Insitut für Analysis und Scientific Computing

Gradientenflüsse

Bachelorarbeit

Mathematik in Technik und Naturwissenschaften

Autor: Bernhard Erwin Stiftner
Matrikelnummer.: 0727954
Studienkennzahl.: 033 202

Betreuer: Univ. Prof. Dr. Anton Arnold

Wien, am 30. Oktober 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es gewisse Differentialgleichungen für Funktionen auf einem Banachraum auf eine ganz bestimmte Art darzustellen, nämlich als Gradientenflüsse. Eine Differentialgleichung wird Gradientenfluss genannt, wenn sie die Form $u_t = -\text{grad } E(u)$ hat. Dabei ist die Lösung u eine Kurve auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, E ein Funktional auf dieser Mannigfaltigkeit und die Gleichheit wird durch den metrischen Tensor g_u der Mannigfaltigkeit geeignet erklärt. Im zweiten Kapitel werden einige grundlegenden Definitionen für die weitere Arbeit zusammengestellt. Im dritten Kapitel wird zuerst die Poröse-Medium-Gleichung als Gradientenfluss dargestellt. Anschließend werden zwei stark vereinfachte Gleichungen aus der Quantenmechanik auf jeweils zwei verschiedene Arten in die Form eines Gradientenflusses gebracht. Dem zweiten und dem dritten Kapitel sind gemein, dass sie reellwertige Differentialgleichungen behandeln. Dazu im Gegensatz steht das vierte Kapitel, das das Hilbertraum-wertige Analogon einer der beiden quantenmechanischen Differentialgleichungen aus dem dritten Kapitel behandelt. Speziell wird der Hilbertraum J_2 gewählt. Dabei handelt es sich um jene Operatoren von L^2 in den L^2, die eine ganz bestimmte Integraldarstellung haben. In einem funktionalanalytischen Teil werden diese Operatoren näher behandelt und speziell diese Darstellung entwickelt. Schließlich werden die Ergebnisse zusammengetragen, um die behandelte Gleichung als Gradientenfluss darzustellen.

1.1 Notation

Viele der Rechnungen in der Arbeit werden nur formal durchgeführt. Bei einigen behandelten Differentialgleichungen wird nicht näher spezifiziert, auf welcher Menge sie gelten und wie eine etwaige Randbedingung aussieht. Bei Rechnungen, wie der partiellen Integration, die mit dieser Gleichung zusammenhängen, werden dann die Randtherme weggelassen bzw. angenommen das diese immer verschwinden und Funktionen als beliebig glatt angenommen. Diese Rechenschritte rigoros zu rechtfertigen wäre nur mit einem technischen Aufwand möglich, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Zu guter Letzt werde einige Schreibweisen und Abkürzungen zusammengefasst, die, wenn nicht anders gesagt, in der ganzen Arbeit gelten:

- $\mathcal{F}(u)$ bzw. $\widehat{u}$ ... Fouriertransformierte von u.
- $B(X)$ ... Menge aller beschränkten, linearen Abbildungen auf einem Banachraum X
- f.ü. ... fast überall
- $C^\infty(\Omega)$ ... Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf der Menge Ω
- $C_0^\infty(\Omega)$ ... Raum der Funktionen $f \in C^\infty(\Omega)$ mit Nullrandbedingung oder auch Raum der Testfunktionen
- ONS ... Orthonormalsystem in einem Hilbertraum
- ONB ... Orthonormalbasis in einem Hilbertraum
- $\mathbb{R}^+$ ... Menge aller positiven reellen Zahlen

2 Grundlegende Definitionen

Zunächst fassen wir einige grundlegende Definitionen zusammen.

Definition 1 (Erste Variation)**.** Sei X ein Banachraum, $\mathcal{M} \subset X$ und $E : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Für $u \in \mathcal{M}$, $v \in X$ und $\epsilon_0 > 0$ derart, dass $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$ mit $|\epsilon| < \epsilon_0$ auch $u + \epsilon v \in \mathcal{M}$ gilt. Setze $\phi(\epsilon) := E(u + \epsilon v)$. Nenne dann dort, wo dieser Ausdruck sinnvoll ist,

$$\delta E(u, v) := \phi'(0) \tag{2.1}$$

die erste Variation von E an u in Richtung v. (für Details siehe auch [ARN2])

Definition 2 (Erste einseitige Variation)**.** Wie schon in (1) sei X ein Banachraum, $\mathcal{M} \subset X$ und $E : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Für $u \in \mathcal{M}$, $v \in X$ und $\epsilon_0 > 0$ derart, dass entweder $u + \epsilon v \in \mathcal{M}$ oder $u - \epsilon v \in \mathcal{M}$ für $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$, setze $\phi(\epsilon) := E(u + \epsilon v)$. Nenne dann die einseitige Ableitung, dort wo dieser Ausdruck sinnvoll ist,

$$\delta E(u, v) := \phi'(0) \tag{2.2}$$

die erste einseitige Variation von E an u in Richtung v.

Bemerkung 3. Existiert die erste Variation eines Funktionals E an u in Richtung v, so existiert klarerweise auch die erste einseitige Variation von E an u in Richtung v und die beiden stimmen überein. Für sämtliche Aussagen in dieser Arbeit ist, auch wenn sogar die erste Variation, existiert lediglich die Existenz der ersten einseitigen Variation entscheidend, deshalb wird hier in der Notation zwischen der ersten und der ersten einseitigen Variation nicht weiter unterschieden.

Definition 4 (Tangentialbündel)**.** Sei $\mathcal{M}$ eine Mannigfaltigkeit und bezeichne mit $\mathcal{T}_u\mathcal{M}$ den Tangentialraum von $\mathcal{M}$ an $u \in \mathcal{M}$. Definiere durch

$$\mathcal{TM} := \bigcup_{u \in \mathcal{M}} \{(u, v) : v \in \mathcal{T}_u\mathcal{M}\} \tag{2.3}$$

das Tangentialbündel von $\mathcal{M}$. (für Details siehe [SCHU] Kapitel 3)

Definition 5 (Vektorfeld)**.** Sei $\mathcal{M}$ eine Mannigfaltigkeit mit dem Tangentialraum $\mathcal{T}_u\mathcal{M}$ für $u \in \mathcal{M}$. Unter einem Vektorfeld v versteht man eine Abbildung

$$v : \mathcal{M} \to \mathcal{TM} : u \mapsto v(u) \in \mathcal{T}_u\mathcal{M} \tag{2.4}$$

Definition 6 (Gradientenfeld)**.** Seien X, $\mathcal{M}$ und E wie in (1) und sei zusätzlich $\mathcal{M}$ eine Mannigfaltigkeit und g_u ein metrischer Tensor auf $\mathcal{M}$. Definiere nun grad E, das Gradientenvektorfeld von E an $u \in \mathcal{M}$, als Abbildung

$$\text{grad } E : \mathcal{M} \to \mathcal{TM} : u \mapsto \text{grad } E(u) \in \mathcal{T}_u\mathcal{M} \tag{2.5}$$

wobei grad $E(u)$ durch die Beziehung

$$g_u(\text{grad } E(u), v) \overset{!}{=} \delta E(u, v) \quad \forall \text{ Vektorfelder } v \tag{2.6}$$

definiert ist.

Bemerkung 7. • Für $u \in \mathcal{M}$, $\tilde{v_1}, \tilde{v_2} \in T_u\mathcal{M}$ mit $\tilde{v_1} := (u, v_1)$ und $\tilde{v_2} := (u, v_2) \in \mathcal{T}_u\mathcal{M}$ schreiben wir etwas unscharf $g_u(v_1, v_2)$ und meinen $g_u(\tilde{v_1}, \tilde{v_2})$. In diesem Sinne ist auch $g_u(\text{grad } E(u), v)$ zu verstehen.

- Seien v_1, v_2 Vektorfelder auf $\mathcal{M}$. Oft schreiben wir nur $f = g_u(v_1, v_2)$ mit $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ oder auch $f : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ und meinen eigentlich $f(u) = g_u(v_1(u), v_2(u))$.

Bemerkung 8. Es ist nicht klar ob die Definition 6 speziell der Teil in (2.6) überhaupt sinnvoll ist, einerseits da hier $\delta E(u, v)$ überhaupt nicht für jedes $v \in \mathcal{T}_u\mathcal{M}$ für $u \in \mathcal{M}$ existieren muss und andererseits wird nicht näher behandelt ob man durch diese Gleichheit überhaupt eine wohldefinierte Abbildung grad $E(u)$ erhält.

Definition 9 (Gradientenfluss)**.** Sei X ein Banachraum, F ein formaler Differentialoperator für Funktionen als Elemente von X und existiert für die Differentialgleichung $u_t = F(u)$ nun

- eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$
- ein metrischer Tensor $g_u(v_1, v_2)$ für $u \in \mathcal{M}$ und $v_1, v_2 \in \mathcal{T}_u\mathcal{M}$ dem Tangentialraum von $\mathcal{M}$ in u, sodass $(\mathcal{M}, g_u)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit wird
- und ein Funktional $E : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$,

derart, dass das Lösen von $u_t = -\text{grad } E(u)$ äquivalent zum Lösen von $u_t = F(u)$ ist, so nennt man das Tripel $(\mathcal{M}, g_u, E)$ die Darstellung der Gleichung $u_t = F(u)$ als Gradientenfluss.

Bemerkung 10. • Ist $\mathcal{M}$ eine Mannigfaltigkeit mit dem Tangentialraum $\mathcal{T}_u\mathcal{M}$ an $u \in \mathcal{M}$. Für ein Funktional $E : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ hängt das Gradientenfeld grad E vom gewählten metrischer Tensor g_u ab. $u_t = \text{grad } E(u)$ bedeutet dann

$$g_u(u_t, v) = -g_u(\text{grad } E(u), v) \quad \forall \text{ Vektorfelder } v \tag{2.7}$$

- Es kann durchaus verschiedene Tripel $(\mathcal{M}, g_u, E)$ geben um eine gegebene Gleichung $u_t = F(u)$ für einen formalen Differentialoperator F als Gradientenfluss darzustellen (vgl. spätere Kapitel)
- Das Funktional $E : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ in der Gleichung $u_t = -\text{grad } E(u)$ beschreibt in der physikalischen Interpretation die "Energie" des Systems und wird deshalb auch Energiefunktional genannt.

Bemerkung 11. Eine gegebene Differentialgleichung in die Gestalt von Definition 9 umzuschreiben ist aus den folgenden Gründen vorteilhaft:

- E beschreibt ja die Energie des Systems. Es gilt nun für eine Lösungskurve $u(t)$ formal:

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = \delta E(u(t), u_t(t)) = g_u(\text{grad } E(u(t)), u_t(t)) = \tag{2.8}$$
$$= -g_u(u_t(t), u_t(t)) \leq 0 \tag{2.9}$$

  In einem als Gradientenfluss darstellbaren System nimmt die Energie also ab.

- Eine Lösungskurve $u(t)$ der Gleichung $u_t = -\text{grad } E(u)$ ist sogar die Kurve entlang derer die Funktion $t \mapsto E(u(t))$ am steilsten abfällt.

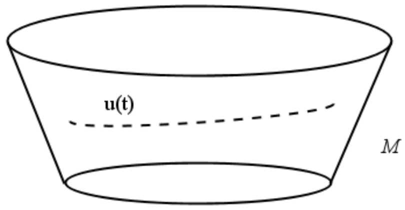

Abbildung 2.1: Eine einfache Skizze von $\mathcal{M}$ mit der Lösungskurve $u(t)$

Bemerkung 12. Betrachten wir die Gleichung $u(t) = F(u)$, wobei F ein formaler Differentialoperator im Ort ist, dann ist das eine Differentialgleichung auf einem Banachraum. Finden wir nun ein Tripel $(\mathcal{M}, g_u, E)$, sodass wir diese Gleichung zu $u_t = -\text{grad}\, E(u)$ umschreiben können, so suchen wir eigentlich eine Lösungskurve $u(t)$ auf der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Betrachte dazu Abbildung 2.1.

3 Reellwertige Differentialgleichungen

In diesem Kapitel soll nun versucht werden ausgewählte reellwertige Differentialgleichungen als Gradientenfluss darzustellen.

3.1 Die Poröse-Medium-Gleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$, mit $n \in \mathbb{N}$. Es soll nun die Poröse-Medium-Gleichung

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m = \operatorname{div}\left(m u^{m-1} \nabla u\right) & \text{, auf } \Omega \times (0, T] \\ u = 0 & \text{, auf } \partial\Omega \times [0, T] \\ u\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right) \in L^1_+\left(\Omega\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

mit $m > 1$ als Gradientenfluss geschrieben werden.

Zuerst einige Sätze und Definitionen:

Satz 13. Setze nun $G\left(v\right) = w$ mit $w \in L^{m+1}\left(\Omega\right)$ für $m > 1$ löst

$$\begin{cases} \Delta w = v & \text{, auf } \Omega \\ w = 0 & \text{, auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

schwach.

$$G : L^{m+1}\left(\Omega\right) \to H_0^2\left(\Omega\right) \tag{3.3}$$

ist eine wohldefinierte, lineare, stetige Abbildung.

Beweis. Weil Ω ein beschränktes Gebiet ist, bettet $L^{m+1}\left(\Omega\right)$ stetig in $L^2\left(\Omega\right)$ ein. Der Rest ist ein Spezialfall von [JUENGEL], Satz 4.20. und Satz 4.27. □

Bemerkung 14. Betrachte die Abbildung

$$H : H_0^2\left(\Omega\right) \to L^2\left(\Omega\right) : v \mapsto \Delta v. \tag{3.4}$$

Für $v \in L^{m+1}\left(\Omega\right)$ gilt $\left(H \circ G\right)\left(v\right) = v$. Dadurch ist G aber auch injektiv.

Definition 15. Wähle dann

$$\mathcal{M} = \left\{ u \in L^{m+1}\left(\Omega\right) : u \geq 0 \text{ f.ü. }, \int\limits_\Omega u\left(x\right) dx = 1 \right\}, \tag{3.5}$$

dann gilt

$$\mathcal{T}_u\mathcal{M} = \left\{ v \in L^{m+1}\left(\Omega\right) : \int\limits_\Omega v\left(x\right) dx = 0 \right\}, \tag{3.6}$$

Zur Motivation zur Wahl von $\mathcal{M}$ zitieren wir zunächst den folgenden Satz aus [ARN1] (Definition 3.7. und Satz 3.12.)

Satz 16. Sei $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $m > 1$, $T > 0$ und $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Betrachte das Anfangsrandwertproblem aus (3.1). Sei $u_0 \geq 0$. Für eine (schwache) Lösung von (3.1) gilt dann $u(x,t) \geq 0$.

Bemerkung 17.

- Der obige Satz ist insofern unpräzise, da wir nichts darüber sagen, was denn eine schwache Lösung von (3.1) erfüllen muss und ob und unter welchen Voraussetzungen diese Lösung dann für alle Zeiten existiert. Für Details sei auf [ARN1] (Seite 60- 65) verwiesen. In jedem Fall gibt er aber der Bedingung $u \geq 0$ in (3.5) einen Sinn.
- Da die Poröse-Medium-Gleichung im Wesentlichen die Ausbreitung von Wasser in einem porösen Medium aus einem Gebiet beschreibt und da die Gesamtmenge an Flüssigkeit sich hier nicht verändert, ist auch $\int u = 1$ in (3.5) sinnvoll.

Satz 18. Sei $u \in \mathcal{M}$.

(i)

$$g_u : \mathcal{T}_u\mathcal{M} \times \mathcal{T}_u\mathcal{M} \to \mathbb{R} : (v_1, v_2) \mapsto \int_\Omega \nabla G(v_1(x)) \cdot \nabla G(v_2(x))\, dx, \tag{3.7}$$

ist ein inneres Produkt auf $\mathcal{T}_u\mathcal{M}$.

(ii) Es gilt

$$g_u(v_1, v_2) = -\int v_1(x)\, G(v_2(x))\, dx \tag{3.8}$$

Beweis. (i) Sei $v_1, v_2 \in \mathcal{T}_u\mathcal{M}$. Da $g_u(v_1, v_2)$ einfach das innere Produkt der H^1-Seminorm von $G(v_1), G(v_2) \in H_0^1(\Omega)$ ist, ist dieser Ausdruck wohldefiniert. $g_u(v_1, v_1) = 0$ genau dann, wenn $G(v_1) = 0$, denn $G(v_1) \in H_0^1(\Omega)$. Lt. Satz 13 und Bemerkung 14 ist G injektiv und linear. Damit muss aber auch schon $v = 0$ gelten und man erhält die Positivität. Die Bilinearität und die Symmetrie folgen sofort aus der Darstellung und der Linearität von G. Insgesamt erhält sicher ein wohldefiniertes inneres Produkt g_u auf $\mathcal{T}_u\mathcal{M}$.

(ii) Für $v_1, v_2 \in \mathcal{T}_u\mathcal{M}$ und $u \in \mathcal{M}$ gilt nach den Rechenregeln für partielle Integration:

$$g_u(v_1, v_2) = \int_\Omega \nabla G(v_1(x)) \cdot \nabla G(v_2(x))\, dx = \tag{3.9}$$

$$= -\int_\Omega \Delta G(v_1(x))\, G(v_2(x))\, dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} G(v_1(x)) \cdot \nabla G(v_2(x))\, dx}_{=0,\ \text{wegen RB}} = \tag{3.10}$$

$$= -\int_\Omega H(G(v_1(x)))\, G(v_2(x))\, dx = -\int_\Omega v_1(x)\, G(v_2(x))\, dx \tag{3.11}$$

□

Bemerkung 19. g_u aus (3.7) ist unabhängig von u.

Satz 20. Betrachte das Funktional

$$E : \mathcal{M} \to \mathbb{R} : u \mapsto \frac{1}{m+1} \int\limits_{\Omega} u(x)^{m+1}\, dx. \tag{3.12}$$

Es gelten die folgenden Aussagen:

(i) E ist wohldefiniert.

(ii) Für $u \in \mathcal{M} \subset L^{m+1}(\Omega)$ ist die erste einseitige Variation $\delta E(u,v)$ von E an u in Richtung von $v \in T_u\mathcal{M}$ wohldefiniert, genau dann wenn

$$\exists \lambda > 0 : v(x) \leq \lambda u(x) \text{ f.ü oder } -v(x) \leq \lambda u(x) \text{ f.ü.} \tag{3.13}$$

(iii) Wenn $\delta E(u,v)$ existiert, dann gilt

$$\delta E(u,v) = \int\limits_{\Omega} v(x)^m\, u(x)\, dx \tag{3.14}$$

Beweis. (i) Weil Ω ein beschränktes Gebiet ist gilt $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ für $1 \leq p \leq q$. Wegen $m > 1$ gilt damit insbesondere auch $\mathcal{M} \subset L^1(\Omega)$, womit E wohldefiniert ist.

(ii) Für $u \in \mathcal{M}$ und für ein $v \in T_u\mathcal{M}$, das den Bedingungen (3.13) genügt, ist zuerst zu zeigen, dass es ein $\epsilon_0 > 0$ gibt, sodass entweder $u + \epsilon v \in \mathcal{M}$ oder $u - \epsilon v \in \mathcal{M}$ für $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Wähle dazu etwa $\epsilon_0 < \frac{1}{\lambda}$ mit dem λ aus Bedingung (3.13). Mit dieser Wahl gilt aber sicher $u(x) + \epsilon v(x) \geq 0$ f.ü. für $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Wegen

$$\int\limits_{\Omega} u(x) + \epsilon v(x)\, dx = 0 \text{ für } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0 \tag{3.15}$$

folgt dann auch $u + \epsilon v \in \mathcal{M}$. Im Fall $-v(x) \leq \lambda u(x)$ f.ü. gilt dann $u(x) - \epsilon v(x) \geq 0$ f.ü. für $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$. Analog zu oben folgt dann auch $u - \epsilon v \in \mathcal{M}$

Es gilt nun weiter

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^m\, |v(x)|\, dx \leq \underbrace{\left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{\frac{m+1}{m}}\, dx \right)^{\frac{m}{m+1}}}_{<\infty} \cdot \underbrace{\left(\int\limits_{\Omega} |v(x)|^{m+1}\, dx \right)^{m+1}}_{<\infty} < \infty \tag{3.16}$$

da ja $u, v \in L^{m+1}$. Damit gilt auch sicher, sogar wenn nur $u, v \in L^{m+1}$ gilt:

$$\int\limits_{\Omega} \tilde{u}^m v dx < C_\delta \text{ für } \tilde{u} \in B_\delta\left(u, L^{m+1}(\Omega)\right) \tag{3.17}$$

Setze nun $\phi(\epsilon) := E(u + \epsilon)$ für den Fall, dass $u + \epsilon v \in \mathcal{M}$ für $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ gilt. Wegen (3.17) und der Beschränktheit von Ω ist ϕ insbesondere an 0 differenzierbar und das Differenzieren kann mit dem Integrieren vertauscht werden. Berechne nun für $\phi(\epsilon) := E(u + \epsilon v)$

$$\phi'(\epsilon) = \frac{1}{m+1}\frac{d}{d\epsilon}\int_\Omega (u(x)+\epsilon v(x))^{m+1}\,dx = \frac{1}{m+1}\int_\Omega \frac{d}{d\epsilon}(u(x)+\epsilon v(x))^{m+1}\,dx = \tag{3.18}$$

$$= \int_\Omega (u(x)+\epsilon v(x))^{m}\, v(x)\,dx \tag{3.19}$$

Damit gilt dann auch

$$\delta E(u,v) = \phi'(0) = \int_\Omega u(x)^m\, v(x)\,dx \tag{3.20}$$

Für $u - \epsilon v \in \mathcal{M}$ für $0 \le \epsilon \le \epsilon_0$ führe die Rechnung genauso durch.

Insgesamt ist (3.13) hinreichend, damit $\delta E(u,v)$ für ein $v \in T_u\mathcal{M}$ mit $u \in \mathcal{M}$ existiert. Diese Bedingungen sind aber auch notwendig. Angenommen es gilt (3.13) für ein $u \in \mathcal{M}$ und $v \in \mathcal{T}_u\mathcal{M}$ nicht. Dann gibt es für jedes $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ eine Menge Ω_{λ_0} mit $\lambda_n(\Omega_{\lambda_0}) > 0$, mit $v(x) > \lambda_0 |u(x)|$ für $x \in \Omega_{\lambda_0}$. Man überzeugt sich leicht, dass dann kein $\epsilon_0 > 0$ geben kann, mit $u + \epsilon v \in \mathcal{M}$ oder $u - \epsilon v \in \mathcal{M}$ für $\epsilon \le \epsilon_0$. Damit ist dann aber die erste einseitige Variation an $u \in \mathcal{M}$ in Richtung $v \in \mathcal{T}_u\mathcal{M}$ nicht wohldefiniert.

(iii) Bereits in (ii) gezeigt.

□

Zusammenfassung 21. In der Poröse-Medium-Gleichung aus (3.1) haben wir in der Situation von Definition 9 damit

- den Banachraum $X = L^{m+1}(\Omega)$,
- den formalen Differentialoperator $F = \Delta(\cdot^m)$,
- die Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{M} = \left\{ u \in L^{m+1}(\Omega) : u \ge 0 \text{ f.ü. }, \int_\Omega u(x)\,dx = 1 \right\}, \tag{3.21}$$

  für $m > 1$ mit dem Tangentialraum in $u \in \mathcal{M}$:

$$\mathcal{T}_u\mathcal{M} = \left\{ v \in L^{m+1}(\Omega) : \int_\Omega v(x)\,dx = 0 \right\}, \tag{3.22}$$

- und den metrischen Tensor

$$g_u : \mathcal{T}_u\mathcal{M} \times \mathcal{T}_u\mathcal{M} \to \mathbb{C} : (v_1, v_2) \mapsto \int_\Omega \nabla G(v_1(x)) \cdot \nabla G(v_2(x))\,dx. \tag{3.23}$$

- Sei

$$E : \mathcal{M} \to \mathbb{R} : u \mapsto \frac{1}{m+1} \int_{\Omega} u(x)^{m+1}\, dx. \tag{3.24}$$

das Funktional aus Satz 20. Für$u \in \mathcal{M}$ und $v \in \mathcal{T}_u\mathcal{M}$ derart, dass der Ausdruck $\delta E(u,v)$ sinnvoll ist, berechne mit partieller Integration und Ausnützen der Randbedingung

$$g_u(\text{grad } E(u), v) = -\delta E(u,v) = -\int u^m v = -\int u^m H(G(v)) = \tag{3.25}$$

$$= -\int u^m \Delta G(v) = -\int \Delta(u^m) G(v) = -\int F(u) G(v) = -g_u(F(u), v). \tag{3.26}$$

Formal gilt damit dann $F(u) = -\text{grad } E(u)$.

- Damit wird die Poröse-Medium-Gleichung zu

$$\begin{cases} u_t = -\text{grad } E(u) & \text{, auf } \Omega \times (0,\infty] \\ u = 0 & \text{, auf } \partial\Omega \times [0,\infty] \\ u(x,0) = u_0(x) \in C(\Omega) & \text{, auf } \Omega \end{cases} \tag{3.27}$$

und mit dem Tripel $(\mathcal{M}, g_u, E)$ wurde die Poröse-Medium-Gleichung aus (3.1) als Gradientenfluss geschrieben.

Es ist gar nicht so leicht grad $E(u)$ rigoros zu bestimmen. Dazu das folgende Lemma:

Lemma 22. Sei $u \in C(\Omega) \subset \mathcal{M}$, $\tilde{u} \in L^m(\Omega)$ und G aus (13). Definiere

$$\Omega_{[u>C]} := \{x \in \Omega : u(x) > C\} \tag{3.28}$$

Es sei weiters

$$\tilde{\mathcal{T}}(u, \mathcal{M}) := \{v \in \mathcal{T}_u\mathcal{M} : \exists \delta E(u,v)\}, \tag{3.29}$$

Gilt

$$\int_{\Omega} \tilde{u}(x) G(v(x))\, dx = 0 \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{T}}(u, \mathcal{M}), \tag{3.30}$$

dann folgt schon $\tilde{u} = 0$ auf $\Omega_{[u>0]}$.

Beweis. Wir versuchen mit $G\left(\tilde{\mathcal{T}}(u,\mathcal{M})\right)$ möglichst viele Testfunktionen zu erhalten. Damit $G(v) = \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ist, muss lt. der Definition von G

$$\begin{cases} \Delta\phi = v & \text{auf } \Omega \\ \phi = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.31}$$

Es gilt dann weiters mit dem Gaußschen Integralsatz und der Nullrandbedingung

$$\int_{\Omega} v(x)\, dx = \int_{\Omega} \Delta\phi(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla\phi(x) \cdot \nu(x)\, dS = 0, \tag{3.32}$$

wobei $\nu(x)$ den äußeren Normalvektor an $x \in \partial\Omega$ bezeichnet. Es gilt sicher $|\Delta\phi(x)| \leq C_0$ für ein $C_0 \in R^+$. Damit folgt $\forall C \in \mathbb{R}^+$ sicher $C_0^\infty\left(\Omega_{[u>C]}\right) \subset G\left(\tilde{\mathcal{T}}(u, \mathcal{M})\right)$ und damit auch $C_0^\infty\left(\Omega_{[u>0]}\right) \subset G\left(\tilde{\mathcal{T}}(u, \mathcal{M})\right)$. Damit muss nun aber auch

$$\int_\Omega \tilde{u}(x)\, G(v)(x)\, dx = \int_{\Omega_{[u>0]}} \tilde{u}(x)\, \phi(x)\, dx = 0 \quad \forall C_0^\infty\left(\Omega_{[u>0]}\right) \tag{3.33}$$

Damit folgt mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung schon $\tilde{u} = 0$ auf $\Omega_{[u<0]}$. □

Bemerkung 23.

- Betrachte nun für eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega \times (0,\infty)) \cap C\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$ von (3.1) die Gleichung:

$$-\delta E(u(t), v) = -g_{u(t)}(F(u(t)), v) = -g_{u(t)}\left(\Delta\left(u(t)^m\right), v\right) \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{T}}(u, \mathcal{M}) \subset \mathcal{T}_{u(t)}\mathcal{M} \tag{3.34}$$

  Gäbe es nun für $t_0 \in [0, \infty)$ verschiedene $u_1, u_2 \in \mathcal{M}$ mit

$$-g_{u(t_0)}(u_1(t), v) = -g_{u(t_0)}(u_2(t), v) = -\delta E(u(t_0), v) \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{T}}(u, \mathcal{M}) \tag{3.35}$$

  dann müsste

$$\int_\Omega (u_1(x) - u_2(x))\, G(v(x))\, dx = 0 \quad \forall v \in \tilde{\mathcal{T}}(u, \mathcal{M}) \tag{3.36}$$

  gelten und mit Lemma 22 folgt schon, dass $u_1 = u_2$ auf $\Omega_{[u<0]}$ bzw. $-\text{grad}\, E(u) = F(u)$ auf $\Omega_{[u<0]}$ ist.

- Für die Eindeutigkeit auf Ω bräuchten wir die Aussage aus Lemma 22 auf ganz Ω. Für $x \in \Omega_{[u=0]} := \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$ müsste dann wie im Beweis von Lemma 22 für eine $\epsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ entweder $u(x) + \epsilon v(x) = \epsilon\Delta\phi(x)$ oder $u(x) + \epsilon v(x) = \epsilon\Delta\phi(x)$ für $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ gelten. Damit erhalten wir aber nur solche Testfunktionen $\phi \in C_0^\infty\left(\Omega_{[u=0]}\right)$ für die $\Delta\phi(x) \geq 0$ oder $\Delta\phi(x) \leq 0$ gilt. Damit können in der Situation von Lemma 22 aber aus

$$\int_\Omega \tilde{u}(x)\, G(v)(x)\, dx = \int_{\Omega_{[u=0]}} \tilde{u}(x)\, \phi(x)\, dx = 0 \quad \forall C_0^\infty\left(\Omega_{[u=0]}\right) \tag{3.37}$$

  nicht mehr mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung $\tilde{u} = 0$ auf $\Omega_{[u=0]}$ schließen.

3.2 $u_t = \left(\partial_{x_1} + \partial_{x_2}\right)^2 u$ als Gradientenfluss

Gegenstand des folgenden Kapitels ist die folgende (sehr vereinfachte) Gleichung aus der Quantenmechanik:

$$u_t = \left(\partial_{x_1} + \partial_{x_2}\right)^2 u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + 2u_{x_1x_2} = \Delta u + 2u_{x_1x_2} \tag{3.38}$$

Wieder soll diese Gleichung als Gradientenfluss geschrieben werden. Das soll auf verschiedene Arten geschehen.

1. $E(u) = \int u^2$ ist vorgegeben und $\mathcal{M}$ und g_u sollen konstruiert werden.
2. $\mathcal{M}$ und $g_u(v_1, v_2)$ sind vorgegeben und E soll geeignet gewählt werden.

3.3 Konstruktion von $\mathcal{M}$ und g_u für vorgegebenes E

zur Konstruktion eines Gradientenfluss beschreite zunächst einen ähnlichen Zugang wie bei der Poröse-Medium-Gleichung und setze

$$\mathcal{M} := \{u \geq 0 : \int u = 1\}, \tag{3.39}$$

$$\mathcal{T}_u\mathcal{M} := \{v : \int v = 0\} \tag{3.40}$$

Wähle weiters:

$$G(v) = w \quad \text{mit} \quad v \text{ löst } w = -\Delta v - 2v_{x_1x_2} \tag{3.41}$$

dann gilt

$$G^{-1}(v) = -\Delta v - 2v_{x_1x_2} \tag{3.42}$$

Es ist nicht klar, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen G und G^{-1} überhaupt wohldefiniert ist. Dazu die folgende Definition.

Definition 24 (Gewichtete L_p-Räume)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine fast überall positive messbare Funktion und $p \in [1, \infty]$. Die Gesamtheit aller messbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die

- $$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n;\omega)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\,\omega(x)|^p \, dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{für } p \in [1, \infty) \tag{3.43}$$

- und

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} (f(x)\,\omega(x)) \quad \text{für } p = \infty \tag{3.44}$$

wird als der gewichtete L^p-Raum $L^p(\mathbb{R};\omega)$ bezeichnet.

Bemerkung 25. $L^p(\mathbb{R};\omega)$ für $p \in [1, \infty]$ ist ein Banachraum. $L^2(\mathbb{R}^2;\omega)$ ist sogar ein Hilbertraum. Für Details verweisen wir auf [FAUST].

Nun soll die $\mathcal{M}$ geeignet eingeschränkt werden, sodass G und G^{-1} wohldefinierte Abbildungen sind.

Lemma 26. Setze

$$\tilde{\mathcal{M}} := \left\{u \in \mathcal{M} : \widehat{u} \in L^2\left(\mathbb{R}^2; (\xi_1 + \xi_2)^{-2}\right)\right\} \tag{3.45}$$

und weiters

$$G : \tilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{F}^{-1}\left(L^2\left(\mathbb{R}^2; (\xi_1 + \xi_2)^{-2}\right)\right) : u \mapsto G(u) \;\text{ mit }\; -\Delta(G(u)) - 2(G(u))_{x_1x_2} = u \tag{3.46}$$

dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) G ist wohldefiniert

(ii) es gilt

$$G(u) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{u}(\xi)}{(\xi_1+\xi_2)^2}\right) \tag{3.47}$$

(iii) G ist linear

(iv) G ist injektiv

(v) G ist sogar bijektiv. Es gilt $G^{-1}(v) = -\Delta v - 2v_{x_1x_2}$.

Beweis. (i) Berechne nach den Rechenregeln für die Fouriertransformation:

$$\widehat{u} = \mathcal{F}\left(-\Delta(G(u)) - 2(G(u))_{x_1x_2}\right) = \left(\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_1\xi_2\right)\widehat{G(u)} \tag{3.48}$$

Umformen liefert dann mit den Voraussetzungen:

$$\frac{\widehat{u}(\xi)}{\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_1\xi_2} = \widehat{G(u)}(\xi) \tag{3.49}$$

Berechne nun

$$\left\|\widehat{G(u)}\right\|^2_{L^2\left(\mathbb{R}^2;(\xi_1+\xi_2)^2\right)} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|\widehat{u}(\xi)|^2}{(\xi_1+\xi_2)^4}(\xi_1+\xi_2)^2\,d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{|\widehat{u}(\xi)|^2}{(\xi_1+\xi_2)^2}d\xi < \infty \tag{3.50}$$

laut Voraussetzung. Damit ist dann nach Anwenden der Inversen Fouriertransformation

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{u}(\xi)}{\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_1\xi_2}\right) = G(u)(x) \tag{3.51}$$

Damit ist G wohldefiniert.

(ii) Bereits in (i) gezeigt.

(iii) Die Linearität von G folgt unmittelbar aus der Darstellung aus (iii) und der Linearität der Fouriertransformation.

(iv) Für die Injektivität seien $u_1, u_2 \in \tilde{\mathcal{M}}$ mit $G(u_1) = G(u_2)$, dann gilt wegen den vorherigen Punkten:

$$0 = G(u_1) - G(u_2) = G(u_1-u_2) = \mathcal{F}\left(\frac{\mathcal{F}(u_1-u_2)(-\xi)}{(\xi_1+\xi_2)^2}\right) \tag{3.52}$$

Dafür muss aber wegen der Injektivität der Fouriertransformation auch

$$\frac{\widehat{u_1-u_2}(-\xi)}{(\xi_1+\xi_2)^2} = 0 \tag{3.53}$$

sein. Das ist aber nur möglich, wenn $\widehat{u_1}(\xi) = \widehat{u_2}(\xi)$ fast überall. Damit folgt aber auch $u_1 = u_2$ fast überall, und G ist injektiv.

(v) Folgt unmittelbar aus der Definition von G, dem vorherigen Punkt und der Tatsache, dass $G\left(\tilde{M}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(L^2\left(\mathbb{R}^2;(\xi_1+\xi_2)^{-2}\right)\right)$

□

Bemerkung 27. Sei $u \in \tilde{\mathcal{M}}$, dann gilt

$$\mathcal{T}_u\tilde{\mathcal{M}} = \left\{ v \in \mathcal{T}_u\mathcal{M} : \widehat{v} \in L^2\left(\mathbb{R}^2; (\xi_1+\xi_2)^{-2}\right)\right\} \tag{3.54}$$

Nun können wir uns daran machen einen metrischen Tensor zu definieren. Dazu zunächst der folgende Satz.

Satz 28 (Plancherel)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)\,\overline{g(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi \tag{3.55}$$

Mit anderen Worten: Die Fouriertransformation ist isometrisch.

Beweis. siehe [KAL1] (Korollar 14.1.19) □

Satz 29. Sei $u \in \tilde{\mathcal{M}}$.

(i) Es gilt

$$\int \nabla G(v_1)\cdot\overline{\nabla G(v_2)} + G(v_1)_{x_1}\overline{G(v_2)_{x_2}} + G(v_1)_{x_2}\overline{G(v_2)_{x_1}} = \int v_1\overline{G(v_2)} \tag{3.56}$$

(ii)

$$g : \begin{cases} \mathcal{T}_u\tilde{\mathcal{M}} \times \mathcal{T}_u\tilde{\mathcal{M}} & \to \mathbb{C} \\ (v_1, v_2) & \mapsto \int \nabla G(v_1)\cdot\overline{\nabla G(v_2)} + G(v_1)_{x_1}\overline{G(v_2)_{x_2}} + G(v_1)_{x_2}\overline{G(v_2)_{x_1}} \end{cases} \tag{3.57}$$

ist wohldefiniert und ein inneres Produkt auf $\mathcal{T}_u\tilde{\mathcal{M}}$.

Beweis. (i) Erhalte mit den Rechenregeln für partielle Integration:

$$\int \nabla G(v_1)\cdot\overline{\nabla G(v_2)} + G(v_1)_{x_1}\overline{G(v_2)_{x_2}} + G(v_1)_{x_2}\overline{G(v_2)_{x_1}} = \tag{3.58}$$

$$= \int -\Delta G(v_1)\,\overline{v_2} - G(v_1)_{x_1x_2}\overline{G(v_2)} - G(v_1)_{x_2x_1}\overline{G(v_2)} = \tag{3.59}$$

$$= \int -\left(\Delta G(v_1) - 2G(v_1)_{x_1x_2}\right)\overline{G(v_2)} = \int G^{-1}(G(v_1))\,\overline{G(v_2)} = \tag{3.60}$$

$$= \int v_1\overline{G(v_2)} \tag{3.61}$$

(ii) • **<u>Wohldefiniertheit:</u>** Seien $v_1, v_2 \in \mathcal{T}_u\tilde{\mathcal{M}}$. Es gilt dann

$$g_u(v_1, v_2) = \int v_1\overline{G(v_2)} = \int \widehat{v_1}\overline{\widehat{G(v_2)}} = \tag{3.62}$$

$$= \int \widehat{v_1}(\xi)\,\overline{\frac{\widehat{v_2}(\xi)}{(\xi_1+\xi_2)^2}}d\xi = \int \underbrace{\frac{\widehat{v_1}(\xi)}{(\xi_1+\xi_2)}}_{\in L^2(\mathbb{R}^2)}\underbrace{\overline{\frac{\widehat{v_2}(\xi)}{(\xi_1+\xi_2)}}}_{\in L^2(\mathbb{R}^2)}d\xi \in \mathbb{C} \tag{3.63}$$

womit $g_u(\cdot,\cdot)$ wohldefiniert ist.

- **Positivität:** Sei $v \in \tilde{\mathcal{M}}$. Sei $G(v) = w$. Mit dem vorherigen Punkt erhält man mit partieller Integration und Einsetzen der Definitionen:

$$g(v,v) = \int v\overline{G(v)} = \int G^{-1}(w)\overline{w}dx_1dx_2 = -\int (\Delta w + 2w_{x_1x_2})\overline{w} = \tag{3.64}$$

$$= -\int \left[(\partial_{x_1} + \partial_{x_2})^2 w\right]\overline{w} = \int |(\partial_{x_1} + \partial_{x_2}) w|^2 \geq 0 \tag{3.65}$$

Es gilt weiter

$$g_u(v,v) = \int v\overline{G(v)} = 0 \Leftrightarrow \int |(\partial_{x_1} + \partial_{x_2}) w|^2 = 0 \Leftrightarrow (\partial_{x_1} + \partial_{x_2}) w = 0 \tag{3.66}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}((\partial_{x_1} + \partial_{x_2}) w) = 0 \Leftrightarrow i(\xi_1 + \xi_2)\widehat{w}(\xi) = 0 \tag{3.67}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{w} = 0 \text{ f.ü. } \Leftrightarrow w = G(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0 \tag{3.68}$$

wobei die letzte Äquivalenz aus der Injektivität und Linearität von G folgt. Insgesamt erhält man die Positivität von $g_u(\cdot,\cdot)$.

- **Symmetrie und Bilinearität:** Folgen unmittelbar aus der Definition des Funktionals und der Linearität des Differenzierens.

□

Zusammenfassung 30. Wir haben nun

- eine Mannigfaltigkeit

$$\tilde{\mathcal{M}} = \left\{u \in \mathcal{M} : \widehat{u} \in L^2\left(\mathbb{R}^2; (\xi_1 + \xi_2)^{-2}\right)\right\} = \tag{3.69}$$

$$= \left\{u \geq 0 : \int u = 0, \widehat{u} \in L^2\left(\mathbb{R}^2; (\xi_1 + \xi_2)^{-2}\right)\right\}, \tag{3.70}$$

- mit dem Tangentialraum

$$\mathcal{T}_u\tilde{\mathcal{M}} = \left\{v \in \mathcal{T}_u\mathcal{M} : \widehat{v} \in L^2\left(\mathbb{R}^2; (\xi_1 + \xi_2)^{-2}\right)\right\} = \tag{3.71}$$

$$= \left\{v : \int v = 0, \widehat{v} \in L^2\left(\mathbb{R}^2; (\xi_1 + \xi_2)^{-2}\right)\right\}, \tag{3.72}$$

- und für $u \in \mathcal{M}$ das innere Produkt:

$$g : \begin{cases} \mathcal{T}_u\tilde{\mathcal{M}} \times \mathcal{T}_u\tilde{\mathcal{M}} & \to \mathbb{C} \\ (v_1, v_2) & \mapsto \int \nabla G(v_1) \cdot \overline{\nabla G(v_2)} + G(v_1)_{x_1}\overline{G(v_2)_{x_2}} + G(v_1)_{x_2}\overline{G(v_2)_{x_1}} \end{cases} \tag{3.73}$$

Bemerkung 31. Wie schon bei der Poröse-Medium-Gleichung ist auch hier g_u nicht von $u \in \tilde{M}$ abhängig.

Sei nun wie verlangt

$$E : \mathcal{M} \to \mathbb{R} : u \mapsto \frac{1}{2}\int u^2, \tag{3.74}$$

dann gilt wieder

$$\delta E(u,v) = \int uv \tag{3.75}$$

Wie schon bei der Poröse-Medium-Gleichung so gelten:

$$g_u\left(u_t,v\right) \stackrel{!}{=} -g_u\left(\text{grad } E\left(u\right),v\right) = -\delta E\left(u,v\right) \quad \forall \text{ Vektorfelder } v \tag{3.76}$$

Einsetzen in die Definitionen liefert dann mit partiellem Integrieren

$$\int u_t\overline{G\left(v\right)} = -\int uv = -\int uG^{-1}\left(G\left(v\right)\right) = -\int u\overline{G^{-1}\left(G\left(v\right)\right)} = \tag{3.77}$$

$$= \int u\overline{\left(\Delta G\left(v\right) + 2G\left(v\right)_{x_1x_2}\right)} = \int \left(\Delta u + 2u_{x_1x_2}\right)\overline{G\left(v\right)} \tag{3.78}$$

Durch Umformen erhält man

$$\int \left(u_t - \Delta u - 2u_{x_1x_2}\right)\overline{G\left(v\right)} = 0 \quad \forall \text{ Vektorfelder } v \tag{3.79}$$

woraus nun wieder

$$u_t = \Delta u + 2u_{x_1x_2} \tag{3.80}$$

rekonstruiert werden kann. $\left(\tilde{\mathcal{M}},g,E\right)$ ist also ein Gradientenfluss für die Gleichung $u_t = \Delta u + 2u_{x_1x_2}$.

3.4 Konstruktion von E für vorgegebenes $\mathcal{M}$ und g_u

Definiere zunächst wie bei der Poröse-Medium-Gleichung

$$\mathcal{M} := \{u \geq 0 : \int u = 1\}, \tag{3.81}$$

$$\mathcal{T}_u\mathcal{M} := \{v : \int v = 0\}, \tag{3.82}$$

$$g_u\left(v_1,v_2\right) := \int uv \tag{3.83}$$

Vor der Definition der Funktionals E zunächst das folgende Lemma:

Lemma 32. Sei $A \in \mathbb{R}^2$ symmetrisch und

$$\tilde{E}\left(u\right) := \frac{1}{2}\int \left(\nabla u\right)^T A\nabla u. \tag{3.84}$$

Für ein Vektorfeld v gilt dann

$$\delta\tilde{E}\left(u,v\right) = -\int \text{div}\left(A\cdot\nabla u\right)v \tag{3.85}$$

Beweis. Für $u \in \mathcal{M}$,$v \in \mathcal{T}_u\mathcal{M}$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\tilde{E}\left(u+\epsilon v\right) = \frac{1}{2}\int \left(\nabla u + \epsilon\nabla v\right)^T A\left(\nabla u + \epsilon\nabla v\right) = \tag{3.86}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\nabla u\right)^T A\nabla u + \epsilon\left(\nabla v\right)^T A\nabla u + \epsilon\left(\nabla u\right)^T A\nabla v + \epsilon^2\left(\nabla u\right)^T A\nabla u \tag{3.87}$$

Es gilt nun

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left| \frac{\tilde{E}(u+\epsilon v) - \tilde{E}(u)}{\epsilon} + \frac{\int \operatorname{div}(A \cdot \nabla u)\, \epsilon v}{\epsilon} \right| = \tag{3.88}$$

$$= \left| \frac{1}{2} \int (\nabla v)^T A \nabla u + (\nabla u)^T A \nabla v + \int \operatorname{div}(A \cdot \nabla u)\, v \right| = \tag{3.89}$$

$$= \left| \int (\nabla u)^T A \nabla v + \int \operatorname{div}(A \cdot \nabla u)\, v \right| = 0 \tag{3.90}$$

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen wegen der Symmetrie von A folgt, und das letzte Gleichheitszeichen nach partieller Integration gilt. $\square$

Setze nun

$$E_1(u) := \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 \tag{3.91}$$

$$E_2(u) := \int u_{x_1} u_{x_2} \tag{3.92}$$

$$E(u) := E_1(u) + E_2(u) \tag{3.93}$$

Wende nun Lemma 32 auf E_1 mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und auf E_2 mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ an, und erhalte wegen der Linearität des Differenzierens

$$\delta E(u,v) = \delta E_1(u,v) + \delta E_2(u,v) = -\int (\Delta u + 2u_{x_1 x_2})\, v \tag{3.94}$$

Für ein Vektorfeld v soll dann gelten

$$g_u(u_t, v) \stackrel{!}{=} -g_u(\operatorname{grad} E(u), v) = -\delta E(u,v) \tag{3.95}$$

und damit nach Einsetzen und Umformen

$$\int (u_t - \Delta u - 2u_{x_1 x_2})\, v = 0 \quad \forall \text{ Vektorfelder } v \tag{3.96}$$

woraus man nun wieder die Ausgangsgleichung $u_t = \Delta u + 2u_{xy}$ rekonstruiert.

Zusammenfassung 33. Setzt man

$$\mathcal{M} := \{u \geq 0 : \int u = 1\}, \tag{3.97}$$

$$g_u(v_1, v_2) := \int uv \tag{3.98}$$

$$E(u) := \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \int u_{x_1} u_{x_2} \tag{3.99}$$

dann ist das Tripel $(\mathcal{M}, g_u, E)$ ein Gradientenfluss, und durch $u_t = -\operatorname{grad} E(u)$ wird die Gleichung $u_t = \Delta u + 2u_x u_y$ dargestellt.

3.5 Darstellung von $u_t = -\left(x_1 + x_2\right)^2 u$ als Gradientenfluss

In diesem Abschnitt wird die Gleichung

$$u_t = -\left(x_1 + x_2\right)^2 u \tag{3.100}$$

betrachtet.

1. Sei zuerst

$$g_u\left(v_1, v_2\right) := \int v_1 \overline{v_2} \tag{3.101}$$

- Setze nun

$$\mathcal{M} := \left\{u : u \in L^2\left(\mathbb{R}^2; (x+y)^2\right)\right\}. \tag{3.102}$$

Es gilt damit dann $\mathcal{T}_u\mathcal{M} = \mathcal{M}$, denn $\mathcal{M}$ ist ein linearer Raum, und mit g_u auch eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Weiters ist auf diese Weise auch

$$E : \mathcal{M} \to \mathbb{R} : u \mapsto \frac{1}{2}\int \left(x_1 + x_2\right)^2 u^2 \tag{3.103}$$

wohldefiniert.

- Berechne nun weiter $\delta E\left(u, v\right)$ für $u, v \in \mathcal{M}$. Betrachte dazu für $\epsilon \in \mathbb{R}^+$

$$E\left(u + \epsilon v\right) = \frac{1}{2}\int \left(x_1 + x_2\right)^2 \left(u + \epsilon v\right)\left(u + \epsilon v\right) = \tag{3.104}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(x_1 + x_2\right)^2 \left(u^2 + 2\epsilon uv + \epsilon^2 v^2\right) \tag{3.105}$$

und weiter

$$\lim_{\epsilon \to 0}\left|\frac{E\left(u + \epsilon v\right) - E\left(u\right)}{\epsilon} - \int \left(x_1 + x_2\right)^2 uv\right| = 0 \tag{3.106}$$

Damit gilt nun $\delta E\left(u, v\right) = \int \left(x_1 + x_2\right)^2 uv$ für $u, v \in \mathcal{M}$.

- Betrachte nun die Gleichung $u_t = -\text{grad } E\left(u\right)$:

$$\int u_t v = g_u\left(u_t, v\right) \stackrel{!}{=} -g_u\left(\text{grad } E\left(u\right), v\right) = -\delta E\left(u, v\right) = -\int \left(x_1 + x_2\right)^2 uv \tag{3.107}$$

für Vektorfelder v, so kann daraus wieder die Ausgangsgleichung gewonnen werden, d.h $\left(\mathcal{M}, g_u, E\right)$ ist ein Darstellung von $u_t = -\left(x + y\right)^2 u$ als Gradientenfluss.

2. Setze nun

$$E\left(u\right) = \frac{1}{2}\int u^2 \tag{3.108}$$

Es sollen dann $\mathcal{M}$ und g_u geeignet gewählt werden, sodass $\left(\mathcal{M}, g_u, E\right)$ ein Gradientenfluss ist, und durch $u_t = -\text{grad } E\left(u\right)$ die Ausgangsgleichung dargestellt wird.

- Setze dazu

$$\mathcal{M} := \left\{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u \in L^2\left(\mathbb{R}^2; (x_1 + x_2)^2\right)\right\} \tag{3.109}$$

Das ist wieder ein linearer Raum und damit gilt $\mathcal{T}_u\mathcal{M} = \mathcal{M}$ für $u \in \mathcal{M}$

- Weiters ist

$$g_u\left(v_1, v_2\right) := \int \frac{1}{\left(x_1 + x_2\right)^2} v_1 v_2 \tag{3.110}$$

für $u \in \mathcal{M}$ wegen der Definition von $\mathcal{M}$ ein wohldefiniertes inneres Produkt. Damit ist $(\mathcal{M}, g_u, E)$ ein Gradientenfluss.

- Für $u, v \in \mathcal{M}$ gilt dann $\delta E\left(u, v\right) = \int uv$ und aus

$$\int \frac{1}{\left(x_1 + x_2\right)^2} u_t v = g_u\left(u_t, v\right) \overset{!}{=} -g_u\left(\text{grad } E\left(u\right), v\right) = \tag{3.111}$$

$$= -\delta E\left(u, v\right) = -\int uv \quad \forall \text{ Vektorfelder } v \tag{3.112}$$

erhält man nach multiplizieren mit $(x + y)^2$ dann wieder die Ausgangsgleichung.

4 Hilbertraum-Wertige Differentialgleichungen

Sei im folgenden Kapitel H vorerst ein beliebiger Hilbertraum.

4.1 Grundlegendes zum J_2

Zunächst einige Definitionen und Lemmas.

Definition 34. Sei $A \in B(H)$. A heißt positiver Operator oder kurz positiv, wenn $(Ag, g) \geq 0$ für alle $g \in H$.

Lemma 35. Sei $A \in B(H)$ und noch dazu positiv. Seien $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{\phi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beliebige ONBs von H, dann gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (A\phi_n, \phi_n)_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(A\tilde{\phi}_n, \tilde{\phi}_n\right)_H \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \tag{4.1}$$

Beweis. Da sowohl $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(\tilde{\phi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ONBs sind gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (A\phi_n, \phi_n)_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} (A\phi_n, \phi_n)_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(A\tilde{\phi_m}, \phi_n\right)_H \left(\tilde{\phi}_m, \phi_n\right)_H = \tag{4.2}$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\tilde{\phi}_m, \phi_n\right)_H \left(A\tilde{\phi}_m, \phi_n\right)_H = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\left(\tilde{\phi}_m, \phi_n\right)_H} \left(A\tilde{\phi}_m, \phi_n\right)_H = \tag{4.3}$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(A\tilde{\phi}_m, \tilde{\phi}_m\right)_H \tag{4.4}$$

□

Mit diesem Lemma ist nun die folgende Definition sinnvoll:

Definition 36. Sei $A \in B(H)$ und positiv, dann heißt

$$\operatorname{sp}(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} (A\phi_n, \phi_n)_H \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \tag{4.5}$$

wobei $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige ONB von H ist, die Spur von A.

Bemerkung 37.
- Definition 36 kann auch oft gewisse nicht positive Operatoren erweitert werden. Für einen Operator $A \in B(H)$, für den es eine ONB $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} (A\phi_n, \phi_n)_H \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ lässt sich für jede andere ONB $(\tilde{\phi_n})_{n\in\mathbb{N}}$ genau so wie im Beweis von Lemma 35 genauso nachrechnen, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (A\phi_n, \phi_n)_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(A\tilde{\phi}_n, \tilde{\phi}_n\right)_H \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \tag{4.6}$$

gilt. Damit kann man analog zu Definition 36 auch

$$\operatorname{sp}(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} (A\phi_n, \phi_n)_H \in \mathbb{R}\cup\{\infty\} \tag{4.7}$$

definieren.

- $\operatorname{sp}(A^*A) \in \mathbb{R}^+\cup\{\infty\}$ ist wegen

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (A^*A\phi_n, \phi_n)_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} (A\phi_n, A\phi_n)_H \in \mathbb{R}^+\cup\{\infty\} \tag{4.8}$$

  für eine beliebige ONB $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von H damit sinnvoll erklärt.

- Ist $A \in B(H)$ zusätzlich kompakt und selbstadjungiert, so gibt es ONB $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Eigenvektoren zur Folge aus Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. In diesem Fall gilt dann speziell:

$$\|A\|_{HS}^2 := \operatorname{sp}(A^*A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (A^*A\phi_n, \phi_n)_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} (A\phi_n, A\phi_n)_H = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 \in \mathbb{R}^+\cup\{\infty\} \tag{4.9}$$

Satz 38. Sei $A \in B(H)$. Setze $\|A\|_{HS} := \sqrt{\operatorname{sp}(A^*A)}$ und betrachte die Menge

$$J_2(H) := \{A \in B(H) : \|A\|_{HS} < \infty\}. \tag{4.10}$$

Versehen mit $\langle A, B\rangle := \operatorname{sp}(B^*A)$ für $A, B \in J_2(H)$ ist $(J_2(H), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum. Die zugehörige Norm ist dann genau $\|\cdot\|_{HS}$.

Definition 39. Ein Operator $A \in J_2(H)$ wird Hilbert-Schmidt-Operator genannt.

Bemerkung 40. $(J_2(H), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist sogar ein Hilbertraum.

Setze ab jetzt speziell $H = L^2(\mathbb{R})$.

Bemerkung 41. Sei $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB von $L^2(\mathbb{R})$, dann ist $(g_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ definiert durch $g_{n,m}(x,y) := \phi(x)\overline{\phi(y)}$ eine ONB von $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Satz 42. Sei $\rho_0 \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$, dann ist ρ_0 kompakt.

Beweis. Sei $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige ONB von $L^2(\mathbb{R})$. Der Operator definiert durch

$$\rho_{0,N}(f) := \sum_{n\le N} \langle f, \phi_n\rangle \rho_0(\phi_n) = \rho_0\left(\sum_{n\le N} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n\right) \tag{4.11}$$

ist sicher kompakt, da endlichdimensional. Es genügt zu zeigen, dass $\rho_{0,N} \overset{\|\cdot\|}{\to} \rho_0$. Betrachte dazu $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|f\| = 1$, dann gilt sicher

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (f, \phi_n)_{L^2(\mathbb{R})} \phi_n \tag{4.12}$$

und

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|(f, \phi_n)_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2 = \|f\|^2 = 1 \tag{4.13}$$

Insbesondere gilt nun

$$\left\|\rho_0(f)-\rho_{0,N}(f)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}=\left\|\rho_0\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}(f,\phi_n)_{L^2(\mathbb{R})}\phi_n-\sum_{n\leq N}(f,\phi_n)_{L^2(\mathbb{R})}\phi_n\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}= \tag{4.14}$$

$$=\left\|\rho_0\left(\sum_{n>N}(f,\phi_n)_{L^2(\mathbb{R})}\phi_n\right)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}=\left\|\sum_{n>N}(f,\phi_n)_{L^2(\mathbb{R})}\rho_0(\phi_n)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\leq \tag{4.15}$$

$$\leq\underbrace{\sum_{n>N}\left|(f,\phi_n)_{L^2(\mathbb{R})}\right|^2}_{\leq 1}\cdot\sum_{n>N}\left\|\rho_0(\phi_n)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\leq\sum_{n>N}\left\|\rho_0(\phi_n)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \tag{4.16}$$

Aber es gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left\|\rho_0(\phi_n)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\rho_0(\phi_n),\rho_0(\phi_n)\right)_{L^2(\mathbb{R})}=\mathrm{sp}\left(\rho_0^*\rho\right)=\left\|\rho_0\right\|^2_{\mathrm{HS}}<\infty \tag{4.17}$$

Somit gilt

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n>N}\left\|\rho_0(\phi_n)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\to 0 \tag{4.18}$$

und laut obiger Rechnung damit auch $\rho_{0,N}\overset{\|\cdot\|}{\to}\rho_0$. Damit ist aber $\rho_0\in J_2\left(B\left(L^2(\mathbb{R})\right)\right)$ kompakt. $\square$

Definition 43. Sei $\rho_0\in J_2\left(B\left(L^2(\mathbb{R})\right)\right)$ und gibt es eine fast überall eindeutig bestimmte Funktion $u_0\in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ derart, sodass

$$\forall f\in L^2\left(\mathbb{R}^2\right):\rho_0(f)(x)=\int_{\mathbb{R}}u_0(x,y)\,f(y)\,dy\quad\text{f.ü.}\ : \tag{4.19}$$

Dann nennt man u_0 den Kern von ρ_0.

Lemma 44. Sei $u_0\in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ mit $u_0(x,y)=\overline{u_0(y,x)}$ fast überall. Betrachte den Operator

$$\rho_0:\begin{cases}L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})\\ f\mapsto\rho_0(f)\end{cases} \tag{4.20}$$

wobei

$$\rho_0(f)(x):=\int_{\mathbb{R}}u_0(x,y)\,f(y)\,dy\quad\text{f.ü.}, \tag{4.21}$$

dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $\rho_0\in B\left(L^2(\mathbb{R})\right)$. Es gilt sogar $\|\rho_0\|\leq\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.

(ii) $\rho_0^*=\rho_0$, d.h ρ_0 ist selbstadjungiert.

(iii) $\rho_0\in J_2\left(B\left(L^2(\mathbb{R})\right)\right)$.

Beweis. (i) Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\|\rho_0(f)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} u_0(x,y) f(y)\, dy \right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left| (u_0(x,\cdot), f)_{L^2(\mathbb{R})} \right|^2 dx \leq \tag{4.22}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \|u_0(x,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dx = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u_0(x,y)|^2\, dydx = \tag{4.23}$$

$$= \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{4.24}$$

und damit die Aussage.

(ii) Seien $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Es gilt dann:

$$(\rho_0(f), g)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \rho_0(f)(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{u_0(x,y)}_{\in L(\mathbb{R}^2)} \underbrace{f(y)\overline{g(x)}}_{\in L(\mathbb{R}^2)} dxdy = \tag{4.25}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u_0(x,y) f(y) \overline{g(x)} dxdy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{u_0(y,x) g(x)} f(y)\, dxdy = \tag{4.26}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\int_{\mathbb{R}} u_0(y,x) g(x)\, dxdy} = \int_{\mathbb{R}} f(y) \rho_0(g)\, dy = (f, \rho_0(g))_{L^2(\mathbb{R})} \tag{4.27}$$

und damit ist ρ_0 selbstadjungiert.

(iii) Es ist zu zeigen, dass $\|\rho_0\|_{HS} < \infty$. Definiere dazu die Operatoren:

$$\rho_{0,N} : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \rho_{0,N}(f) \end{cases} \tag{4.28}$$

mit

$$\rho_{0,N}(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} u_0(x,y) \sum_{n=1}^{N} (f, \phi_n)_{L^2(\mathbb{R})} \phi_n(y)\, dy = \sum_{i=1}^{N} (f, \phi_n)_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \rho_0(\phi_n)(x) \tag{4.29}$$

für eine beliebige ONB $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dieser Operator ist sicher kompakt, da endlichdimensional. Es folgt dann auch, dass $\rho_{0,N} \overset{\|\cdot\|}{\to} \rho_0$ und damit auch die Kompaktheit von ρ_0. Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|f\| = 1$ gilt nämlich

$$\sum_{n>N} \|\rho_0(\phi_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{n>N} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} u_0(x,y) \phi_n(y)\, dy \right|^2 dx = \sum_{n>N} \int_{\mathbb{R}} \left| (u_0(x,\cdot)\, \phi_n)_{L^2(\mathbb{R})} \right|^2 dx = \tag{4.30}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sum_{n>N} \left| (u_0(x,\cdot)\, \phi_n)_{L^2(\mathbb{R})} \right|^2}_{\to 0 \text{ für } N\to\infty} dx \to 0 \tag{4.31}$$

Den Rest argumentiert man wie in Satz 42. ρ_0 ist laut obiger Aussage auch selbstadjungiert. Für die weiteren Schritte wähle also $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als ONB aus Eigenvektoren zur Folge aus Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Setze nun

$$u_{0,N}(x,y) := \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)} \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right) \tag{4.32}$$

Wir zeigen nun $\|u_{0,N}\|^2_{L^2(x,y)} = \sum\limits_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2$. Aus einer einfachen Rechnung folgt, dass

$$\forall f \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right) : \rho_{0,N}(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} u_{0,N}(x,y) f(y)\, dy \quad \text{f.ü.} \tag{4.33}$$

mit $\rho_{0,N} \in J_2\left(B\left(L^2(\mathbb{R})\right)\right)$ mit der Kernfunktion $u_{0,N} \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Aus dem 1.Punkt folgt dann sicher $\|\rho_{0,N}\| \leq \|u_{0,N}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$. Setze nun $f_N(x) := \frac{1}{N} \cdot \sum\limits_{n=1}^{N} \phi_n(x)$. Es gilt $\|f_N\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{N}$, denn $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ONB. Weiters gilt

$$\|\rho_{0,N}(f_N)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} u_{0,N} f_N(y)\, dy \right|^2 dx = \cdots = \frac{1}{N^2} \cdot \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 = \|f_N\|^2 \cdot \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 \tag{4.34}$$

Es folgt

$$\|\rho_{0,N}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u_{0,N}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \tag{4.35}$$

Insgesamt gilt dann $\|\rho_{0,N}\| = \|u_{0,N}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$. Schließlich folgt

$$0 = \lim_{N\to\infty} \|\rho_0 - \rho_{0,N}\| \geq \lim_{n\to\infty} |\|\rho_0\| - \|\rho_{0,N}\|| = \lim_{n\to\infty} \left| \|\rho_0\| - \left(\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \tag{4.36}$$

und damit

$$\infty > \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \geq \|\rho_0\| = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.37}$$

Andererseits gilt

$$\|\rho_0\|^2_{HS} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\rho_0(\phi_n), \rho_0(\phi_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 \tag{4.38}$$

und damit gilt auch $\|\rho_0\|_{HS} < \infty$ und die Aussage ist gezeigt.

$\square$

Es gilt auch eine Umkehrung dieser Aussage:

Satz 45. Sei $\rho_0 \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$ mit $\rho_0 = \rho_0^*$, dann existiert ein $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, sodass

(i) $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt $\rho_0(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(x,y) f(y)\, dy$ f.ü .

(ii) $u_0(x,y) = \overline{u_0(x,y)}$ und $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ist fast überall eindeutig bestimmt.

Der Operator $\rho_0 \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$ hat dann also eine Kernfunktion.

Beweis. (i) ρ_0 ist lt. Satz 42 kompakt und laut Voraussetzung selbstadjungiert, daher existiert eine ONB aus Eigenvektoren $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zur Folge der Eigenwerte $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Setze nun

$$u_0(x,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)} \tag{4.39}$$

Es folgt sofort $u_0(x,y) = \overline{u_0(y,x)}$. Wie im vorherigen Satz gilt: $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 = \|\rho_0\|_{HS}^2 < \infty$. Zeige nun $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Berechne dazu:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_0(x,y)|^2\, dxdy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \phi(x) \overline{\lambda\phi(y)} \cdot \overline{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \phi(x) \overline{\lambda\phi(y)} dxdy} = \tag{4.40}$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^{n} \lambda_n \overline{\lambda_{n-m}} \phi_n(x) \overline{\phi_{n-m}(y)\phi(y)} \phi_{n-m}(y)\, dxdy = \tag{4.41}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=1}^{n} \lambda_n \lambda_{n-m} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x) \overline{\phi_{n-m}(x)} dx}_{\delta_{n,n-m}} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(y)} \phi_{n-m}(y)\, dy}_{\delta_{n,n-m}} = \tag{4.42}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 < \infty \tag{4.43}$$

Definiere nun

$$\tilde{\rho_0} : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \tilde{\rho_0}(f) \end{cases} \tag{4.44}$$

mit

$$\forall f \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right) : \tilde{\rho_0}(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} u_0(x,y) f(y)\, dy \quad \text{f.ü.} \tag{4.45}$$

Wegen Satz 44 folgt $\tilde{\rho_0} \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$. Es muss nun also nur noch gezeigt werden, dass für $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\tilde{\rho_0}(f)(x) = \rho_0(f)(x) \quad \text{f.ü.} \tag{4.46}$$

gilt. Sei dazu $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $n_0 \in \mathbb{N}$. Berechne dann:

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\rho_0}(\phi_{n_0})(x) \psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \phi(x) \overline{\phi(y)} \cdot \phi_{n_0}(y)\, dy \psi(x)\, dx = \cdots = \tag{4.47}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda_n \phi_{n_0}(y) \psi(x)\, dx \tag{4.48}$$

für $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ beliebig. Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung gilt dann:

$$\rho_0(f)(x) = \lambda_n \phi_{n_0}(x) = \tilde{\rho}_0(\phi_{n_0})(x) \quad \text{f.ü.} \tag{4.49}$$

Wegen der Linearität und der Stetigkeit und weil $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig war gilt aber $\rho_0 = \tilde{\rho}_0$.

(ii) Sei $\tilde{u_0} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\rho_0(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} u_0(x,y) f(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{u_0}(x,y) f(y)\, dy \quad \text{f.ü. } \forall f \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right) \tag{4.50}$$

Insbesondere gilt dann für $f, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{u_0(x,y)}_{\in L^2(\mathbb{R}^2)} \underbrace{f(y)\psi(x)}_{\in L^2(\mathbb{R}^2)} dydx = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\tilde{u_0}(x,y)}_{\in L^2(\mathbb{R}^2)} \underbrace{f(y)\psi(x)}_{\in L^2(\mathbb{R}^2)} dydx \tag{4.51}$$

Ähnlich wie beim Fundamentallemma der Variationsrechnung gilt dann $u_0 = \tilde{u_0}$ fast überall.

□

Bemerkung 46.
- Im Beweis in Satz 45 wird nicht verwendet, dass ρ_0 selbstadjungiert ist. Sollte es also ein $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ geben, mit dem ρ_0 wie in Satz 45 dargestellt wird, so ist dieses u_0 auch schon der Kern von ρ_0.
- Mit Satz 44 und 45 wurde nun im Wesentlichen hergeleitet, dass die selbstadjungierten Hilbert-Schmidt-Operatoren genau den $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ entsprechen, für die $u_0(x,y) = \overline{u_0(y,x)}$ fast überall gilt. Vergleiche den nächsten Satz für ein allgemeineres Ergebnis.

Satz 47. Die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^2) & \to J_2(B(L^2(\mathbb{R}))) \\ u_0 & \mapsto \Psi(u_0) \end{cases} \tag{4.52}$$

mit

$$\Psi(u_0)(f)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}} u_0(x,y) f(y)\, dy \tag{4.53}$$

ist ein *-Algebrenisomorphismus, d.h. mit Konjugieren verträglich, linear und bijektiv.

Beweis. (i) Sei $\rho_0 \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$, dann gilt:

$$\rho_0 = \underbrace{\frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_0^*)}_{:=\rho_a} + i\underbrace{\frac{1}{2i}(\rho_0 - \rho_0^*)}_{:=\rho_b} \tag{4.54}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass $\rho_a, \rho_b \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$ und selbstadjungiert sind. Mit Satz 45 folgt die Existenz von $u_a, u_b \in L^2(\mathbb{R})$, sodass u_a der Kern von ρ_a bzw. u_b der Kern von ρ_b ist. Wegen der Linearität folgt dann auch, dass $u_0 := u_a + iu_b \in L^2(\mathbb{R}^2)$ der Kern von ρ ist.
Gelte umgekehrt $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Zerlege dann u_0 analog zu oben:

$$u_0(x,y)) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(u_0(x,y) + \overline{u_0(x,y)}\right)}_{:=u_a} + i\underbrace{\frac{1}{2i}\left(u_0(x,y) - \overline{u_0(x,y)}\right)}_{:=u_b} \tag{4.55}$$

Es gilt $u_a, u_b \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Weiters gilt $u_a(x,y) = \overline{u_a(y,x)}$ und $u_b(x,y) = \overline{u_b(y,x)}$ Laut Satz 44 existieren zwei eindeutig bestimmte selbstadjungierte Operatoren $\rho_a, \rho_b \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$ mit Kernen u_a bzw. u_b. Es folgt nun, dass $\rho = \rho_a + i\rho_b$ und wegen der Linearität auch, dass u_0 der Kern von ρ_0 ist.
Ψ ist, wie man durch die obige Zerlegung leicht nachrechnet, mit * verträglich. Insgesamt ist Ψ ein *-Algebrenisomorphismus.

□

Satz 48. Seien $\rho_0, \rho_1 \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$ und $u_0, u_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ die zugehörigen Kerne. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\rho := \rho_1\rho_0 \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$

(ii) $F(x,v) := \int\limits_{\mathbb{R}} u_1(x,y)\, u_0(y,v)\, dy$ ist der Kern von ρ_0.

(iii) Sind ρ_0 und ρ_1 selbstadjungiert, so folgt

$$sp(\rho) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} u_1(x,y)\, u_0(y,x)\, dydx = sp(\rho_1\rho_0) = sp(\rho_0\rho_1) \tag{4.56}$$

Beweis. (i) Es gilt

$$\|\rho\|_{HS} = \|\rho_1\rho_0\|_{HS} = \langle \rho_1, \rho_0^* \rangle \leq \|\rho_1\|_{HS} \cdot \|\rho_0^*\|_{HS} = \|\rho_1\|_{HS} \cdot \|\rho_0\|_{HS} < \infty \tag{4.57}$$

und deswegen gilt $\rho \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$.

(ii) Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Einsetzen in die Definitionen führt dann auf

$$\rho(f)(x) = \rho_1\rho_0(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} u_1(x,y)\, u_0(y,v)\, f(v)\, dvdy = \tag{4.58}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} u_1(x,y)\, u_0(y,v)\, dyf(v)\, dv \quad \text{f.ü.} \tag{4.59}$$

Man rechnet nach:

$$F(x,v) = \int\limits_{\mathbb{R}} u_1(x,y)\, u_0(y,v)\, dy \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right) \tag{4.60}$$

Kerne von Hilbert-Schmidt-Operatoren sind fast überall eindeutig sind, daher ist $F \in L^2(\mathbb{R}^2)$ der Kern von $\rho \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$.

(iii) Betrachte die Funktion h_u definiert durch

$$h_u : x \mapsto u(x,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} u_1(x,y)\, u_0(y,x)\, dy \tag{4.61}$$

Analog zu F folgt dann auch, dass $h_u \in L^2(\mathbb{R})$. h_u hängt nicht davon ab, ob die Kernfunktionen $u_0, u_1 \in L^2(R^2)$ auf einer Nullmenge geändert werden, denn für $\tilde{u_0}, \tilde{u_1} \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\tilde{u_0} = u_0$ und $\tilde{u_1} = u_1$ fast überall und $\tilde{h_u}$ definiert durch

$$\tilde{h_u} : x \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{u_1}(x,y)\, \tilde{u_0}(y,x)\, dy \tag{4.62}$$

folgt wieder $h_u \in L^2(\mathbb{R})$. Sei $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, dann gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{h_u}(x)\,\psi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{u_1}(x,y)\,\tilde{u_0}(y,x)\,dy\psi(x)\,dx = \tag{4.63}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} u_1(x,y)\,u_0(y,x)\,dy\psi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} h_u(x)\,\psi(x)\,dx \tag{4.64}$$

Da ψ beliebig war muss wegen dem Fundamentallemma der Variationsrechnung bereits $h_u = \tilde{h_u}$ fast überall gelten. Weil die Kernfunktionen von $\rho_0, \rho_1 \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$ aber fast überall eindeutig sind, hängt h_u nur von ρ_0 und ρ_1 ab.

(iv) Sind ρ_0 und ρ_1 selbstadjungiert, so gilt für die zugehörigen Kernfunktionen $u_0, u_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ laut Bemerkung 46 $u_0(x,y) = \overline{u_0(y,x)}$ und $u_1(x,y) = \overline{u_1(y,x)}$. $\rho \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$ ist dann klarerweise auch selbstadjungiert und kompakt, und es folgt wie in Satz 45, dass es eine ONB aus Eigenvektoren $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von ρ zu den Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit

$$u(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \phi_n(x)\,\overline{\phi_n(y)} \tag{4.65}$$

Es gilt dann weiter:

$$\operatorname{sp}(\rho_1\rho_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\rho_1\rho_0(\phi_n), \phi_n)_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (\phi_n, \phi_n)_{L^2(\mathbb{R})} = \tag{4.66}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\,\overline{\phi_n(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n\phi_n(x)\,\overline{\phi_n(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} h_u(x)\,dx = \tag{4.67}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} u_1(x,y)\,u_0(y,x)\,dydx \tag{4.68}$$

Das zweite Gleichheitszeichen folgt dann durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge.

□

Definition 49. 1. Setze

$$\mathcal{M} := \Big\{\rho_0 \in J_2\left(B\left(L^2(\mathbb{R})\right)\right) : \rho_0(f)(x) = \int u_0(x,y)\,f(y)\,dy \text{ mit } (x+y)^2 u_0(x,y) \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right), u_0(x,y) = \overline{u_0(y,x)} \text{ f.ü.}\Big\} \tag{4.69}$$

2. und bezeichne mit

$$P := \Big\{\rho \in J_2\left(B\left(L^2(\mathbb{R})\right)\right) : \langle f, \rho(f)\rangle_{J_2(B(L^2(\mathbb{R})))} \geq 0, \forall f \in L^2(\mathbb{R})\Big\} \tag{4.70}$$

den Positivitätsbereich von $J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$.

3. Definiere die Abbildung

$$X : \operatorname{dom} X \subset \mathcal{M} \to \mathcal{M} : \rho \mapsto X(\rho) \tag{4.71}$$

mit

$$X(\rho)(f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x \cdot u_0(x,y)\,f(y)\,dy \tag{4.72}$$

4. und weiters die Abbildung

$$Y : \operatorname{dom} Y \subset \mathcal{M} \to \mathcal{M} : \rho \mapsto Y(\rho) \tag{4.73}$$

mit

$$Y(\rho)(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} y \cdot u_0(x,y) f(y)\, dy \tag{4.74}$$

Lemma 50. Seien $\mathcal{M}, X, Y$ wie in Definition 49, dann gilt

(i) $(X+Y)^2 : \mathcal{M} \to J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$ ist wohldefiniert. Für $\rho_0 \in \mathcal{M}$ mit der Kernfunktion $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ gilt $\left[(X+Y)^2(\rho)\right]^* = (X+Y)^2(\rho)$ für $f \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$(X+Y)^2(\rho)(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} (x+y)^2 u_0(x,y) f(y)\, dy \quad \text{f.ü} \tag{4.75}$$

(ii) $(X+Y)^2$ ist injektiv.

Beweis. (i) Die Darstellung für $\rho \in \operatorname{dom}(X+Y)^2$ ist klar. Sei nun $\rho \in \mathcal{M}$, dann gilt laut Satz 47 für den Kern $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ auch $\tilde{u_0}(x,y) := (x+y)^2 u_0(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Es gilt auch $\tilde{u_0}(x,y) = \overline{\tilde{u_0}(x,y)}$. Wieder wegen Satz 47 gilt dann auch $(X+Y)^2(\rho) \in J_2(B(L^2(\mathbb{R})))$ und $(X+Y)^2(\rho) = (X+Y)^2(\rho)^*$.

(ii) Für die Injektivität seien $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{M}$ mit den Kernen $u_0, u_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und gelte $(X+Y)^2(\rho_0) = (X+Y)^2(\rho_1)$. Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ beliebig. Laut dem ersten Teil gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}} (x+y)^2 u_0(x,y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} (x+y)^2 u_1(x,y) f(y)\, dy \tag{4.76}$$

fast überall in $\mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$. Da f beliebig war, folgt

$$(x+y)^2 u_0(x,y) = (x+y)^2 u_1(x,y) \tag{4.77}$$

fast überall in $\mathbb{R}^2$, denn das Produkt zweier Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.
Da $\lambda_2\left(\left\{(x,y) : (x+y)^2\right\}\right) = 0$ gilt auch

$$u_0(x,y) = u_1(x,y) \tag{4.78}$$

fast überall in $\mathbb{R}^2$. Der Rest folgt aus der Eindeutigkeit von Kernfunktionen fast überall.

□

Lemma 51. Sei $\mathcal{M}_1 := (X+Y)^2(\mathcal{M})$ und

$$G : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M} : \rho \mapsto G(\rho) \tag{4.79}$$

definiert durch

$$G(\rho)(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{u_0(x,y)}{(x+y)^2} f(y)\, dy \tag{4.80}$$

mit der Kernfunktion $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ von ρ. Es gelten die folgenden Aussagen:

(i) $(X+Y)^2 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_1$ ist wohldefiniert und bijektiv.

(ii) G ist wohldefiniert und linear.

(iii) Es gilt $G = \left[(X+Y)^2\right]^{-1}$.

Beweis. (i) Folgt sofort aus dem vorherigen Lemma und der Definition von $\mathcal{M}_1$.

(ii) Für $\rho \in \mathcal{M}_1$ mit dem Kern $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ folgt wegen der Definition von $\mathcal{M}_1$ und dem vorherigen Lemma die Existenz eines $\tilde{\rho} \in \mathcal{M}$ mit dem Kern $\tilde{u_0} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und $u_0(x,y) = (x+y)^2 \tilde{u_0}(x,y)$ fast überall. Es gilt nun

$$G(\rho(f))(x) = \int_{\mathbb{R}} (x+y)^2 \tilde{u_0}(x,y) \frac{1}{(x+y)^2} f(y)\, dy = \tilde{\rho}(f)(x) \quad \text{f.ü} \tag{4.81}$$

Damit ist G wohldefiniert. Die Linearität folgt unmittelbar aus obiger Darstellung.

(iii) Sei wieder $\rho \in \mathcal{M}_1$ und $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ der zugehörige Kern. Für $f \in L^2(\mathbb{R})$ folgt dann ähnlich zum letzten Punkt

$$\left[(X+Y)^2 \circ G\right](\rho)(f) = (X+Y)^2 \left[f \mapsto \left[x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{u_0(x,y)}{(x+y)^2} f(y)\, dy\right]\right] = \tag{4.82}$$

$$= \left[f \mapsto \left[x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{u_0(x,y)}{(x+y)^2} (x+y)^2 f(y)\, dy\right]\right] = \rho(f) \tag{4.83}$$

Da $f \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig war, gilt $\left[(X+Y)^2 \circ G\right](\rho) = \rho$. $G \circ (X+Y)^2(\rho) = \rho$ zeigt man analog. □

4.2 Darstellung von $\rho_t = -\left(x^2 \circ \rho + 2x \circ \rho \circ x + \rho \circ x^2\right)$ als Gradientenfluss

Gegenstand dieses Unterkapitels sei nun die Differentialgleichung

$$\rho_t = -\left(x^2 \circ \rho + 2x \circ \rho \circ x + \rho x^2\right) \tag{4.84}$$

wobei

$$x : \operatorname{dom} x \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) : f \mapsto [x \mapsto x f(x)] \tag{4.85}$$

meint. Das ist äquivalent zu

$$\rho_t = -(X+Y)^2 \rho \tag{4.86}$$

Wähle als Mannigfaltigkeit etwa $\mathcal{M}_1$ wie in Lemma 50.

Bemerkung 52. $\mathcal{M}_1$ ist ein linearer Raum, da $\mathcal{M}_1 = (X+Y)^2(\mathcal{M})$ war, mit $\mathcal{M}$ wie in Definition 49. Für $\rho \in \mathcal{M}_1$ gilt damit aber auch $T_\rho \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1$.

Lemma 53. Betrachte das Funktional

$$E : \mathcal{M}_1 \to \mathbb{R} : \rho \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{sp}\left(\rho^2\right). \tag{4.87}$$

Sei nun $v \in \mathcal{M}_1$. Dann gilt $\delta E(\rho, v)$.

Beweis. Für $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ berechnen wir

$$E(\rho + \epsilon v) = \frac{1}{2} \operatorname{sp}((\rho + \epsilon v)(\rho + \epsilon v)) = \tag{4.88}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sp}\left(\rho^2\right) + \epsilon \operatorname{sp}(\rho v) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \operatorname{sp}\left(v^2\right) \tag{4.89}$$

Damit gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left| \frac{E(\rho + \epsilon v) - E(\rho)}{\epsilon} - \operatorname{sp}(\rho v) \right| = \lim_{\epsilon \to 0} \left| \epsilon \operatorname{sp}\left(v^2\right) \right| = 0, \tag{4.90}$$

womit die Aussage unmittelbar folgt. □

Für einen Gradientenfluss fehlt nun noch ein metrischer Tensor.

Satz 54. Sei $\rho \in \mathcal{M}_1$ fest, dann ist

$$g_\rho : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \to \mathbb{C} : (v_1, v_2) \mapsto \operatorname{sp}(G(v_1) v_2) \tag{4.91}$$

ein Skalarprodukt.

Beweis.

- **Positivität:** Für $v \in \mathcal{M}$ existiert ein eindeutig bestimmter Kern $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und laut dem vorherigen Sätzen und da Kerne eindeutig sind gilt für

$$\tilde{u_1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \frac{u_1(x, y)}{(x + y)^2} \tag{4.92}$$

sicher, dass $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und u_1 ist Kern von $G(v)$. Laut Satz 48 und da v selbstadjungiert ist, gilt nun

$$g_\rho(v, v) = \operatorname{sp}(G(v) v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u_1(x, y)}{(x + y)^2} u_1(y, x)\, dxdy = \tag{4.93}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u_1(x, y)\, \overline{u_1(x, y)}}{(x + y)^2} dxdy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u_1(x, y)|^2}{(x + y)^2} dxdy > 0 \tag{4.94}$$

wenn nur $v \neq 0$. Weiters gilt wegen $v \in \mathcal{M}$ sicher $(x, y) \mapsto (x + y)\, u_1(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und somit auch $g_\rho(v, v) = \operatorname{sp}(G(v) v) < \infty$

- **Symmetrie:** Analog zum Beweis der Positivität folgt für $v_1, v_2 \in \mathcal{M}$ und den zugehörigen Kernen $u_1, u_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$

$$g_\rho(v_1, v_2) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{u_1(x, y)}{(x + y)^2}}_{\in L^2(\mathbb{R}^2)} \underbrace{u_2(y, x)}_{\in L^2(\mathbb{R}^2)} dxdy = \tag{4.95}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u_2(y, x)}{(y + x)^2} u_1(x, y)\, dydx = g_\rho(v_2, v_1) \tag{4.96}$$

womit die Symmetrie gezeigt ist.

- **Bilinearität:** Folgt sofort aus der Darstellung von G und der Tatsache, dass sich das Addieren und Multiplizieren mit Skalaren unmittelbar auf die Kernfunktionen überträgt.

$\square$

Zusammenfassung 55. Wir tragen die Ergebnisse aus den letzten Lemmas zusammen. Wir haben

- die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_1 = (X+Y)^2(M)$,
- mit dem Tangentialraum $\mathcal{T}_\rho\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1$ für alle $\rho \in \mathcal{M}_1$.
- und den metrischen Tensor

$$g_\rho : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \to \mathbb{C} : (v_1, v_2) \mapsto \operatorname{sp}(G(v_1)v_2) \tag{4.97}$$

für $\rho \in \mathcal{M}_1$, d.h. der metrische Tensor hängt nicht vom konkreten $\rho \in \mathcal{M}_1$ ab.

Insgesamt ist nun $(\mathcal{M}_1, g_\rho, E)$ ein Gradientenfluss. Betrachte nun die Gleichung $\rho_t = -\text{grad } E(\rho)$:

$$\operatorname{sp}(G(\rho_t)v) = g_\rho(\rho_t, v) \stackrel{!}{=} -g_\rho(\text{grad } E(\rho), v) = -\operatorname{sp}(\rho v) \quad \forall \text{Vektorfelder } v \tag{4.98}$$

Damit muss schon

$$G(\rho_t) = -\rho \tag{4.99}$$

sein. Da $G : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}$ bijektiv ist und $\left[(X+Y)^2\right]^{-1} = G$ erhält man schließlich

$$\rho_t = -(X+Y)^2\rho, \tag{4.100}$$

was äquivalent zur Ausgangsgleichung ist.

5 Literaturverzeichnis

[AGS] **L.Ambrosio**, **N. Gigli** und **G. Savaré**, Gradient Flows in metric spaces and in the Space of Probability Measures , Second Edition, 2008

[ARN1] **A. Arnold**, Nichtlineare partielle Differentialgleichungen, Vorlesungsskript an der TU Wien, 2009

[ARN2] **A. Arnold**, Variationsrechnung, Vorlesungsskript an der TU Wien, 2012

[ARN3] **A. Arnold**, Entropy method and the large time behavior of parabolic equation equations, September 2002

[ARN4] **A.Arnold**, Mathematical Properties of Quantum Evolution Equations

[EV] **Lawrance C. Evans**, Partial Differential Equations, Second Edition

[FANA1] **H. Woracek** , **M.Kaltenbäck** und **M. Blümlinger**, Funktionalanalysis, 8.Auflage, Vorlesungsskript an der TU Wien, April 2012

[FANA2] **M. Kaltenbäck**, Funktionalanlysis 2 WS 2011-2012, Vorlesungsskript an der TU Wien, Jänner 2012

[FAUST] **M. Faustmann**, Gewichtete Sobolev-Räume und nicht-klassische lineare elliptische Randwertprobleme

[JUENGEL] **A. Jüngel** Partielle Differentialgleichungen, Vorlesungsskript an der TU Wien, September 2011

[KAL1] **M. Kaltenbäck**, Analysis 3 für Technische Mathematik, Vorlesungsskript an der TU Wien, August 2011

[OTTO] **F. Ottto**, The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation

[OTTOWEST] **F. Otto** und **M. Westdickenberg**, Eularian calculus for the contraction in the Wasserstein distance

[SCHU] **F. Schuster**, Analysis auf Mannigfaltigkeiten , Vorlesungsskript an der TU Wien, 2012

[VILA] **C. Vilani**, Topics in Optimal Transportation, 2003