$$\mathfrak{H} = \int \bigoplus H(\omega) d\mu(\omega)$$

eingebettet ist.

$\square$

3.4 Spektralzerlegung in Gelfand-Tripeln

In diesem Abschnitt rekonstruieren wir den Beweis des verallgemeinerten Spektralsatzes, wie er sich in [G] § 4 Nr. 5 findet. Wir beginnen dafür mit einigen einfachen Konvergenzaussagen, die aus dem verallgemeinerten Satz von Beppo Levi folgen:

3.4.1 Satz *(verallgemeinerter Satz von B. Levi) Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* f_n *eine monoton wachsende Folge* μ*-fü messbarer Funktionen. Gibt es eine* μ*-fü messbare Funktion* g *auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$*, sodass* $\forall n \in \mathbb{N}: \quad g \leq f_n$ *und* $\int_{\{x \in \Omega : g < 0\}} |g| d\mu < \infty$ *so gilt:*

$$\int \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int f_n d\mu \tag{3.4.15}$$

Beweis Siehe Satz 9.31 in [K]. $\square$

3.4.2 Lemma *Sei wieder* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum mit* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ *und sei* $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen von* Ω *nach* $\mathbb{R}$*. Dann folgt aus* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega g_k(\omega) d\mu < \infty$ *die* μ*-fü Konvergenz der Funktionenreihe* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$*.*

Beweis Da die $g_k \geq 0$ sind, ist $f_n := \sum_{k=1}^{n} g_k$ eine monoton wachsende Folge und für $g \equiv 0$ gilt stets $f_n \geq g$. Mit Satz 3.4.1 gilt:

$$\int \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int f_n d\mu = \lim_n \int \sum_{k=1}^{n} g_k d\mu = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int g_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k d\mu.$$

Ist nun die rechte Seite endlich so auch die linke und damit ist $\lim_n f_n = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ integrierbar und also messbar. $\square$

3.4.3 Lemma *Es sei $\mathfrak{h}_k$ eine orthonormale Basis im Raum $\mathfrak{H} = \int_\Omega \oplus H(\omega)d\mu(\omega)$ (d.h. Eine quadratisch integrierbare Funktion deren Werte für jedes ω in einem Hilbertraum $H(\omega)$ liegen.) und λ_k eine Folge positiver Zahlen für die $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|\mathfrak{h}_k(\omega)\| \quad \mu\text{-fü}. \tag{3.4.16}$$

Beweis Mithilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|\mathfrak{h}_k(\omega))\|\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}(\sqrt{\lambda_k}\|\mathfrak{h}_k(\omega))\|)\right)^2 \leq$$
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \|\mathfrak{h}_j(\omega))\|^2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \|\mathfrak{h}_j(\omega))\|^2.$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ konvergiert, genügt es die Konvergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \|\mathfrak{h}_j(\omega))\|^2$ zu zeigen. Da die $\mathfrak{h}_j(\omega)$ ein ONS bilden, wenden wir das Konvergenzkriterium aus Satz 3.4.2 an und erhalten:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int \lambda_j \|\mathfrak{h}_j(\omega))\|^2 d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \infty.$$

□

Nach diesem Exkurs kehren wir wieder zu Gelfand-Tripeln zurück. Wie wir im vorangegangenen Abschnitt gezeigt haben, lässt sich ein Hilbertraum H isometrisch in einen Funktionenraum einbetten. Sei nun $X \subset H \subset X'$ ein Gelfand-Tripel und werde der Hilbertraum H isometrisch in einen solchen Funktionenraum eingebettet. Da alle Elemente aus dem nuklearen Raum X auch in H liegen, entsprechen auch ihnen Elemente des Funktionenraums. Der folgende Satz zeigt nun, dass die Elemente aus X mit ihren zugehörigen Funktionen sogar über einen nuklearen Operator verbunden sind.

3.4.4 Satz *Es sei $X \subset H \subset X'$ ein Gelfand-Tripel und*

$$\Phi \begin{cases} H \to \mathfrak{H} = \int_\Omega \oplus H(\omega)d\mu(\omega) \\ \qquad h \mapsto \mathfrak{h}(\omega) \end{cases} \tag{3.4.17}$$

eine isometrische Einbettung von H in das direkte Integral $\mathfrak{H}$. Dann existiert für jedes $\omega_0 \in \Omega$ ein nuklearer Operator $T_{\omega_0} : X \to H(\omega)$, sodass für alle $x \in X$ die Funktionsgleichung

$$x(\omega) = T_\omega(x) \tag{3.4.18}$$

μ-fü erfüllt ist.

Beweis Da X ein nuklearer Raum ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$, orthonormale Basen $\{h_k\} \in H$ und $\{F_k^n\} \in X_n'$ und eine Folge $\lambda_k > 0$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$, sodass die kanonische Einbettung

$\iota : X \to H$ als unendliche Reihe geschrieben werden kann:

$$\iota(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k^n(x) h_k. \tag{3.4.19}$$

Wir definieren nun für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$ einen Operator vom Rang 1 durch

$$T_\omega^k = \begin{cases} X_n \to H(\omega) \\ x \mapsto \lambda_k F_k^n(x) h_k(\omega) \end{cases} \tag{3.4.20}$$

und setzen weiters:

$$T_\omega := \sum_k T_\omega^k.$$

Wie wir in Satz 2.4.7 gesehen haben, sind die nuklearen Operatoren gerade die bezüglich der Spurnorm abgeschlossene lineare Hülle der Operatoren vom Rang 1. Da außerdem für Operatoren vom Rang 1 die Spurnom $\|.\|_S$ mit der Operatornorm $\|.\|$ übereinstimmt (Vgl.Satz 2.4.8), können wir die Nuklearität von T_ω zeigen, indem wir nachweisen, dass der Ausdruck

$$\|T_\omega\|_S = \lim_N \sum_{k=1}^{N} \|T_\omega^k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|T_\omega^k\|$$

für alle ω außerhalb einer μ-Nullmenge konvergiert. Dafür betrachten wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T_\omega^k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x \in X : \|x\|_n = 1} \|\lambda_k F_k^n(x) h_k(\omega)\|_{H(\omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|F_k^n\|_{-n} \|h_k(\omega)\|_{H(\omega)}.$$

Da die F_k^n normiert sind, ist $\|F_k^n\| = 1$ und es bleibt nur die μ-fü Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \|h_k(\omega)\|_{H(\omega)}$ zu zeigen. Diese folgt aber sofort aus Lemma 3.4.3.

Wir setzen also $T_\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k^n h_k(\omega)$ für alle ω, für die die Reihe konvergiert und $T_\omega = 0$ sonst. Damit erhalten wir:

$$T_\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k^n(x) h_k(\omega) \quad \mu\text{-fü}. \tag{3.4.21}$$

Da aber das Element $x(\omega)$ nach (3.4.19) auch geschrieben werden kann als

$$\iota(x)(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k^n(x) h_k(\omega) \tag{3.4.22}$$

folgt die behauptete Gleichheit durch einen Vergleich der beiden Reihen (3.4.21) und (3.4.22). $\square$

Mithilfe dieser Resultate können wir nun den wichtigsten Satz dieser Arbeit beweisen:

3.4.5 Satz *In einem Gelfand-Tripel $X \subseteq H \subset X'$ besitzt jeder selbstadjungierte Operator $A : X \to X$ ein vollständiges System verallgemeinerter Eigenvektoren, zu reellen*

Eigenwerten.

Beweis Aus Satz 3.5.3 wissen wir, dass wir H isometrisch in das direkte Integral

$$\mathfrak{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \bigoplus H(\omega) d\mu(\omega)$$

einbetten können und der Operator A dort der Multiplikation mit ω entspricht.

Wegen Satz 3.4.4 wissen wir außerdem, dass es einen nuklearen Operator $T_\omega : X \to H(\omega)$ gibt, der erfüllt:

$$T_\omega(x) = x(\omega).$$

Für festes ω entspricht jedem Element ξ in $H(\omega)$ ein Funktional $\tilde{\xi}$ auf X, das wir wiederum durch ein Skalarprodukt darstellen können

$$\tilde{\xi}(x) = (x(\omega), \xi)_{H(\omega)} = (T_\omega(x), \xi)_{H(\omega)}.$$

Wir können nun zeigen, dass dieses Funktional $\tilde{\xi}$ ein verallgemeinerter Eigenwert des Operators A ist, denn da ω stets reell ist, gilt:

$$\langle A'\tilde{\xi}, x\rangle = \langle \tilde{\xi}, Ax\rangle = \langle \tilde{\xi}, \omega x\rangle = \langle \omega\tilde{\xi}, x\rangle \quad \forall x \in X$$

[2] und insbesondere folgt aus $\tilde{\xi} = 0$ stets $\xi = 0$.

Damit können wir den Raum $H(\omega)$ in den Raum X'_ω (Vgl. Definition 2.5.2) einbetten. Diese Einbettung ist sogar stetig da:

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \tilde{\xi}_n = \tilde{\xi}$$

Sei nun $x \in X$, sodass für seine Spektralzerlegung gilt $\tilde{x}_\omega = 0$, dann gilt auch:

$$0 = \tilde{x}_\omega(\xi) = \tilde{\xi}(x) = (x(\omega), \xi)_{H(\omega)} \quad \forall \omega, \xi \in H(\omega)$$

und es folgt $x(\omega) = 0$. Damit ist aber auch $x = 0$ denn

$$0 = \|x\|^2 = \int \|x(\omega)\|^2_{H(\omega)} d\mu.$$

Also ist das so gewonnene System verallgemeinerter Eigenvektoren vollständig. □

[2] Auf Grundlage der bisherigen Resultate ist die Gleichung $\langle \tilde{\xi}, Ax\rangle = \langle \omega\tilde{\xi}, x\rangle$ nur für alle ω außerhalb einer μ-Nullmenge erfüllt, ein Problem auf das der Übersetzer der englischen Ausgabe von [G] hingewiesen hat. G.G.Gould konnte jedoch 1968 in sehr allgemeiner Weise zeigen, dass die Gleichheit tatsächlich gilt. Der recht umfangreiche Beweis kann in [GG] nachgelesen werden.

3.5 Unitäre Operatoren

Die Resultate des letzten Abschnitts wurden stets für selbstadjungierte Operatoren bewiesen. Tatsächlich können wir aber ganz ähnliche Aussagen auch für unitäre Operatoren treffen, da zwischen diesen beiden Operatortypen ein enger Zusammenhang besteht:

3.5.1 Definition Sei T ein selbstadjungierter Operator und i wie üblich die imaginäre Einheit, dann heißt die Abbildung $U := (T+i)(T-i)^{-1}$ die *Cayley-Transformierte* von T.

Da T selbstadjungiert ist, ist $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ und insbesondere kann i kein Eigenwert von T sein. Also ist der Operator $(T-i)$ invertierbar und U ist wohldefiniert.

3.5.2 Lemma *Sei wieder T ein selbstadjungierter Operator und $U := (T+i)(T-i)^{-1}$. Dann gilt $\|U\| = 1$ und U ist unitär.*

Beweis Siehe [M] Satz 20.6. $\square$

Mit diesen Überlegungen können wir die Sätze aus dem vorherigen Abschnitt auch für unitäre Operatoren aufstellen. Die Beweise verlaufen identisch.

3.5.3 Satz *Sei H ein Hilbertraum und $U : H \to H$ ein unitärer Operator. Dann gibt es eine isometrische Einbettung von H in das direkte Integral $\mathfrak{H} = \int_{|\lambda|=1} \oplus H(\lambda) d\mu(\lambda)$. Dabei ist μ ein Maß auf dem Einheitskreis $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.*
Der Operator U wird dabei zum Operator der Multiplikation mit λ d.h. $h \mapsto \mathfrak{h}(\lambda)$ und $Uh \mapsto \lambda\mathfrak{h}(\lambda)$.

3.5.4 Satz *In einem Gelfand-Tripel $X \subseteq H \subset X'$ besitzt jeder unitäre Operator $U : X \to X$ ein vollständiges System verallgemeinerter Eigenvektoren, die zu Eigenwerten $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gehören.*

Kapitel 4

Ausblick

Wie schon in der Einleitung angedeutet, findet das Konzept der Gelfand-Tripel seine wichtigste Anwendung in der theoretischen Physik, wo es uns ermöglicht die in der Quantenmechanik gebräuchliche Bra-Ket-Notation auf ein solides mathematisches Fundament zu stellen. Im folgenden wollen wir diese Anwendung kurz skizzieren. Wir halten uns dabei an die Darstellung in Kapitel 7 von [PIP] und verweisen auf die Arbeiten von de la Madrid, die eine sehr detaillierte Ausarbeitung bereitstellen. Um außerdem den Umfang dieses Ausblicks begrenzt zu halten und uns auf die Rolle der Gelfand-Tripel zu konzentrieren, werden wir die auftretenden physikalischen Begriffe nicht weiter erläutern. Eine gute Einführung findet sich z.B. in den ersten beiden Abschnitten von [B].

Das Prinzip der Superposition und die Born'sche Wahrscheinlichkeitsinterpretation legen nahe, dass die adäquate mathematische Struktur für die Menge der Zustände eines quantenmechanischen Systems ein Vektorraum H mit innerem Produkt $\langle .,. \rangle$ ist. Üblicherweise wird angenommen, dass H sogar ein Hilbertraum ist. Im Dirac'schen Formalismus nennen wir die Elemente von H (d.h. die Zustände eines bestimmten QM-Systems) *Kets* und symbolisieren sie durch eine eckige Klammer $|.\rangle$. Verschiedene Kets unterscheiden wir durch Buchstaben in den Klammen z.B. $|\psi\rangle$. Das Skalarprodukt zweier Kets schreiben wir als $\langle\phi|\,|\psi\rangle = \langle\phi,\psi\rangle$.
Die Kets (und damit auch das *Braket*$\langle\phi,\psi\rangle$) sind zuerst einmal abstrakte Objekte, die wir nur in sehr einfachen Spezialfällen (z.B. *Particle in the Box*) mit konkreten Funktionen identifizieren können.

Größere Schwierigkeiten bringen die nächsten Behauptungen des Dirac'schen Formalismus mit sich.[1] So wird erstens jede physikalisch beobachtbare Größe (*Observable*) mit einem selbstadjungierten Operator $A : H \to H$ identifiziert. Zweitens wird vorausgesetzt, dass jeder solche Operator eine ONB aus Eigenvektoren (*Eigenkets*) besitzt, sodass wir jeden Ket in der Form:

$$|x\rangle = \sum_n |e_n\rangle \langle e_n|\,|x\rangle + \int de\,|e\rangle \langle e|\,|x\rangle \qquad (4.0.1)$$

[1] Die hier dargestellten Grundlagen der Bra-Ket-Notation finden sich in in dieser Form oder leichter Abwandlungen in fast jedem Einführungswerk in die Quantenmechanik. Diracs eigene Formulierung kann in den letzten beiden Abschnitten von Kapitel 1 in [D] nachgelesen werden.

entwickeln können. Anders gesagt, soll die ONB eine *Zerlegung der Eins* erlauben, d.h.

$$\mathbb{1} = \sum_n |e_n\rangle \langle e_n| + \int de\, |e\rangle \langle e| \,. \tag{4.0.2}$$

In dieser Formel stellen die $|e_n\rangle$ Eigenkets zu diskreten Eigenwerten von A dar, die $|e\rangle$ hingegen symbolisieren die Eigenkets des kontinuierlichen Anteils des Spektrums. Der Ausdruck $|e_n\rangle \langle e_n|$ wird üblicherweise (in Analogie zum dyadischen Produkt in $\mathbb{C}^n$) als ein Operator von H in sich selbst gelesen, der einen Ket $|x\rangle$ auf den Zustand $|e_n\rangle$ projiziert. Wir können aber stattdessen auch die Brackets $\langle e_n| \, |x\rangle$ als "Fourierkoeffizienten"der Entwicklung von $|x\rangle$ betrachten.

Diese Annahmen sind aber bereits in einfachen Fällen nicht erfüllt. Betrachten wir zum Beispiel den Hilbertraum $L^2_\lambda(\mathbb{R})$ (wobei λ das übliche Lebesque-Maß bezeichnet). Wie wir gesehen haben ist der Ortsoperator Q (gegeben durch $Qf(x) = xf(x)$) weder auf dem gesamten Hilbertraum definiert, noch besitzt er nichttriviale Eigenfunktionen.

Der zentrale Schritt zur Lösung dieser Probleme besteht nun darin, als Ket-Raum nicht einen Hilbertraum sondern ein Gelfandtripel $D \subset H \subset D'$ zu wählen, wobei D der Definitionsbereich eines gegebenen selbstadjungierten Operators $A : D \to D$ ist. Da $A' : D' \to D'$ und $A' = A$ können wir tatsächlich für alle Elemente $|\psi\rangle$ des Ket-Raums dem Ausdruck $A\,|\psi\rangle$ Sinn geben. Insbesondere garantiert uns der verallgemeinerte Spektralsatz ein vollständiges System verallgemeinerter Eigenvektoren von A in D'. Realisieren wir wieder den Hilbertraum H (und damit auch den nuklearen Raum D) als Funktionenraum, so können wir für $x \in D$ bekannterweise schreiben $x(\omega) = F_\omega(x)$ mit einem verallgemeinertern Eigenvektor F_ω von A. Es gilt:

$$x(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k F_k(x) h_k(\omega)$$

mit Eigenwerten λ_k von A und Elementen $h_k(\omega)$ aus $H(\omega)$. "Übersetzen"wir obige Gleichung in Bra-Ket Notation, so erhalten wir:

$$|x(\omega)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle F_k| \, |x\rangle \, |h_k(\omega)\rangle \,.$$

Die Summanden $\lambda_k \langle F_k| \, |x\rangle \, h_k(\omega)$ können wir nun tatsächlich als Projektion von $|x\rangle$ auf die k-te Komponente der Spektralentwicklung verstehen. Wichtig ist hier zu bemerken, das wir die Spektralzerlegung nur für Elemente aus D durchführen können und nur diese betrachten wir als physikalisch sinnvoll. Die Elemente von D' bezeichnen wir als *verallgemeinerte* Zustände. Sie haben keine physikalische Interpretation.

Kapitel 5

Literatur

[A] M. Kaltenbäck: *Analysis 3 für technische Mathematik.* Skriptum, WS 2012/13.

[B] L.E. Ballentine: *Quantum Mechanics. A modern Development.* Singapore, World Scientific Publishing, 2000.

[D] P. Dirac: *The Principles of Quantum Mechanics.* London, Oxford University Press, ^{4}1958.

[DS]N. Dunford und J.T.Schwartz: *Linear Operators. Part II: Spectral Theory: Self Adjoint Operators in Hilbert Space.* New York, London, Interscience Publishers, 1963.

[dlM1]R. de la Madrid: *Quantummechanics in Rigged Hilbert Space Language.* Dissertation an der Universität Valladolid, 2001.

[dlM2] R. de la Madrid: *The role of the rigged Hilbert space in Quantum Mechanics.* European journal of physics 26.2 : 287. (2005)

[dlM3]R. de la Madrid: *The rigged Hilbert space of the algebra of the one-dimensional rectangular barrier potential.* J. Phys. A: Math. Gen. 37 8129, 2004.

[F] H. Woracek, M. Kaltenbäk und M.Blümlinger: *Funktionalanalysis I.* Skriptum, 2014.

[G] I. M. Gelfand und N.J. Wilenkin: *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)IV. Einige Anwendungen der harmonischen Analyse Gelfandsche Raumtripel.* Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1964.

[GG] G.G. Gould: *The Spectral Representation of Normal Operators on a Rigged Hilbert Space* in: London Math. Soc., 43 (1968), 745-754

[K] N. Kusolitsch: *Maß-und Wahrscheinlichkeitstheorie. Eine Einführung.* Wien, New York, Springer, 2011.

[Ka] W. Kaballo: *Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie. Distributionen – lokalkonvexe Methoden – Spektraltheorie.* Berlin, Heidelberg, Springer Spektrum, 2014.

[M] R. MEISE und D. VOGT: *Einführung in die Funktionalanalysis.*Wiesbaden, Vieweg+Teubner, ^{2}2011.

[Ma] K. MAURIN: *Methods of HIlbert Spaces.* Warschau, Polish Scientific Publishers, ^{2}1972.

[P] A. JÜNGEL:*Partielle Differentialgleichungen.* Skriptum, 2013.

[PIP] J.P. ANTOINE und C. TRAPANI: *Partial Inner Product Spaces. Theory and Applications.*.Berlin, Heidelberg, Springer, 2009.

[W] D. WERNER: *Funktionalanalysis.* Berlin u.a., Springer, ^{3}2000.