TU Wien
SS 2009

Gewichtete Sobolev-Räume und nicht „klassische" lineare elliptische Randwertprobleme

Markus Faustmann

Bachelorarbeit aus Technischer Mathematik

Betreuer: Univ. Prof. Dr. Anton Arnold

6. Oktober 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Anwendung gewichteter L^p-Räume ist in der Numerik weit verbreitet und speziell bei der numerischen Quadratur in Kombination mit der Theorie der orthogonalen Polynome von enormer Bedeutung.
Da man die Sobolev-Räume $W^{k,p}$ als Unterräume der L^p-Räume ansehen kann, liegt es nun nahe, Sobolev-Räume mit Gewichten zu betrachten.
In dieser Arbeit wird genau dieses Konzept zunächst theoretisch aufgebaut und dann die Anwendung auf lineare elliptische Differentialgleichungen untersucht.

Bei der theoretischen Untersuchung der gewichteten Sobolev-Räume werden einige elementare Eigenschaften, die die klassischen Sobolev-Räume besitzen, auf gewichtete Räume verallgemeinert. Klarerweise kann nicht erwartet werden, dass Aussagen über die Dichtheit glatter Funktionen, Einbettungssätze, Spuroperatoren, Poincaré-Ungleichungen und Ähnliches für beliebige Gewichtsfunktionen getroffen werden können. In dieser Arbeit wird - soweit möglich - auf einen allgemeinen Kontext eingegangen sowie einige in der Praxis relevante Beispiele gewichteter Räume gegeben, für die obige Aussagen verallgemeinert werden können.

Neben der strukturellen Analyse der gewichteten Sobolev-Räume ist die Anwendung auf lineare elliptische Differentialgleichungen, die nicht die Voraussetzungen der klassischen Theorie erfüllen, der zweite Hauptteil der Arbeit. Derartige Differentialoperatoren sind von der Gestalt, dass die Koeffizientenfunktionen nicht nach oben beziehungsweise nicht gleichmäßig von Null weg beschränkt sind. Hierbei tritt in der klassischen Theorie das Problem auf, dass die zugehörigen Bilinearformen nicht stetig beziehungsweise koerziv sind und somit das Lemma von Lax-Milgram nicht angewendet werden kann.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, Kriterien anzugeben, unter denen die Bilinearformen zu diesen nicht „klassischen“ Operatoren stetig und koerziv in passenden gewichteten Räumen sind.
Speziell werden zwei separate Ansätze vorgestellt. Einerseits wird versucht, die Gewichtsfunktionen direkt aus dem Operator abzulesen und somit direkt Bedingungen an die Koeffizienten des Operators zu stellen. Andererseits wird ein Ansatz gezeigt, indem man versucht, möglichst einfache gewichtete Sobolev-Räume mit gewissen Regularitätsvoraussetzungen an die Gewichte zu finden und das Problem in diesen zu lösen.

Weiters wird der Vorteil der Anwendung gewichteter Sobolev-Räume noch am Beispiel „klassischer“ elliptischer Differentialgleichungen mit schlechten rechten Seiten beziehungsweise schlechten Randbedingungen dargelegt.

Schlussendlich werden noch zwei weitere interessante Aspekte betrachtet. Einerseits wird versucht, eine der Grundvoraussetzungen bei der Definition der gewichteten Sobolev-Räume zu eliminieren, wobei die formale Definition der Räume noch einmal überarbeitet werden muss. Andererseits wird ein aktuelles Forschungsergebnis bezüglich Regularität für spezielle Differentialoperatoren in gewichteten Sobolev-Räumen vorgestellt.

2 Notationen

Da etliche Aussagen über gewichtete Räume eher technischer Natur sind, sind die Notationen in natürlicher Weise ziemlich umständlich. In dieser Arbeit wird auch der Versuch unternommen, eine möglichst kompakte Notation einzuführen, was allerdings nicht immer leicht möglich ist.

Für die folgenden Kapiteln gelten die nachfolgenden Notationen, die - sofern nicht explizit anders angegeben - stets die hier angegebene Bedeutung haben.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein (beschränktes) Gebiet mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$.
- α, β, γ seien Multiindices der Länge n, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
- Mit $C^k(\Omega), C_0^\infty(\Omega)$ seien die k-mal in Ω stetig differenzierbaren Funktion sowie die unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω bezeichnet.
- Mit $H^k(\Omega), W^{k,p}(\Omega)$ seien die klassischen Sobolev-Räume der Ordnung $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet.
- Sei $1 \leq p \leq \infty$, dann bezeichnet $L^p(\Omega, w)$ den gewichteten L^p-Raum, also den Raum aller (messbaren) Funktionen u für die

  $$\|u\|_{L^p(\Omega,w)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{für } p < \infty$$

  beziehungsweise

  $$\|u\|_{L^p(\Omega,w)} = \operatorname{ess\,sup}(w(x)u(x)) \quad \text{für } p = \infty$$

  gilt, wobei w eine Gewichtsfunktion nach Definition 3.1 ist.

  Mit der angegebenen Norm ist $L^p(\Omega, w)$ ein Banach-Raum und für $p = 2$ sogar ein Hilbert-Raum. Für $w(x) \equiv 1$ erhält man die klassischen L^p-Räume, also $L^p(\Omega, 1) =: L^p(\Omega)$.

  Mit $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ seien die über allen kompakten Teilmengen $K \subset \Omega$ integrierbaren Funktionen bezeichnet.
- $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet den Umgebungsfilter von x.

3 Gewichtete Sobolev-Räume

3.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

In diesem Abschnitt soll eine formale Definition der gewichteten Sobolev-Räume gegeben und einige wichtige Eigenschaften dieser Räume gezeigt werden.

DEFINITION 3.1. (*Gewichtsfunktion*) Eine Gewichtsfunktion w ist eine fast überall positive, messbare Funktion von Ω nach $\mathbb{R}$.
Die Menge aller Gewichtsfunktionen auf Ω wird mit $W(\Omega)$ bezeichnet.

In weiterer Folge bezeichnet $\mathbf{w}$ immer einen Vektor von Gewichtsfunktionen mit

$$\mathbf{w} = \{w_\alpha(x), x \in \Omega, |\alpha| \leq k\}.$$

DEFINITION 3.2. (*Gewichteter Sobolev-Raum*) Der Raum $H^k(\Omega, \mathbf{w})$ ist definiert als

$$H^k(\Omega, \mathbf{w}) = \left\{ u | u \in L^2(\Omega, w_0), \int_\Omega (D^\alpha u(x))^2 \, w_\alpha(x) dx < \infty, \ \forall \, |\alpha| \leq k \right\},$$

wobei $\mathbf{w}$ der Vektor bestehend aus den Gewichtsfunktionen w_α ist und die Ableitungen im distributionellen Sinn zu verstehen sind.

Zwei im Folgenden wichtige Spezialfälle seien notationell hervorgehoben:

- Sind sämtliche Komponenten des Vektors $\mathbf{w}$ gleich, so wird der zugehörige gewichtete Sobolev-Raum mit
$$H^k(\Omega, w_0)$$
bezeichnet.
- Sind sämtliche Gewichte zu Multiindices α mit $|\alpha| \geq 1$ gleich, so wird der zugehörige gewichtete Sobolev-Raum mit
$$H^k(\Omega, w_0, w_1)$$
bezeichnet, wobei w_0 das Gewicht zum Multiindex des Betrages 0 und w_1 die identischen Gewichte zu den Multiindices mit Beträgen größer gleich 1 darstellen.

Um obige Definition sinnvoll nutzen zu können, sollten die Räume $H^k(\Omega, \mathbf{w})$ zumindest Banach-Räume mit den Normen

$$\|u\|_{H^k(\Omega,\mathbf{w})} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega (D^\alpha u(x))^2 \, w_\alpha(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega, w_\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

sein. Allerdings trifft dies nicht für alle beliebigen Gewichtsfunktionen zu.
Folgender Satz gibt Auskunft darüber, für welche Gewichte die Räume $H^k(\Omega, \mathbf{w})$ sinnvoll definiert sind.

Satz 3.3. Sei $w_\alpha^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ für alle $w_\alpha \in \mathbf{w}$. Dann ist der Raum $H^k(\Omega, \mathbf{w})$ ein Hilbert-Raum.[1]

Beweis: Der Beweis wird nur für den Fall $k = 1$ geführt, die Argumentation ist aber auch für größere k analog durchführbar.

Sei u_n eine Cauchy-Folge in $H^1(\Omega, \mathbf{w})$. Es wird nun bewiesen, dass ein $u_0 \in H^1(\Omega, \mathbf{w})$ existiert mit $u_n \to u_0$ in $H^1(\Omega, \mathbf{w})$. Da die Räume $L^2(\Omega, w_\alpha)$ Hilbert-Räume sind, genügt es zu zeigen, dass, wenn $u_n \to u_0$ in $L^2(\Omega, w_0)$ und $D^\alpha u_n \to u_\alpha$ in $L^2(\Omega, w_\alpha)$ gilt, dass $D^\alpha u_0 = u_\alpha$ für alle α mit $|\alpha| = 1$ folgt.

Um nun die gewünschte Eigenschaft für u_0 zu erhalten, benötigt man, dass für einen festen Multiindex γ mit $|\gamma| \leq 1$, eine gegebene Gewichtsfunktion w mit $w^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fest

$$L_\gamma(u) = \langle u, D^\gamma \Phi \rangle = \int_\Omega u D^\gamma \Phi dx, \quad u \in L^2(\Omega, w)$$

ein stetiges lineares Funktional auf $L^2(\Omega, w)$ darstellt.
Dies ist auf Grund folgender Ungleichungskette der Fall:

$$\begin{aligned} |\langle u, D^\gamma \Phi \rangle| &= \left| \int_\Omega u D^\gamma \Phi dx \right| = \left| \int_K u D^\gamma \Phi dx \right| \leq \int_K |u D^\gamma \Phi| \, w^{1/2} w^{-1/2} dx \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega,w)} \int_K |D^\gamma \Phi|^2 \, w^{-1} \leq \|u\|_{L^2(\Omega,w)} \|\Phi\|^2_{C^\gamma(K)} \left\| w^{-1} \right\|_{L^1(K)} < \infty. \end{aligned}$$

Es ist also L_α mit $|\alpha| = 1$ ein stetiges lineares Funktional auf $L^2(\Omega, w_0)$. Nun gilt wegen der Stetigkeit des Funktionals, dass auch

$$L_\alpha(u_n) = \langle u_n, D^\alpha \Phi \rangle \to \langle u_0, D^\alpha \Phi \rangle = L_\alpha(u_0)$$

folgt. Da nun auch $L_0(v) = \langle v, \Phi \rangle$ ein stetiges lineares Funktional auf $L^2(\Omega, w_\alpha)$ definiert, gilt

$$L_0(D^\alpha u_n) = \langle D^\alpha u_n, \Phi \rangle \to \langle u_\alpha, \Phi \rangle = L_0(u_\alpha).$$

Aus der Definition der distributionellen Ableitung folgt nun

$$\langle u_n, D^\alpha \Phi \rangle = - \langle D^\alpha u_n, \Phi \rangle$$

und damit nach Grenzwertbildung wegen obigen Aussagen

$$\langle u_0, D^\alpha \Phi \rangle = - \langle u_\alpha, \Phi \rangle .$$

Nun erhält man, da diese Gleichung für alle $C_0^\infty(\Omega)$ erfüllt ist, dass

$$u_\alpha = D^\alpha u_0.$$

Das liefert nun die Behauptung der Vollständigkeit der Räume. □

[1] vgl. [KufOp1] Theorem 1.11

Bemerkung 3.4.

- Die Voraussetzung $w_\alpha^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ kann für w_0 weggelassen werden. Genaue Details hierzu finden sich in [KufOp1].
- Tatsächlich existieren Beispiele (siehe [KufOp1]), dass, sofern die Voraussetzungen des Satzes für einen Multiindex mit $|\alpha| \geq 1$ nicht erfüllt sind, die durch Definition 3.2 eingeführten Räume keine Hilbert-Räume sind.
  Eine Behandlung derartiger Räume findet sich in Kapitel 6.

Bemerkung 3.5. Analog zur Standardtheorie kann man auch versuchen, den gewichteten Sobolev-Raum $H^k(\Omega, \mathbf{w})$ als Abschluss von $C^\infty(\overline{\Omega})$ mit der Norm $\|.\|_{H^k(\Omega,\mathbf{w})}$ zu definieren.
Allerdings tritt hier schon die Schwierigkeit auf, dass die Inklusion

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^k(\Omega, \mathbf{w})$$

für Gewichtsfunktionen der Gestalt $|x - x_0|^{-\lambda}$, $x_0 \in \partial\Omega$ mit $\lambda > 1$ nicht erfüllt sein muss, da beispielsweise konstante Funktionen nicht im zugehörigen gewichteten Sobolev-Raum sind.
Selbst wenn obige Inklusion für eine bestimmte Gewichtsfunktion hält, kann es durch Bilden des Abschlusses passieren, dass der erhaltene Raum nichtreguläre Distributionen enthält und somit kein Unterraum des gewichteten L^2 sein kann. Ein Beispiel hierfür findet sich in [KufOp1].

Bei der späteren Betrachtung von Dirichlet-Problemen für nicht „klassische“ elliptische Differentialoperatoren ist es sinnvoll, den Raum $H_0^k(\Omega, \mathbf{w})$ zu betrachten.
Dieser ist definiert als Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm $\|.\|_{H^k(\Omega,\mathbf{w})}$. Ähnlich zu Bemerkung 3.5 und Satz 3.3 ist die mengentheoretische Inklusion der beiden Räume sinnvoll definiert, wenn $w_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt.
Folgendes Lemma zeigt, dass die Bedingung sowohl notwendig als auch hinreichend ist.

Lemma 3.6. Die Inklusion $C_0^\infty(\Omega) \subset H^k(\Omega, \mathbf{w})$ gilt genau dann, wenn $w_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ für alle $w_\alpha \in \mathbf{w}$. [2]

Beweis: Gilt $w_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$ sowie $K \subset \Omega$ mit $\operatorname{supp}(u) \subset K$, so impliziert die Hölder'sche Ungleichung

$$\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, w_\alpha(x) dx = \int_K |D^\alpha u(x)|^2 \, w_\alpha(x) dx \leq \left\| |D^\alpha u|^2 \right\|_{L^\infty(K)} \|w_\alpha\|_{L^1(K)} < \infty.$$

Summiert man nun über alle $|\alpha| \leq k$, dann erhält man die gewünschte Behauptung $u \in H^k(\Omega, \mathbf{w})$.

Gilt umgekehrt, dass $\|u\|_{H^k(\Omega,\mathbf{w})} < \infty$ für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und sei $K \subset \Omega$ kompakt sowie α ein Multiindex mit $|\alpha| \leq k$, so existiert dann eine Testfunktion mit $D^\alpha u \geq 1$ auf K.
Nun erhält man für die Gewichtsfunktion w_α

$$0 < \int_K w_\alpha dx \leq \int_K w_\alpha \, |D^\alpha u|^2 \, dx \leq \int_\Omega w_\alpha \, |D^\alpha u|^2 \, dx \leq \|u\|_{H^k(\Omega,\mathbf{w})} ,$$

und da K beliebig war, liefert das die Behauptung $w_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. □

[2] vgl. [KufOp1] Lemma 4.4

Das Konzept der gewichteten Sobolev-Räume kann nun als Verallgemeinerung der klassischen Sobolev-Räume angesehen werden, da $w_\alpha(x) = 1$ für alle α gewählt werden kann, und man so die klassischen Sobolev-Räume $H^k(\Omega)$ und $H_0^k(\Omega)$ erhält.
Tatsächlich entsprechen die gewichteten Räume gerade den klassischen Räumen, falls die Gewichtsfunktionen gleichmäßig von 0 weg sowie nach oben beschränkt sind, da wegen $0 < c_\alpha \leq w_\alpha(x) \leq \tilde{c}_\alpha < \infty$ gilt

$$c_\alpha \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \leq \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, w_\alpha(x) dx \leq \tilde{c}_\alpha \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx,$$

und somit die Normen von $H^k(\Omega)$ und $H^k(\Omega, \mathbf{w})$ äquivalent sind.

Beispiel 3.7. Ein in der Praxis oft auftretender Fall von Gewichtsfunktionen sind Gewichte der Gestalt

$$w(x) = d_M(x)^\varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \tag{2}$$

mit $d_M(x) = \operatorname{dist}(x, M)$, oder etwas allgemeiner

$$w(x) = s(d_M(x)), \tag{3}$$

mit einer stetigen positiven Funktion s definiert für $t > 0$, für die entweder

$$\lim_{t \to 0} s(t) = 0$$

oder

$$\lim_{t \to 0} s(t) = \infty$$

gilt. $M \subset \partial\Omega$ ist typischerweise entweder einpunktig oder gleich $\partial\Omega$.
Da w in Ω fast überall größer als 0 und endlich ist, folgt $w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $w^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und man kann die gewichteten Sobolev-Räume $H^k(\Omega, \mathbf{w})$ und $H_0^k(\Omega, \mathbf{w})$ einführen, wobei $w_\alpha \in \mathbf{w}$ Gewichtsfunktionen vom Typ von w (nicht notwendigerweise mit derselben Funktion s) sind.

Da diese Gewichtsfunktionen eine recht einfache Gestalt besitzen, kann man viele Aussagen über die zugehörigen gewichteten Sobolev-Räume machen.

Beispiel 3.8. Eine weitere Klasse von Gewichtsfunktionen, die speziell in der nichtlinearen Potentialtheorie eine wichtige Rolle spielen, sind die sogenannten A_p-Gewichte. Für diese gilt, dass für jede offene Kugel $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B w dx \right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} < \infty,$$

wobei $|B|$ das Volumen der Kugel bezeichnet.
Aus der Definition erkennt man, dass speziell für den Fall $p = 2$ für $w \in A_2$ gilt, dass $w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $w^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.
Man kann also für derartige Gewichtsfunktionen die gewichteten Sobolev-Räume definieren.

Beispiel 3.9. In weiterer Folge ist es oftmals interessant, spezielle gewichtete Sobolev-Räume zu betrachten, über die man gewisse Aussagen treffen kann, die allgemein nicht gezeigt werden können.
Betrachtet man den gewichteten Sobolev-Raum $H^1(\Omega, w_0, w_1)$, bestehend aus zwei verschiedenen Gewichtsfunktionen, und fordert man die zusätzliche Regularität $w_0^{-1}, w_1^{-1} \in L^t(\Omega)$ mit $t \geq n$, so ist einerseits die Voraussetzung von Satz 3.3 erfüllt, und man kann andererseits detaillierte Aussagen beispielsweise über Einbettungssätze oder Spuroperatoren treffen (vgl. Kapitel 3.4, Kapitel 3.5).

3.2 Dichtheit von $C^\infty(\overline{\Omega})$-Funktionen

In diesem Abschnitt wird untersucht, unter welchen Bedingungen an die Gewichtsfunktionen der Funktionenraum $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht im gewichteten Sobolev-Raum $H^k(\Omega, \mathbf{w})$ liegt. Bemerkung 3.5 zeigt, dass hier eine allgemeine Aussage nicht möglich ist.
Allerdings liefert Satz 3.21, dass, sofern Fall 1 eintritt, die mengentheoretische Inklusion $C^\infty(\overline{\Omega}) \subset H^k(\Omega, \mathbf{w})$ Sinn ergibt, und man sich somit Gedanken über die Dichtheit machen kann.

In weiterer Folge werden nur spezielle gewichtete Sobolev-Räume im Sinn von Beispiel 3.7 betrachtet. Der nachfolgende Satz gibt ein erstes Kriterium für die Dichtheit glatter Funktionen an.

Satz 3.10. Sei Ω beschränkt und $M = \partial\Omega$ sowie s eine positive stetige Funktion auf $(0, \infty)$ mit
$$\lim_{t \to 0} s(t) = 0.$$
Sei weiters s auf einem Intervall $(0, c)$ mit $c > 0$ monoton wachsend, dann gilt
$$H^k(\Omega; s(d_M)) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})},$$
wobei der Abschluss auf der rechten Seite in der Norm des gewichteten Sobolev-Raumes $H^k(\Omega; s(d_M))$ zu verstehen ist.

Beweis: Siehe [Kuf] Theorem 11.2. □

Bemerkung 3.11. Satz 3.10 bleibt auch gültig, wenn man $M = \partial\Omega$ durch $M = \{x_0\}$ mit $x_0 \in \partial\Omega$ ersetzt und für s zusätzlich die nachfolgende Bedingung fordert:

- Zu je zwei positiven Konstanten c_1, d_1 existieren zwei positive Konstanten c_2, d_2, dass die Implikation
$$c_1 \le \frac{t}{\tau} \le d_1 \quad \Rightarrow \quad c_2 \le \frac{s(t)}{s(\tau)} \le d_2$$
zutrifft.

Details hierzu finden sich in [Kuf].

In weiterer Folge ist der zweite Fall von Gewichtsfunktionen aus Beispiel 3.7 von Interesse, also Funktionen s, die
$$\lim_{t \to 0} s(t) = \infty$$
erfüllen. Hierbei benötigt man zunächst eine Fallunterscheidung bezüglich der Integrabilität der Gewichtsfunktion.

Definition 3.12. Eine positive stetige Funktion s definiert auf $(0, \infty)$, die weiters auf einem Intervall $(0, c)$ mit $c > 0$ monoton fallend ist und
$$\lim_{t \to 0} s(t) = \infty$$
erfüllt, ist vom Typ 1, wenn $s \in L^1(0, c)$ gilt. Gilt für eine derartige Funktion $s \notin L^1(0, c)$, so ist s vom Typ 2.

Der nachfolgende Satz kann als Analogon zu Satz 3.10 angesehen werden.

SATZ 3.13. Sei Ω beschränkt mit $\partial\Omega$ Lipschitz und $M = \partial\Omega$ sowie s eine Gewichtsfunktion vom Typ 1, die zusätzlich die Bedingung aus Bemerkung 3.11 erfüllt, dann gilt

$$H^k(\Omega; s(d_M)) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}.$$

Beweis: Siehe [Kuf] Lemma 11.8 und Bemerkung 11.10. □

3.3 Hardy-Ungleichungen

In diesem Abschnitt soll eine zur Poincaré-Ungleichung ähnliche Ungleichung gezeigt werden, die verwendet werden kann, um bei gewissen gewichteten Sobolev-Räumen wichtige Einbettungssätze zu beweisen.

Die nachfolgende eindimensionale Ungleichung ist die erste von G. H. Hardy entdeckte derartige Ungleichung. Für die weiteren Betrachtungen in dieser Arbeit ist diese von minimaler Bedeutung und wird hier nur wegen ihrer historischen Bedeutung angeführt.

SATZ 3.14. (*Hardy-Ungleichung*) Sei $u \in C_0^\infty(0,\infty)$ und $\varepsilon \neq 1$, dann gilt folgende Ungleichung

$$\int_0^\infty |u|^2 x^{\varepsilon-2} dx \leq \left(\frac{2}{|\varepsilon - 1|}\right)^2 \int_0^\infty |u'|^2 x^\varepsilon dx.$$

Diese Ungleichung kann als gewichtete Poincaré-Ungleichung mit den Gewichten $w_0 = x^{\varepsilon-2}$ und $w_1 = x^\varepsilon$ angesehen werden.

In der nachfolgenden Abhandlung werden Bedingungen an die Gewichtsfunktionen gesucht, sodass eine Ungleichung der Gestalt

$$\int_\Omega |u(x)|^2 w(x) dx \leq C \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^2 v_i(x) dx$$

für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$ erfüllt ist.

SATZ 3.15. Sei Ω beschränkt und w_0, w_1 zwei Gewichtsfunktionen mit $w_0^{-1}, w_1^{-1} \in L^t(\Omega)$ für $t \geq n > 1$ sowie $\frac{1}{2\#} := \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2t}$. Dann gilt für jedes $u \in H_0^1(\Omega, w_0, w_1)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{L^{2\#}(\Omega)} \leq C_0 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega, w_1)}.$$

Beweis: [MurSta] Theorem 3.2 und Korollar 3.3. □

Daraus erhält man das nachfolgende Korollar.

Korollar 3.16. Sei Ω beschränkt und w_0, w_1 zwei Gewichtsfunktionen mit $w_0^{-1}, w_1^{-1} \in L^t(\Omega)$ für $t \geq n > 1$ sowie $w_0 \in L^s(\Omega)$ mit $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \leq \frac{2}{n}$, dann gilt für alle $u \in H_0^1(\Omega, w_0, w_1)$

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega,w_0,w_1)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega,w_1)}.$$ [3]

Beweis: Sei $2^{\#}$ definiert wie in Satz 3.15, dann liefert die Hölder'sche Ungleichung

$$\|u\|_{L^{2^{\#}/s'}(\Omega,w_0)} \leq \|u\|_{L^{2^{\#}}(\Omega)} \|w_0\|_{L^s(\Omega)}^{s'/2^{\#}}. \tag{4}$$

Abermals erhält man mittels Hölder

$$\|u\|_{L^2(\Omega,w_0)} \leq \|u\|_{L^{2^{\#}/s'}(\Omega,w_0)} \|w_0\|_{L^s(\Omega)}^{1/2-s'/2^{\#}} \operatorname{meas}(\Omega)^{1/s'(1/2-s'/2^{\#})}$$

und nach Einsetzen von Ungleichung (4) und Anwendung von Satz 3.15

$$\|u\|_{L^2(\Omega,w_0)} \leq C \|u\|_{L^{2^{\#}}(\Omega)} \|w_0\|_{L^s(\Omega)}^{1/2} \leq \tilde{C} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega,w_1)} \|w_0\|_{L^s(\Omega)}^{1/2}.$$

Klarerweise resultiert daraus die Behauptung

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega,w_0,w_1)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega,w_0)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega,w_1)}^2 \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega,w_1)}^2 \left(1 + \tilde{C} \|w_0\|_{L^s(\Omega)}\right).$$

□

Satz 3.17. Sei $\partial\Omega$ Lipschitz und $w, v_1, \ldots, v_n \in W(\Omega)$, sowie existiert eine Funktion f auf Ω mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Ableitungen
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$
existieren fast überall in Ω.

2. Die Funktion f erfüllt die Differentialgleichung
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + wf = 0 \quad \text{in } \Omega, \tag{5}$$
sodass für fast alle $x \in \Omega$
$$f(x) \neq 0,\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Dann gilt die Ungleichung

$$\int_\Omega u(x)^2 w(x) dx \leq \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)^2 v_i(x) dx$$

für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$. [4]

[3]vgl. [MurSta] Korollar 3.5

Beweis: Zunächst sei $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{1}{f}$. Klarerweise gilt

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}v_i^{1/2} - uf_iv_i^{1/2}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 v_i + u^2 f_i^2 v_i - 2\frac{\partial u}{\partial x_i}uf_iv_i\right] \geq 0. \tag{6}$$

Weiters liefert elementares Ausdifferenzieren

$$2\frac{\partial u}{\partial x_i}uf_iv_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^2 f_i v_i\right) - u^2\frac{\partial}{\partial x_i}(f_iv_i) \tag{7}$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f_iv_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}v_i\right)\frac{1}{f} - v_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\frac{1}{f^2}.$$

Da f Lösung der Differentialgleichung (5) ist, gilt

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}v_i\right)\frac{1}{f} = -w$$

und somit

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(f_iv_i) = -w - \sum_{i=1}^{n}v_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\frac{1}{f^2} = -w - \sum_{i=1}^{n}v_if_i^2.$$

Setzt man zunächst (7) in (6) ein, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 v_i + u^2 f_i^2 v_i + u^2\frac{\partial}{\partial x_i}(f_iv_i)\right] \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^2 f_i v_i\right)$$

und durch Einsetzen obiger Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 v_i - u^2 w \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(u^2 f_i v_i).$$

Integriert man dies nun über Ω und wendet den Gauß'schen Integralsatz, so folgt

$$\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 v_i - u^2 w\right]dx \geq \int_{\partial\Omega}u^2\sum_{i=1}^{n}(f_iv_i\nu_i)ds = 0$$

da $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und somit die Behauptung. □

Die Differentialgleichung (5) kann als Euler-Lagrange-Gleichung des Funktionales

$$J(f) = \int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 v_i - f^2 w\, dx$$

angesehen werden.

Folgendes Beispiel liefert ein mehrdimensionales Analogon zu der klassischen Hardy-Ungleichung am Beginn des Kapitels.

[4] vgl. [KufOp2] Theorem 14.4

Beispiel 3.18. Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon \neq 2-n$, $x_0 \in \partial\Omega$ und die Gewichtsfunktionen

$$w(x) = \left(\frac{\varepsilon - 2 + n}{2}\right)^2 |x - x_0|^{\varepsilon - 2}$$

sowie

$$v_i(x) = |x - x_0|^{\varepsilon}, \; i = 1, \dots, n$$

gegeben. Dann ist die Funktion

$$y(x) = |x - x_0|^{\alpha}, \quad \text{mit } \alpha = 1 - \frac{\varepsilon + n}{2}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (5), und somit liefert Satz 3.17 die Gültigkeit der Ungleichung

$$\int_\Omega u(x)^2 \, |x - x_0|^{\varepsilon - 2} \, dx \leq \left(\frac{2}{\varepsilon - 2 + n}\right)^2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, |x - x_0|^{\varepsilon} \, dx \tag{8}$$

für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Bemerkung 3.19. Für nicht einpunktige $M \subset \partial\Omega$ mit $m = \dim(M)$ ist für $\varepsilon \neq 2 + m - n$ eine zu Ungleichung 3.8 ähnliche Ungleichung (mit anderer Konstante vor dem rechten Integral und $d_M(x)$ statt $|x - x_0|$) gültig.

Der vorherige Satz zeigt, dass Hardy-Ungleichungen in engem Zusammenhang mit Lösungen gewisser Randwertprobleme stehen. Der nachfolgende Satz liefert einen weiteren formelbasierten Ansatz, mit dessen Hilfe man ebenso Hardy-Ungleichungen erhalten kann.

Satz 3.20. Sei $\partial\Omega$ Lipschitz und die Gewichtsfunktionen $w, v_1, \dots, v_n$ gegeben durch die folgenden Formeln

$$\begin{aligned} w(x) &= \operatorname{div} g(x), \\ v_i(x) &= 4\,|g_i(x)|^2 \,(\operatorname{div} g(x))^{-1}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

mit einer Funktion $g = (g_1, \dots, g_n)$ mit $\operatorname{div} g > 0$ f.ü. in Ω und $g_i \in W^{1,1}(\Omega)$, dann gilt die Ungleichung

$$\int_\Omega u(x)^2 w(x) dx \leq \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)^2 v_i(x) dx$$

für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$. [5]

Beweis: Der Gauß'sche Integralsatz liefert

$$\int_\Omega u^2 \operatorname{div} g \, dx = \int_{\partial\Omega} u^2 g \cdot \nu dS - \int_\Omega 2u \nabla u \cdot g dx.$$

Das Randintegral ist klarerweise gleich 0, da $u \in C_0^\infty(\Omega)$ und man erhält

$$\int_\Omega u^2 \operatorname{div} g \, dx = -\int_\Omega 2u \nabla u \cdot g dx \leq \sum_{i=1}^n \int_\Omega 2u \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |g_i| \, dx. \tag{9}$$

[5] vgl. [KufOp2] Theorem 14.9

Mittels Definition der v_i und der Hölder'schen Ungleichung ergibt sich weiters

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega 2u\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right||g_i|\,dx &= \int_\Omega u\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|(\mathrm{div}g)^{1/2}v_i^{1/2}dx\\ &\leq \left(\int_\Omega u^2\mathrm{div}g\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 v_i dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Setzt man dies nun wieder in (9) ein, so erhält man

$$\int_\Omega u^2\mathrm{div}g\,dx \leq \left(\int_\Omega u^2\mathrm{div}g\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 v_i dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

und, da o.B.d.A. $\int_\Omega u^2\mathrm{div}g\,dx > 0$ gilt, somit nach Division die Behauptung. □

3.4 Einbettungssätze

Folgender Satz kann als elementarer Einbettungssatz angesehen werden, der allerdings speziell im zweiten Fall von großem Nutzen sein kann.

SATZ 3.21.

1. Gilt $w_\alpha(x) \in L^\infty(\Omega)$, dann folgt
$$H^k(\Omega) \hookrightarrow H^k(\Omega, \mathbf{w}). \tag{10}$$
2. Gilt $w_\alpha(x) \geq c > 0$ f.ü. in Ω, dann folgt
$$H^k(\Omega, \mathbf{w}) \hookrightarrow H^k(\Omega). \tag{11}$$

Beweis:

1. Sei $u \in H^k(\Omega)$, dann gilt $\int_\Omega |D^\alpha u|^2\,dx < \infty$, $\forall\,|\alpha| \leq k$ und dadurch auch, da $w_\alpha(x) \in L^\infty(\Omega)$ für jedes feste α,
$$\int_\Omega |D^\alpha u|^2\,w_\alpha dx \leq \|w_\alpha\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |D^\alpha u|^2\,dx < \infty$$
und somit die Behauptung $u \in H^k(\Omega, \mathbf{w})$.
2. Sei $u \in H^k(\Omega, \mathbf{w})$, dann erhält man für alle α mit $|\alpha| \leq k$
$$\infty > \int_\Omega |D^\alpha u|^2\,w_\alpha dx \geq c\int_\Omega |D^\alpha u|^2\,dx$$
und somit die Behauptung $u \in H^k(\Omega)$. □

Lemma 3.22. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $M \subset \partial\Omega$ und $\varepsilon, \eta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$L^2(\Omega, d_M^\varepsilon) \hookrightarrow L^2(\Omega, d_M^\eta),$$

falls $\varepsilon \leq \eta$. [6]

Beweis: Wegen der Beschränktheit von Ω ist auch die Funktion d_M^ν beschränkt für alle $\nu \geq 0$, also $d_M(x)^\nu \leq C$. Setzt man $\nu = \eta - \varepsilon \geq 0$, so erhält man daraus

$$d_M(x)^\eta \leq C d_M(x)^\varepsilon$$

und damit klarerweise die Behauptung. □

Lemma 3.23. Sei $\partial\Omega$ Lipschitz, $M = \partial\Omega$, $0 \leq r < k$ und gilt $\varepsilon > 2(k-r)-1$, dann folgt

$$H^k(\Omega, d_M^\varepsilon) \hookrightarrow H^r(\Omega, d_M^{\varepsilon-2(k-r)}).$$

Weiters gilt für $\varepsilon \neq 1, 3, \ldots, 2(k-r)-1$, dass

$$H_0^k(\Omega, d_M^\varepsilon) \hookrightarrow H_0^r(\Omega, d_M^{\varepsilon-2(k-r)}).$$ [7]

Beweis: Für $\varepsilon > 1$ gilt nach Satz 3.32 $H^k(\Omega, d_M^\varepsilon) = H_0^k(\Omega, d_M^\varepsilon)$, somit liefert die Hardy-Ungleichung (8) aus Beispiel 3.18

$$\|u\|_{L^2(\Omega, d_M^{\varepsilon-2})} \leq \|u\|_{H^1(\Omega, d_M^\varepsilon)},$$

also die Einbettung

$$H^1(\Omega, d_M^\varepsilon) \hookrightarrow L^2(\Omega, d_M^{\varepsilon-2}). \tag{12}$$

Verwendet man statt u die Funktionen $D^\alpha u$ mit $|u| = k-1$, so erhält man die Einbettung

$$H^k(\Omega, d_M^\varepsilon) \hookrightarrow H^{k-1}(\Omega, d_M^{\varepsilon-2}),$$

die für $\varepsilon > 1$ gültig ist.
Verwendet man abermals die Einbettung (12) mit $\varepsilon - 2$ statt ε und den Funktionen $D^\beta u$ mit $|\beta| = k-2$, so erhält man

$$H^{k-1}(\Omega, d_M^{\varepsilon-2}) \hookrightarrow H^{k-2}(\Omega, d_M^{\varepsilon-4}),$$

gültig für $\varepsilon - 2 > 1$. Induktives Weiterführen liefert die Behauptung.

Die zweite Aussage folgt analog, wobei hier die verwendete Hardy-Ungleichung für $H_0^1(\Omega, d_M^\varepsilon)$-Funktionen nur für alle $\varepsilon \neq 1$ (da $\dim M = n-1$) gültig ist. □

[6] vgl. [Kuf] Lemma 6.2
[7] vgl. [Kuf] Kapitel 8.8

Wir betrachten in weiterer Folge die Räume aus Beispiel 3.9, wofür Einbettungen in klassische Sobolev-Räume von Interesse sind.

Satz 3.24. Seien $w_0^{-1}, w_1^{-1} \in L^t(\Omega)$ mit $t \geq n$, dann gilt:
Die Einbettung von $H^1(\Omega, w_0, w_1)$ in den klassischen Sobolev-Raum $W^{1,2\tau}(\Omega)$ mit $\tau = \frac{t}{t+1}$ ist stetig. [8]

Beweis: Wendet man die Hölder'sche Ungleichung mit $p = \frac{1}{\tau}$ und somit mit $p' = t + 1$ auf

$$\|u\|_{L^{2\tau}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^{2\tau} \, w_0^\tau w_0^{-\tau} dx \right)^{1/2\tau}$$

an, so erhält man wegen $\tau(t+1) = t$

$$\|u\|_{L^{2\tau}(\Omega)} \leq \left\| |u|^{2\tau} \, w_0^\tau \right\|_{L^{1/\tau}(\Omega)}^{1/2\tau} \left\| w_0^{-\tau} \right\|_{L^{t+1}(\Omega)}^{1/2\tau} = \|u\|_{L^2(\Omega, w_0)} \left\| w_0^{-1} \right\|_{L^t(\Omega)}^{1/2}.$$

Analog ergibt sich

$$\|\nabla u\|_{L^{2\tau}(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega, w_1)} \left\| w_1^{-1} \right\|_{L^t(\Omega)}^{1/2}$$

und somit

$$\|u\|_{W^{1,2\tau}(\Omega)} \leq \max(\left\| w_0^{-1} \right\|_{L^t(\Omega)}^{1/2}, \left\| w_1^{-1} \right\|_{L^t(\Omega)}^{1/2}) \, \|u\|_{H^1(\Omega, w_0, w_1)}.$$

□

3.5 Spuroperatoren

Der wohl größte Unterschied zur Standardtheorie tritt bei der Betrachtung von Spuren von gewichteten Sobolev-Funktionen auf.
Bei den klassischen Sobolev-Funktionen existiert beispielsweise für $\partial\Omega \in C^1$ ein beschränkter linearer Operator $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$T(u) = u|_{\partial\Omega}, \quad \forall u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$

der Spuroperator genannt wird.

Ein solcher Operator kann im Allgemeinen bei gewichteten Sobolev-Räumen auch für beliebig glatte Ränder nicht gefunden werden, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.25. Sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, also die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$.
Betrachtet man nun die radialsymmetrische Funktion

$$u(x, y) = (1 - |x|)^{-\varepsilon} \quad \text{mit } \varepsilon > 0 \text{ fest},$$

also in Polarkoordinaten $u(r, \varphi) = u(r) = (1 - r)^{-\varepsilon}$.
Dann gilt für die Ableitung $u'(r) = -\varepsilon(1 - r)^{-\varepsilon - 1}$.

[8] vgl. [MurSta] Theorem 3.1

Sei nun weiters ein gewichteter Sobolev-Raum $H^1(\Omega, w_0)$ mit der Gewichtsfunktion $w_0 = (1-|x|)^\nu = (1-r)^\nu$ gegeben, dann folgt

$$\int_\Omega u^2 w_0 d(x,y) = 2\pi \int_0^1 (1-r)^{-2\varepsilon+\nu} r\, dr < \infty,$$

falls $\nu > 2\varepsilon - 1$. Analog gilt auch für die Ableitungen

$$\sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 w_0 d(x,y) = 2\pi \int_0^1 \varepsilon^2 (1-r^2)^{-2\varepsilon-2+\nu} r\, dr < \infty,$$

falls $\nu > 2\varepsilon + 1$. Laut Definition 3.2 folgt somit für alle $\nu > 2\varepsilon + 1$, dass $u \in H^1(\Omega, w_0)$.
Betrachtet man nun den Grenzwert $(x,y) \to (x_0, y_0) \in \partial\Omega$, dann resultiert klarerweise

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \infty.$$

Die Funktion u lässt sich also nicht am Rand von Ω definieren, und somit machen Spuroperatoren auf dem angegebenen gewichteten Sobolev-Raum keinen Sinn.

Obiges Beispiel zeigt einen generellen Unterschied zwischen gewichteten Räumen und nicht gewichteten Räumen.
In der Definition der Gewichtsfunktionen und den bisherigen Einschränkungen auf $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$-Funktionen kann der Fall auftreten, dass $w_\alpha(x) \to 0$ für $x \to x_0 \in \partial\Omega$.
Wie in obigem Beispiel kann dies dazu führen, dass durch das Abklingen der Gewichtsfunktion Singularitäten von anderen Funktionen am Rand soweit kompensiert werden können, dass das gewichtete Integral noch immer endlich bleibt.

Für nicht gegen 0 abklingende Gewichtsfunktionen tritt dieses Phänomen nicht auf, was nachfolgendes Korollar zu Satz 3.21 aussagt.

Korollar 3.26. Gilt $w_\alpha(x) \geq c > 0$ f.ü. in Ω, dann kann man auf gewichteten Sobolev-Räumen Spuroperatoren analog zur klassischen Theorie definieren.

Beweis: Wegen $H^k(\Omega, \mathbf{w}) \hookrightarrow H^k(\Omega)$ kann der Spuroperator auf $H^k(\Omega, \mathbf{w})$ als Restriktion des Spuroperators für den Raum $H^k(\Omega)$ auf die Menge $H^k(\Omega, \mathbf{w})$ erhalten werden. □

Der nachfolgende Satz gibt an, dass man in gewissen Fällen auch für abklingende Gewichtsfunktionen Spuroperatoren definieren kann.

Satz 3.27. Sei $n > 1$ und erfüllen die Gewichtsfunktionen w_0, w_1 die Bedingungen $w_0^{-1}, w_1^{-1} \in L^t(\Omega)$ mit $t \geq n$, dann existiert für alle $u \in H^1(\Omega, w_0, w_1)$ ein eindeutig bestimmtes Element $\gamma_0 u \in L^q(\partial\Omega)$ mit

$$q = \frac{2(n-1)}{n-2+n/t},$$

wobei γ_0 die Erweiterung des stetigen linearen Spuroperators von $C^1(\overline{\Omega})$ nach $C^0(\partial\Omega)$ bezeichnet. [9]

Beweis: Für den klassischen Sobolev-Raum $W^{1,2\tau}(\Omega)$ existiert ein stetiger linearer Spuroperator $\tilde{\gamma_0}$ für

$$2 \leq q \leq \frac{2\tau(n-1)}{n-2\tau} = \frac{2(n-1)}{n-2+n/t}$$

(vgl. [Adams] Theorem 5.22) von $W^{1,2\tau}(\Omega)$ nach $L^q(\partial\Omega)$.
Laut Satz 3.24 ist die Einbettung ι von $H^1(\Omega, w_0, w_1)$ in den $W^{1,2\tau}(\Omega)$ stetig.
Somit erfüllt der Operator $\gamma_0 := \tilde{\gamma_0} \circ \iota$ die gewünschten Anforderungen. □

3.6 Randwerte

Betrachtet man in der klassischen Theorie unbeschränkte Gebiete, beispielsweise $\Omega = \mathbb{R}^n$, dann müssen Funktionen aus $H^k(\mathbb{R}^n)$ eine Abklingbedingung $u(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$ erfüllen, da andernfalls die Bedingung $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ nicht mehr zutreffen kann.
Es gilt also

$$H^k(\mathbb{R}^n) = H_0^k(\mathbb{R}^n).$$

Für am Rand eines beschränkten Gebiets singuläre Gewichtsfunktionen tritt genau die selbe Problematik auf.
Die Betrachtung ebendieser ist insofern von Interesse, da man bei der Diskussion von Dirichlet-Problemen in gewichteten Räume (Abschnitt 4) möglicherweise keine von 0 verschiedenen Randwerte vorschreiben kann.

Definition 3.28. Sei $\Omega = (-1,1)^{n-1} \times (0,1) =: Q$ und $M = \{y \in \overline{Q} : y_n = 0\}$. Somit ist $d_M(y) = y_n$ für $y \in Q$. Mit $V^k(Q,s)$ sei die Menge aller Funktionen $u \in H^k(Q, s(d_M))$ bezeichnet, die die Bedingung

$$\operatorname{supp}(u) \cap (\partial\Omega \backslash M) = \emptyset$$

erfüllen. Eine Norm auf $V^k(Q,s)$ ist gegeben durch

$$\|u\|_{V^k(Q,s)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |u(y)|^2 \, s(y) dy \right)^{1/2}.$$

Bemerkung 3.29. Da $\partial\Omega$ laut Voraussetzung eine stetige Mannigfaltigkeit ist, lässt sich für jedes $x \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $B \subset \mathbb{R}^n$ von x und eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ sowie eine stetige Abbildung $a : D \to \partial\Omega \cap B$ finden, dass $x = (y', a(y'))$ mit $y' \in D$. In weiterer Folge sei D die Menge $D := \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : |y_i'| < \delta, i = 1, \ldots, n-1\}$. Weiters sei $B := \{y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n : y' \in D, a(y') - \beta < y_n < a(y')\}$ für ein $\beta > 0$.

Im Allgemeinen genügt nicht eine einzige Funktion a, um die gesamte Mannigfaltigkeit zu beschreiben. In weiterer Folge sei angenommen, dass m derartige Funktionen a_i mit $i = 1, \ldots, m$ existieren und D_i, B_i die jeweiligen zugehörigen Mengen aus obiger Definition sind. Weiters seien noch die

[9] vgl. [MurSta] Theorem 3.9

Mengen $U_i := B_i \cap \Omega$ gegeben.

Sei T eine Abbildung definiert durch $T(y) = z$ mit $z = (z', z_n) := (y', y_n - a_i(y'))$. Dann bildet T die Menge U_i auf das Parallelepiped $Q = \{z = (z', z_n) : z' \in D_i, -\beta < z_n < 0\}$ ab.

Satz 3.30. Sei Ω beschränkt und $M = \partial\Omega$ sowie die Funktion s vom Typ 2 und erfülle s die zusätzliche Bedingung aus Bemerkung 3.11, dann gilt

$$H^k(\Omega, s(d_M)) = \overline{C_0^\infty(\Omega)},$$

wobei der Abschluss auf der rechten Seite in der Norm von $H^k(\Omega, s(d_M))$ zu verstehen ist. [10]

Beweis: Das System (B_i) aus obiger Bemerkung ist eine Überdeckung von $\partial\Omega$. Fügt man noch eine offene Menge B_0 mit $\overline{B_0} \subset \Omega$ hinzu, sodass $\Omega = B_0 \cup \bigcup_{i=1}^m U_i$ gilt, dann kann man zu der Überdeckung $\{B_0, B_1, \dots, B_m\}$ eine Partition der Eins $\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m\}$ finden mit $\Phi_0(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$.

Obige Bemerkung 3.29 zeigt, dass man die Mengen U_i mittels einer geeigneten Transformation auf das Parallelepiped Q aus Definition 3.28 transformieren kann.
Gilt $u \in H^k(\Omega, s(d_M))$ mit $M = \partial\Omega$ und erfüllt s die zusätzliche Bedingung aus Bemerkung 3.11, dann gilt $u\Phi_i \in H^k(U_i, s(d_M))$ sowie dass auf Grund der zusätzlichen Bedingung die Gewichtsfunktion

$$s(a_i(y') - y_n)$$

statt der Gewichtsfunktion $s(d_M(y)) = s(y_n)$ betrachten werden kann. Die Transformation T bildet nun die Funktion $u\Phi_i$ auf die Funktion $v \in V^k(Q, s)$ ab, und die Normen von $u\Phi_i$ und v sind äquivalent.
Es genügt also $V^k(Q, s) = \overline{C_0^\infty(Q)}$ zu zeigen.

Sei $u \in V^k(Q, s)$ und $\varepsilon > 0$. Es wird nun eine Funktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$ konstruiert, sodass

$$\|u - v\|_{V^k(Q,s)} < \varepsilon \tag{13}$$

gilt.

Wegen $u \in V^k(Q, s)$ ist die Funktion für Werte $y_n \leq 0$ nicht definiert. Sei also u für $y_n \leq 0$ fortgesetzt mittels

$$\tilde{u}(y', y_n) = \begin{cases} u(y', y_n), & \text{falls } y_n > 0, \\ 0, & \text{falls } y_n \leq 0. \end{cases}$$

Dann hat die fortgesetzte Funktion die selben Differentiationseigenschaften wie die ursprüngliche Funktion. Tatsächlich hat die Funktion u sowie sämtliche Ableitungen $D^\alpha u$ mit $|\alpha| \leq k-1$ die Spur 0 auf M. Dies gilt, da für festes α und $y' \in (-1,1)^{n-1}$ sowie $f(t) = D^\alpha u$ wegen $u \in V^k(Q, s)$

$$\int_0^1 f(t)^2 s(t)dt, \int_0^1 f'(t)^2 s(t)dt < \infty$$

[10] vgl. [Kuf] Theorem 11.11

folgt und daher, da s eine Gewichtsfunktion vom Typ 2 ist, dass klarerweise $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ gelten muss.
Somit ist $\tilde{u} \in V^k(Q, s)$ und in weiterer Folge wird zwischen $\tilde{u}$ und u nicht mehr unterschieden.

Für $\lambda > 0$ setze man

$$u_\lambda(y', y_n) := u(y', y_n - \lambda).$$

Weiters liefert die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\|u - u_\lambda\|^2_{L^2(Q,s)} \leq\ & 2\Big(\int_Q \Big(u(y', y_n)s^{1/2}(y_n) - u(y', y_n - \lambda)s^{1/2}(y_n - \lambda)\Big)^2 dy \\ & + \int_Q u(y', y_n - \lambda)^2 \Big(s^{1/2}(y_n - \lambda) - s^{1/2}(y_n)\Big)^2 dy\Big).\end{aligned}$$

Wegen $us^{1/2} \in L^2(Q)$ konvergiert das erste obige Integral für $\lambda \to 0$ gegen 0, da L^p-Funktionen p-mittel-stetig sind, also $\lim_{h\to 0} \left(\int_\Omega (f(x+h) - f(x))^p dx\right)^{1/p} = 0$ gilt (für einen Beweis siehe [KufOlFu] Theorem 2.4.2).
Für das zweite Integral erhält man mit $t = y_n - \lambda$ sowie $Q_\lambda = (-1, 1)^n \times (-\lambda, 1 - \lambda)$

$$\int_Q u(y', y_n - \lambda)^2 (s^{1/2}(y_n - \lambda) - s^{1/2}(y_n))^2 dy = \int_{Q_\lambda} u(y', t)^2 s(t) \left(\frac{s^{1/2}(t) - s^{1/2}(t + \lambda)}{s^{1/2}(t)}\right)^2 d(y', t). \tag{14}$$

Wegen $u(y', t) = 0$ für $t \in (-\lambda, 0]$ gilt weiters

$$\begin{aligned}(14) =\ & \int\limits_{(-1,1)^{n-1}\times(0,1-\lambda)} u(y', t)^2 s(t) \left(\frac{s^{1/2}(t) - s^{1/2}(t + \lambda)}{s^{1/2}(t)}\right)^2 d(y', t) \\ \leq\ & \|u\|_{L^2(Q,s)} \left\| \frac{s^{1/2}(t) - s^{1/2}(t + \lambda)}{s^{1/2}(t)} \right\|^2_{C(0,1)} \to 0 \quad \text{für} \quad \lambda \to 0,\end{aligned}$$

wobei die Konvergenz aus der Stetigkeit von s folgt.
Für die Ableitungen $D^\alpha u$ mit $|\alpha| \leq k$ kann man analog vorgehen und erhält somit

$$\|u - u_\lambda\|^2_{V^k(Q,s)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da für jedes feste λ gilt, dass $u_\lambda(y) = 0$ für $y \in \Delta \times (0, \lambda)$, und aufgrund der Zusatzbedingung $\mathrm{supp}(u) \cap (\partial\Omega \backslash M) = \emptyset$ kann ein λ gewählt werden, sodass

$$\mathrm{supp}(u_\lambda) \subset Q.$$

Um nun auch die korrekte Differentiationsklasse zu erhalten, sei für $\tau > 0$ ein Glättungsoperator R_τ definiert durch

$$(R_\tau u_\lambda)(y) = \frac{1}{\kappa\tau^n} \int_{|z-y|<\tau} K(y - z; \tau) u_\lambda(z) dz$$

mit

$$K(z; \tau) = \begin{cases} \exp\left(\frac{|z^2|}{|z^2| - \tau^2}\right), & \text{für } |z| < \tau \\ 0, & \text{für } |z| \geq \tau. \end{cases}$$

sowie

$$\kappa = \int_{|z|<1} K(z;1)dz.$$

Dann folgt klarerweise $R_\tau u_\lambda \in C^\infty(\overline{Q})$ sowie

$$\lim_{\tau \to 0} R_\tau u_\lambda = u_\lambda$$

in $H^k(Q)$ und wegen

$$\operatorname{supp}(R_\tau u_\lambda) \subset Q$$

auch in $V^k(Q,s)$. Somit gilt für ein klein genug gewähltes $\tau > 0$

$$\|u_\lambda - R_\tau u_\lambda\|_{V^k(Q,s)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

womit die Behauptung (13) mit $v = R_\tau u_\lambda \in C_0^\infty(Q)$ gezeigt ist. □

Aus diesem Satz erhält man unmittelbar folgendes Korollar.

Korollar 3.31. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.30 gilt

1. $H^k(\Omega, s(d_M)) = H_0^k(\Omega, s(d_M))$.
2. Für $\varepsilon \leq -1$ erhält man
$$H^k(\Omega, d_M^\varepsilon) = H_0^k(\Omega, d_M^\varepsilon).$$

Beweis:

1. Folgt unmittelbar aus Satz 3.30 und der Definition von $H_0^k(\Omega, s(d_M))$.
2. Für den angegeben Spezialfall $s(t) = t^\varepsilon$ ist s genau dann vom Typ 2, wenn $\varepsilon \leq -1$. Weiters erfüllt s auch die zusätzliche Bedingung aus Bemerkung 3.11.

□

Für den Spezialfall $s(t) = t^\varepsilon$ erhält man obige Aussage auch überraschenderweise für einen weiteren Fall.

Satz 3.32. Sei Ω beschränkt sowie $\varepsilon > 2k - 1$ und $M = \partial\Omega$, dann gilt

$$H^k(\Omega, d_M^\varepsilon) = H_0^k(\Omega, d_M^\varepsilon).$$ [11]

Beweis: Der Beweis wird in zwei Schritten geführt, in denen jeweils gezeigt wird, dass die Räume $H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)$ und $H_0^k(\Omega, d_M^\varepsilon)$ mit einem anderen gewichteten Sobolev-Raum übereinstimmen.

[11] vgl. [Kuf] Proposition 9.6 und Theorem 9.7

1.Schritt: Mit $H^k(\Omega, \sigma, \varepsilon)$ sei der gewichtete Sobolev-Raum mit Gewichtsfunktionen

$$\sigma := \{\sigma_\alpha = d_M^{\varepsilon - 2(k-|\alpha|)}, |\alpha| \leq k\}$$

bezeichnet.

Es wird nun $H^k(\Omega, \sigma, \varepsilon) = H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)$ mit Hilfe zweier Einbettungssätze gezeigt.

Einerseits gilt wegen $\varepsilon - 2(k - |\alpha|) \leq \varepsilon$ und Lemma 3.22

$$\|u\|_{L^2(\Omega, d_M^\varepsilon)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega, d_M^{\varepsilon-2(k-|\alpha|)})}$$

für alle $|\alpha| \leq k$ und somit

$$H^k(\Omega, \sigma, \varepsilon) \hookrightarrow H^k(\Omega, d_M^\varepsilon).$$

Für die umgekehrte Einbettung liefert Einbettungssatz 3.23 für $u \in H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)$

$$H^k(\Omega, d_M^\varepsilon) \hookrightarrow H^r(\Omega, d_M^{\varepsilon-2(k-r)})$$

für $r \leq k - 1$. Somit erhält man für $|\beta| = r$ (für $r = k$ ist die folgende Ungleichung trivial)

$$\left\| D^\beta u \right\|_{L^2(\Omega, d_M^{\varepsilon-2(k-|\beta|)})} \leq \|u\|_{H^r(\Omega, d_M^{\varepsilon-2(k-r)})} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)},$$

woraus aber unmittelbar nach Definition des Hilfsraumes $u \in H^k(\Omega, \sigma, \varepsilon)$ und

$$\|u\|_{H^k(\Omega, \sigma, \varepsilon)} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)}$$

folgt, womit die gewünschte Aussage bewiesen ist.

2.Schritt: Sei $u \in H^k(\Omega, \sigma, \varepsilon)$, dann gilt nach dem 1. Schritt auch $w \in H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)$.
Es wird nun eine Funktion $w \in C_0^\infty(\Omega)$ konstruiert, für die für $\delta > 0$

$$\|u - w\|_{H^k(\Omega, d_M)} < \delta$$

gilt.

Für $h > 0$ sei zunächst eine Funktion u_h definiert durch

$$u_h(x) = u(x) F_h(x)$$

mit einer Funktion F_h, die gegeben ist als

$$F_h(x) = f\left(\frac{\rho(x)}{h}\right), \quad x \in \Omega,$$

wobei $\rho(x)$ die Funktion aus Lemma 3.33 und $f = f(t) \in C^\infty([0, \infty))$ eine Funktion mit $0 \leq f(t) \leq 1$ sowie $f(t) = 0, t \leq \frac{1}{4}$ und $f(t) = 1, t \geq \frac{3c_1}{4}$ ist, wobei c_1 die Konstante aus Lemma 3.33 bezeichnet.

Somit gilt $F_h \in C_0^\infty(\Omega)$ und damit klarerweise auch $u_h \in H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)$. Sei weiters eine Menge Ω_h definiert als

$$\Omega_h = \{x \in \Omega : d_M(x) \leq h\},$$

dann folgt $F_h(x) = 1$ für alle $x \in \Omega \backslash \Omega_h$.
Als nächstes wird nun

$$\lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_{H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)} = 0$$

gezeigt. Wegen $u - u_h = u(1 - F_h)$ erhält man

$$D^\alpha(u - u_h) = (1 - F_h)D^\alpha u + \sum_{1 \leq |\beta| \leq |\alpha|} C_{\alpha\beta} D^\beta F_h D^{\alpha-\beta} u, \quad \text{für } |\alpha| \leq k.$$

Weiters ergibt sich hiermit

$$\|D^\alpha(u - u_h)\|_{L^2(\Omega, d_M^\varepsilon)} \leq \|(1 - F_h)D^\alpha u\|_{L^2(\Omega, d_M^\varepsilon)} + \sum_{1 \leq |\beta| \leq |\alpha|} C_{\alpha\beta} \left\| D^\beta F_h D^{\alpha-\beta} u \right\|_{L^2(\Omega, d_M^\varepsilon)}.$$

Wegen $u - u_h = 0$ auf $\Omega \backslash \Omega_h$, da dort $F_h = 1$ gilt, genügt es, über Ω_h zu integrieren.
Somit gilt weiters wegen $0 \leq F_h \leq 1$

$$\|(1 - F_h)D^\alpha u\|_{L^2(\Omega_h, d_M^\varepsilon)} \leq \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega_h, d_M^\varepsilon)}. \tag{15}$$

Für die Funktionen $f, \rho \in \mathbb{C}^\infty$ sind speziell alle Ableitungen beschränkt, somit ergibt sich mittels der Kettenregel

$$|D^\alpha F_h(x)| \leq Ch^{-|\alpha|}.$$

Man erhält also

$$\left(D^\beta F_h(x)\right)^2 \leq Ch^{-2|\beta|} \leq C d_M^{-2|\beta|}, \quad x \in \Omega_h.$$

Wegen der Beschränktheit des Gebietes Ω gilt

$$d_M^{-2|\beta|} \leq C d_M^{-2(k - |\alpha - \beta|)}$$

und somit

$$\left\| D^\beta F_h D^{\alpha-\beta} u \right\|_{L^2(\Omega, d_M^\varepsilon)} = \int_{\Omega_h} \left(D^\beta F_h\right)^2 \left(D^{\alpha-\beta} u\right)^2 d_M^\varepsilon dx \leq C \int_{\Omega_h} \left(D^{\alpha-\beta} u\right)^2 d_M^{\varepsilon-(k-|\alpha-\beta|)} dx. \tag{16}$$

Wegen $D^\alpha u \in L^2(\Omega, d_M^\varepsilon)$ für $|\alpha| \leq k$ und, da $D^{\alpha-\beta} u \in L^2(\Omega, d_M^{\varepsilon-2(k-|\alpha-\beta|)})$ für $1 \leq |\beta| \leq |\alpha|$ wegen der Voraussetzung $u \in H^k(\Omega, \sigma, \varepsilon)$, folgt, dass die beiden Integrale auf der rechten Seite in (15) und (16) für $h \to 0$ gegen 0 konvergieren, da $\text{meas}(\Omega_h) \to 0$.
Die gewünschte Konvergenz in der $H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)$-Norm ist damit gezeigt. Es existiert also für jedes $\delta > 0$ ein $h > 0$, sodass $\|u - u_h\|_{H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)} \leq \frac{\delta}{2}$.
Wegen $F_h \in C_0^\infty(\Omega)$ hat auch u_h kompakten Träger, und somit lässt sich u_h durch eine Funktion

$$w = R_\tau u_h \in C_0^\infty(\Omega)$$

approximieren, wobei R_τ den Glättungsoperator aus dem Beweis des Satzes 3.30 bezeichnet. Diese Approximation ist wie in Satz 3.30 auch in der Norm des Raumes $H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)$ gültig. Es gilt daher auch für ein hinreichend kleines τ, dass $\|u_h - w\|_{H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)} < \frac{\delta}{2}$, und damit $\|u - w\|_{H^k(\Omega, d_M^\varepsilon)} < \delta$, womit die Behauptung $u \in H_0^k(\Omega, d_M^\varepsilon)$ gezeigt ist.

Die andere Inklusion erhält man analog zum ersten Schritt mittels der zweiten Aussage des Einbettungssatzes 3.23. □

LEMMA 3.33. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dann existieren eine positive Funktion $\rho \in C^\infty(\Omega)$ und Konstanten $c_1, c_2 > 0$, sodass die Ungleichung

$$c_1 d_{\partial\Omega}(x) \leq \rho(x) \leq c_2 d_{\partial\Omega}(x)$$

gilt.

Beweis: Siehe [Trie] Kapitel 3.2.3. □

4 Nicht „klassische“ elliptische Differentialoperatoren

4.1 Einleitung und Problemstellung

In diesem Abschnitt soll nun die bisherig erarbeitete Theorie der gewichteten Sobolev-Räume verwendet werden, um eine Lösungstheorie für Dirichlet-Probleme von nicht „klassischen“ elliptischen Differentialoperatoren zu untersuchen.

Den passenden gewichteten Sobolev-Raum kann man oftmals direkt aus dem gegebenen Differentialoperator ablesen.
Man betrachtet hierfür den allgemeinen Differentialoperator 2.Ordnung

$$Lu := \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u). \tag{17}$$

Geht man von dem Problem $L(u) = f$ aus, dann erhält man nach Multiplikation mit $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ und anschließender Integration über Ω die schwache Formulierung

$$a(u,v) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u D^{\alpha} v dx = \langle f, v \rangle . \tag{18}$$

Anstatt nun das Problem in einem klassischen Sobolev-Raum (z.B. $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$) zu betrachten, kann man die linke Seite als gewichtete Sobolev-Norm ansehen und daher das Problem im gewichteten Sobolev-Raum $H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$ mit $\mathbf{w} = \{a_{\alpha\alpha}(x) : |\alpha| \leq 1\}$ betrachten.
Diese „schwache“ Formulierung kann klarerweise nur als Motivation angesehen werden, da keinerlei Randbedingungen betrachtet wurden.

Um nun diese Motivation etwas besser formalisieren und die Vorteile der gewichteten Räume besser ausnutzen zu können, werden zunächst zwei primäre Fälle unterschieden.

Der erste Fall besteht darin, dass zumindest eine Koeffizientenfunktion des gegebenen Differentialoperators unbeschränkt wird. In Hinblick auf Satz 3.21 ist dies Fall 2, und es können somit problemlos Randwerte definiert werden.
Ein Beispiel hierfür wäre folgendes Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -div((1-|x|)^{-\nu} \nabla u(x)) + u(x) &= 0, \Omega \\ u &= 0, \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $\nu > 0$ und $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Hierfür kann obige Motivation problemlos durchgeführt werden, und man erhält die schwache Formulierung

$$\int_{\Omega} (1-|x|)^{-\nu} \nabla v^T \nabla u + uv dx = 0.$$

In der klassischen Theorie würde nun das Problem auftreten, dass die zugehörige Bilinearform in der schwachen Formulierung nicht mehr stetig sein muss und somit das Lemma von Lax-Milgram nicht verwendet werden kann.
Betrachtet man allerdings obiges Problem auf dem gewichteten Sobolev-Raum $H_0^1(\Omega, 1, (1-|x|)^{-\nu})$, so tritt dieses Problem nicht auf.

Differentialoperatoren dieser Gestalt werden **singuläre** Differentialoperatoren genannt.

Der zweite auftretende Fall besteht darin, dass die gleichmäßige Elliptizität des Operators verletzt ist, also dass Koeffizientenfunktionen am Rand verschwinden können. In Hinblick auf Satz 3.21 tritt also Fall 1 ein, und es ist im Allgemeinen nicht sinnvoll, Randwerte von gewichteten Sobolev-Funktionen mit derartigen Gewichtsfunktionen zu definieren.

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen (vgl. Satz 3.27) gibt es derartige Probleme jedoch nicht, und es können Dirichlet-Probleme wie üblich definiert werden.
Ein Beispiel für ein solches Problem wäre für $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ der Operator

$$\begin{aligned} -div((1-|x|)^\nu \nabla u(x)) + (1-|x|)^\nu u(x) &= 0, \Omega \\ u &= 0, \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $\nu = \frac{1}{4}$. Hierfür gilt $w_0^{-1} \in L^t(\Omega)$ für $1 \leq t < 8$, womit die Voraussetzungen von Satz 3.27 erfüllt sind.

Für $\nu = 2$ hingegen ist die Voraussetzung $w_0^{-1} \in L^t(\Omega)$ für $t \geq 2$ nicht erfüllt. Hier kann auch in Beispiel 3.25 $\varepsilon = \frac{1}{4}$ gewählt werden, und Randwerte machen keinen Sinn.

Derartige Differentialoperatoren werden **degenerierte** Differentialoperatoren genannt.

In der klassischen Theorie tritt bei degenerierten Operatoren das Problem auf, dass die zugehörige Bilinearform nicht mehr koerziv ist.

Um das Problem der Randwerte zu umgehen, wird die Problemstellung des Dirichlet-Problems folgendermaßen umformuliert.

Definition 4.1. Sei $g \in H^1(\Omega, \mathbf{w})$ und $F \in H_0^1(\Omega, \mathbf{w})'$. Eine Funktion $u \in H^1(\Omega, \mathbf{w})$ heißt schwache Lösung des Dirichlet-Problems für $L(u) = F$, wenn gilt

1. $a(u, v) = \langle F, v \rangle$ für alle $v \in H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$
2. $u - g \in H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$.

Man nimmt also an, dass die Funktion g, die die Randbedingung widerspiegelt, als $H^1(\Omega, \mathbf{w})$-Funktion nach Ω fortgesetzt werden kann. Für Funktionen, die am Rand hinreichend „gut“ sind, funktioniert dies problemlos, inwiefern diese Umformulierung allerdings einen Vorteil für allgemeine $H^1(\Omega, \mathbf{w})$-Funktionen darstellt, bleibt jedoch dahingestellt, da ein Kriterium wie bei den klassischen Sobolev-Räumen ($g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$) nicht gefunden werden konnte.

4.2 Existenz schwacher Lösungen

Um einen ersten Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu erhalten, muss man zusätzliche Voraussetzung an die Koeffizienten festlegen.
Die einfachsten derartigen Bedingungen sind im Folgenden angegeben:

1. $a_{\alpha\alpha} \in W(\Omega) \quad$ für $\quad |\alpha| \leq 1$.
2. $a_{\alpha\alpha},\ a_{\alpha\alpha}^{-1} \in L^1_{loc}(\Omega) \quad$ für $\quad |\alpha| \leq 1$.
3. Es existiert eine Konstante $C_1 > 0$, sodass für alle $|\alpha|, |\beta| \leq 1$ mit $\alpha \neq \beta$
$$|a_{\alpha\beta}(x)| \leq C_1 \sqrt{a_{\alpha\alpha}(x) a_{\beta\beta}(x)} \tag{19}$$
fast überall in Ω gilt.
4. Es existiert eine Konstante $C_2 > 0$, sodass für alle Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung
$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} a_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geq C_2 \sum_{|\alpha|\leq 1} a_{\alpha\alpha}(x)\xi_\alpha^2 \tag{20}$$
fast überall in Ω erfüllt ist.

Bemerkung 4.2.

- Bedingungen 1 und 2 sind notwendig für eine sinnvolle Definition der gewichteten Sobolev-Räume $H^1(\Omega, \mathbf{w})$ und $H^1_0(\Omega, \mathbf{w})$ mit $\mathbf{w} = \{a_{\alpha\alpha}(x) : |\alpha| \leq 1\}$. Im Gegensatz zu klassischen linearen elliptischen Differentialoperatoren sind hierbei somit auch unbeschränkte Koeffizienten erlaubt.
- Bedingung 4 kann als gewichtete Elliptizitätsbedingung angesehen werden, womit auch degenerierte Differentialoperatoren behandelt werden können.
- Bedingung 3 soll andeuten, dass die entscheidenden Koeffizienten gerade die „Diagonalkoeffizienten“ sind, die auch den zugehörigen gewichteten Sobolev-Raum bestimmen.
- Gilt $a_{\alpha\beta} = 0,\ \forall\, \alpha \neq \beta$, so sind Bedingung 3 und 4 trivialerweise erfüllt.

Der nachfolgende Satz stellt nun den zentralen Existenzsatz für Dirichlet-Probleme linearer elliptischer Differentialoperatoren dar.

Satz 4.3. Es sei angenommen, dass die Koeffizienten des in (17) definierten Operators L die Bedingungen 1-4 erfüllen, und es gelte weiters $g \in H^1(\Omega, \mathbf{w})$ und $F \in H^1_0(\Omega, \mathbf{w})'$.
Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung $u \in H^1(\Omega, \mathbf{w})$ des Dirichlet-Problems für den Operator L.
Weiters gilt folgende a-priori Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(\Omega,\mathbf{w})} \leq C \left(\|g\|_{H^1(\Omega,\mathbf{w})} + \|F\|_{H^1_0(\Omega,\mathbf{w})'} \right).$$ [12]

[12] vgl. [KufSän] Theorem 43.1

Beweis: Das Ziel des Beweises ist, das Lemma von Lax-Milgram auf die zu L gehörige Bilinearform mit dem Hilbert-Raum $H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$ anzuwenden.
Zunächst soll die Stetigkeit der Bilinearform gezeigt werden:

$$|a(u,v)| = \left| \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\beta u D^\alpha v dx \right| \leq \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \int_\Omega |a_{\alpha\beta}| \left| D^\beta u \right| |D^\alpha v| \, dx.$$

Bedingung 3 und die Hölder'sche Ungleichung implizieren nun

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \int_\Omega |a_{\alpha\beta}| \left| D^\beta u \right| |D^\alpha v| \, dx &\leq C_1 \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \int_\Omega \left| D^\beta u \right| \sqrt{a_{\beta\beta}} \, |D^\alpha v| \sqrt{a_{\alpha\alpha}} dx \\
&\leq C_1 \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \left\| D^\beta u \right\|_{L^2(\Omega, a_{\beta\beta})} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega, a_{\alpha\alpha})} \\
&\leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega,\mathbf{w})} \|v\|_{H^1(\Omega,\mathbf{w})} .
\end{aligned}$$

Die Koerzivität der Bilinearform ergibt sich einfach aus Bedingung 4, indem man $\xi_\alpha = D^\alpha u$ setzt und über Ω integriert.

Nun kann das Lemma von Lax-Milgram mit dem Hilbert-Raum $H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$ und dem Funktional $h \in H_0^1(\Omega, \mathbf{w})'$ mit

$$\langle h, v \rangle := \langle F, v \rangle - a(g, v)$$

angewendet werden. Aus der obigen Abschätzung für die Beschränktheit der Bilinearform erhält man weiters, dass $a(g, v)$ ein stetiges lineares Funktional auf $H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$ darstellt.
Das Lemma von Lax-Milgram liefert nun ein eindeutiges Element $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$ mit

$$a(\tilde{u}, v) = \langle h, v \rangle \, , \forall v \in H_0^1(\Omega, \mathbf{w}).$$

Setzt man nun

$$u = \tilde{u} + g,$$

so ist u die eindeutige Lösung des Dirichlet-Problems in $H^1(\Omega, \mathbf{w})$.
Weiters liefert das Lemma von Lax-Milgram

$$\|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega,\mathbf{w})} \leq C_2^{-1} \|h\|_{H_0^1(\Omega,\mathbf{w})'} .$$

Da außerdem

$$\|u\|_{H^1(\Omega,\mathbf{w})} \leq \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega,\mathbf{w})} + \|g\|_{H^1(\Omega,\mathbf{w})}$$

sowie

$$\|h\|_{H_0^1(\Omega,\mathbf{w})'} \leq \|F\|_{H_0^1(\Omega,\mathbf{w})'} + C_1 \|g\|_{H^1(\Omega,\mathbf{w})}$$

gilt, erhält man auch die gewünschte a-priori Abschätzung. □

Die Bedingungen 1-4 sind also so konstruiert, dass der Existenzbeweis eine einfache Folgerung ist. Klarerweise sind diese deshalb aber relativ unscharf und können noch etwas abgeschwächt werden, was im nachfolgenden Abschnitt durchgeführt wird.

4.3 Verallgemeinerte Bedingungen an die Koeffizienten

In Abschnitt 4.2 war eine der generellen Voraussetzungen, dass sämtliche Diagonal-Koeffizienten des Differentialoperators fast überall positiv sind.
Betrachtet man den Beweis des Existenzsatzes (Satz 4.3), so ist erkennbar, dass die Argumentation auch durchgeführt werden kann, wenn manche Diagonal-Koeffizienten in Ω verschwinden.

Die Indexmenge I beinhalte jene Multiindices α, für die $a_{\alpha\alpha} \in W(\Omega)$ gilt, wobei alle anderen Koeffizientenfunktionen zu Multiindices, die nicht zu I gehören, auf 0 gesetzt werden.

Damit die Argumentation von Satz 4.3 analog durchgeführt werden kann, muss man nun zusätzlich fordern, dass I zumindest einen Multiindex mit Betrag k enthält und

$$\|u\|_{H_I^1} = \left(\sum_{\alpha \in I} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega, a_{\alpha\alpha})} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

eine Norm auf dem zugehörigen gewichteten Sobolev-Raum darstellt.

Auf den ersten Blick scheint diese Verallgemeinerung von rein technischer Natur, da die Bedingung, dass $\|.\|_{H_I^1}$ tatsächlich eine Norm ist, eine relativ starke Einschränkung darzustellen scheint.

Diese Schwierigkeiten können allerdings in gewissen Fällen umgangen werden, indem man die Indexmenge I durch Hinzufügen „geeigneter" Gewichtsfunktionen vergrößert, sodass Bedingung (21) erfüllt werden kann, was nachfolgend präzisiert wird.

Sei ein Vektor von Gewichtsfunktionen

$$\mathbf{w}^* := \{w_\alpha^* \in W(\Omega), |\alpha| \leq 1\}$$

gegeben mit der Eigenschaft, dass die Normen $\|u\|_{H^1(\Omega,\mathbf{w})}$ und $\|u\|_{H^1(\Omega,\mathbf{w}^*)}$ nicht äquivalent sind, also die Räume $H^1(\Omega, \mathbf{w})$ und $H^1(\Omega, \mathbf{w}^*)$ echt verschieden sind, aber die beiden Normen äquivalent auf $C_0^\infty(\Omega)$ sind, und somit

$$H_0^1(\Omega, \mathbf{w}) = H_0^1(\Omega, \mathbf{w}^*)$$

gilt.
Ein Vorteil diese Ansatzes ist, dass die Bedingungen 3, 4 auf die Funktionen w_α^* übertragen werden können, die bis auf obige Einschränkungen frei zu wählen sind. Wegen der Äquivalenz der Normen auf $C_0^\infty(\Omega)$ genügt es, die folgenden beiden Ungleichungen zu erfüllen.

3'. Es existiert eine Konstante $C_1 > 0$, sodass für alle $|\alpha|, |\beta| \leq 1$ mit $\alpha \neq \beta$

$$|a_{\alpha\beta}(x)| \leq C_1 \sqrt{w_\alpha^*(x) w_\beta^*(x)}$$

fast überall in Ω gilt.

4'. Es existiert eine Konstante $C_2 > 0$, sodass für alle Vektoren $\xi \in \mathbb{R}^n$ fast überall in Ω

$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq 1} a_{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \geq C_2 \sum_{|\alpha| \leq 1} w_\alpha^*(x) \xi_\alpha^2.$$

Nachfolgendes Beispiel soll gerade den Vorteil dieses Ansatzes zeigen.

Beispiel 4.4. Betrachtet man das Problem

$$Lu := -\Delta u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

auf einem unbeschränkten Gebiet, beispielsweise $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$, dann ist die zugehörige Bilinearform

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

im Allgemeinen nicht koerziv auf $H_0^1(\Omega)$, man hat also einen degenerierten Operator. Da der Operator die Bedingung 1 aus Abschnitt 4.2 nicht erfüllt, kann auch der Existenzsatz 4.3 (der zugehörige gewichtete Sobolev-Raum wäre auch nicht wohldefiniert) nicht verwendet werden.

Erweitert man nun allerdings die Menge der Gewichtsfunktionen, ohne dabei den Raum $H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$ mit $\mathbf{w} = \{0, 1\}$ zu verändern, so kann dieses Problem umgangen werden.
Sei also $\tilde{\mathbf{w}} = \{x_2^{-2}, 1\}$, dann ist der Ausdruck

$$\sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2 x_2^{-2} dx}$$

eine Norm auf dem gewichteten Sobolev-Raum $H^1(\Omega, \mathbf{w})$. Wegen der Hardy-Ungleichung aus Beispiel 3.18/ Bemerkung 3.19 ($d_M(x) = x_2$) ist diese auf $C_0^\infty(\Omega)$ äquivalent zu $\sqrt{a(u,u)}$ und sämtliche Bedingungen für Satz 4.3 sind erfüllt, womit man das Problem eindeutig lösen kann.

Andererseits ermöglicht der Ansatz auch die Behandlung einer größeren Klasse von Funktionen g, die die Randbedingung des Dirichlet-Problems widerspiegeln. In der Definition des Dirichlet-Problems wird $g \in H^1(\Omega, \mathbf{w})$ gefordert. Erfüllt eine gegebene Funktion g diese Bedingung nicht, so kann man versuchen, Funktionen w_α^* zu finden, dass

$$g \in H^1(\Omega, \mathbf{w}^*),$$

um das Dirichlet-Problem im Raum $H^1(\Omega, \mathbf{w}^*)$ zu lösen (vgl. auch Kapitel 5). Da die Räume $H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$ und $H_0^1(\Omega, \mathbf{w}^*)$ gleich sind, erhält man die selbe Lösung $\tilde{u} = u - g \in H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$.

4.4 Ein weiterer Ansatz

In diesem Abschnitt soll ein weiterer Ansatz zur Lösung degenerierter und singulärer elliptischer Gleichungen vorgestellt werden.
Die Grundidee hierbei besteht darin, eine spezielle Gewichtsfunktion w_0 zu finden, die die Koerzivität und Beschränktheit der zum Operator gehörenden Bilinearform sichert, und das Problem dann auf dem gewichteten Sobolev-Raum $H^1(\Omega, w_0)$ zu betrachten. Der Ansatz hat einerseits den Vorteil, dass nur gewichtete Sobolev-Räume mit einer einzigen Gewichtsfunktion benötigt werden. Andererseits erlaubt die bis auf ein paar Bedingungen freie Wahl von w_0 die Lösbarkeit mehrerer Probleme.

Bis zum Ende des Kapitels 4 sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in weiterer Folge immer beschränkt.
Der Differentialoperator L sei analog zu Kapitel 4.2 gegeben durch

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(d_j(x)u)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad x \in \Omega$$

beziehungsweise in kompakterer Form mittels

$$Lu := -div(A(x)\nabla u) - div(d(x)u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u. \tag{22}$$

Die Koeffizientenfunktionen sollen dabei die folgenden Bedingungen erfüllen.

1. Es existiert eine Gewichtsfunktion $w_0(x)$ auf $\overline{\Omega}$ mit den folgenden beiden Bedingungen:
   a) Für $1 \leq s, t \leq \infty$ mit $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \leq \frac{2}{n}$ gilt
   $$w_0 \in L^s(\Omega), \quad w_0^{-1} \in L^t(\Omega).$$
   b) Für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ soll die Ungleichung
   $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq w_0(x)\,|\xi|^2$$
   für fast alle $x \in \Omega$ erfüllt werden.
2. Weiters soll für solch eine Gewichtsfunktion $w_0(x)$ und die Koeffizientenfunktionen des Operators (22) gelten
   $$A(x)w_0^{-1} \in L^\infty(\Omega)$$
   $$bw_0^{-1/2}, dw_0^{-1/2} \in L^{2q}(\Omega)$$
   $$c \in L^q(\Omega)$$
   mit $\frac{1}{2q} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2t}$ für $q \leq s$, wobei die Bedingungen komponentenweise zu verstehen sind.

Bemerkung 4.5.

- Obige Bedingungen wirken etwas willkürlich, allerdings wird man in weiterer Folge in der Beweisführung des Existenzsatzes erkennen, dass sie in gewisser Weise kanonisch entstehen.
- Bedingung 1a impliziert, da Ω beschränkt ist, dass in jedem Fall $w_0, w_0^{-1} \in L^1(\Omega)$ gilt und somit die Räume $H^1(\Omega, w_0)$ und $H_0^1(\Omega, w_0)$ wohldefiniert sind.

Die zu dem Operator L gehörige Bilinearform $a(u, v)$ ist definiert als

$$a(u,v) := \int_\Omega \Big[\nabla u A(x)\nabla v + ud(x)\cdot\nabla v + \nabla u \cdot b(x)v + c(x)uv\Big]dx.$$

Das Ziel ist nun, die Voraussetzungen für das Lemma von Lax-Milgram im Raum $H_0^1(\Omega, w_0)$ zu erfüllen.

Die Beschränktheit der Bilinearform folgt direkt aus der obigen zweiten Voraussetzung, was folgendes Lemma zeigt.

LEMMA 4.6. Erfüllen die Koeffizienten des Differentialoperators die Bedingung 2, dann ist die Bilinearform $a(u,v)$ beschränkt für $u, v \in H_0^1(\Omega, w_0)$.[13]

Beweis: Es gilt mit $2^\#$ definiert in Satz 3.15

$$\frac{1}{2q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^\#} = 1,$$

und man erhält somit mit der Hölder'schen Ungleichung

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \left[(\nabla u w_0^{1/2})(A(x) w_0^{-1})(\nabla v w_0^{1/2}) + u d(x) w_0^{-1/2} \cdot \nabla v w_0^{1/2} + b(x) w_0^{-1/2} \cdot \nabla u w_0^{1/2} v + cuv \right] dx \right| \\ &\leq \left\| A w_0^{-1} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega, w_0)} \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega, w_0)} + \left\| d w_0^{-1/2} \right\|_{L^{2q}(\Omega)} \left\| u \right\|_{L^{2^\#}(\Omega)} \left\| \nabla v \right\|_{L^2(\Omega, w_0)} \\ &\quad + \left\| b w_0^{-1/2} \right\|_{L^{2q}(\Omega)} \left\| v \right\|_{L^{2^\#}(\Omega)} \left\| \nabla u \right\|_{L^2(\Omega, w_0)} + \left\| c \right\|_{L^q(\Omega)} \left\| u \right\|_{L^{2^\#}(\Omega)} \left\| v \right\|_{L^{2^\#}(\Omega)} . \end{aligned}$$

Satz 3.15 liefert $\|u\|_{L^{2^\#}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega, w_0)}$, und es folgt

$$|a(u,v)| \leq C_B \|\nabla u\|_{L^2(\Omega, w_0)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega, w_0)} \leq C_B \|u\|_{H^1(\Omega, w_0)} \|v\|_{H^1(\Omega, w_0)} ,$$

wobei C_B eine Konstante ist, die nur von den Koeffizienten, von Ω sowie von w_0 abhängt. □

Für die Koerzivität benötigt man eine zusätzliche Voraussetzung an die Normen der Koeffizienten und an w_0.
Die Normen der Koeffizienten seien folgendermaßen bezeichnet

$$\begin{aligned} \left\| (b+d) w_0^{-1/2} \right\|_{L^{2q}} = \sum_i \left\| (b_i + d_i) w_0^{-1/2} \right\|_{L^{2q}} &= C_1 \\ \|c\|_{L^q} &= C_2. \end{aligned}$$

LEMMA 4.7. Erfüllen die Koeffizienten des Operators L die Bedingungen 1, 2 und gilt

$$C_1 \tilde{C} + C_2 \tilde{C}^2 < 1, \tag{23}$$

wobei $\tilde{C}$ die Konstante aus Satz 3.15 ist, dann ist die Bilinearform $a(u,v)$ koerziv auf $H_0^1(\Omega, w_0)$.[14]

Beweis: Satz 3.15 ergibt

$$\|u\|_{L^{2^\#}(\Omega)} \leq \tilde{C} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega, w_0)} .$$

Bedingung 1b an die Koeffizienten liefert

$$\int_\Omega \nabla u^T A(x) \nabla u dx \geq \int_\Omega |\nabla u|^2 w_0(x) dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega, w_0)} .$$

[13] vgl. [MurSta] Proposition 4.1
[14] vgl. [MurSta] Proposition 4.4

Andererseits folgt aus der Hölder'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (b+d)\cdot\nabla u\, u + cu^2 dx\right| &= \left|\int_\Omega (b+d)w_0^{-1/2}\cdot\nabla u w_0^{1/2}\, u + cu^2 dx\right| \\
&\leq \left\|(b+d)w_0^{-1/2}\right\|_{L^{2q}(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega,w_0)} \|u\|_{L^{2\#}(\Omega)} + \|c\|_{L^q(\Omega)} \|u\|^2_{L^{2\#}(\Omega)} \\
&\leq (C_1\tilde{C} + C_2\tilde{C}^2)\, \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega,w_0)}.
\end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\geq \int_\Omega \nabla u^T A(x)\nabla u dx - \left|\int_\Omega (b+d)\cdot\nabla u u + cu^2 dx\right| \\
&\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega,w_0)} - (C_1\tilde{C} + C_2\tilde{C}^2)\, \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega,w_0)} = \varepsilon\, \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega,w_0)}.
\end{aligned}$$

Wegen der Zusatzvoraussetzung an die Normen der Koeffizienten gilt $\varepsilon > 0$, und Korollar 3.16 liefert dann die Behauptung. □

Bemerkung 4.8.

- Gilt $c \geq 0$ fast überall in Ω, dann reduziert sich die obige Bedingung 23 auf

$$C_1\tilde{C} < 1.$$

- Man könnte statt obiger Bedingung auch die stärkere Bedingung 4 aus Kapitel 4.2 fordern.
- Obige Bedingung ist in der Praxis keine starke Einschränkung, da man einerseits versuchen kann, w_0 geeignet zu wählen, sodass die Bedingung erfüllt wird. Andererseits treten oft Operatoren auf, für die $b = d = 0$ gilt.

Korollar 4.9. Erfüllen die Koeffizienten des Operators L die Bedingungen 1, 2 und (23). Sei weiters $g \in H^1(\Omega, w_0)$ und $F \in H^1(\Omega, w_0)'$.
Dann existiert eine eindeutige schwache Lösung $u \in H^1(\Omega, w_0)$ des Dirichlet-Problems aus Definition 4.1 für den Operator L.
Weiters gilt folgende a-priori Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(\Omega,w_0)} \leq \|g\|_{H^1(\Omega,w_0)} + \|F\|_{H^1(\Omega,w_0)'}.$$

Beweis: Die obigen beiden Lemmata zeigen die Stetigkeit und Koerzivität der Bilinearform. Weiters gilt, dass $a(g,v)$ ein stetiges lineares Funktional auf $H^1(\Omega, w_0)$ darstellt.
Das Lemma von Lax-Milgram liefert nun die Behauptung analog zu Satz 4.3. □

4.5 Ein Maximumprinzip

Ziel dieses Abschnittes ist es, ein schwaches Vergleichsprinzip für die obig vorgestellten Operatoren anzugeben.

Hierfür werden zunächst eine Definition und zwei Lemmata benötigt.

Definition 4.10. Sei w_0 eine Gewichtsfunktion mit $w_0 \in L^s(\Omega)$ und $w_0^{-1} \in L^t(\Omega)$ für $\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \leq \frac{2}{n}$ sowie $g \in H^1(\Omega, w_0)$. Dann heißt $u \in H^1(\Omega, w_0)$ untere Lösung zu dem Differentialoperator L, die auf $\partial\Omega$ den Wert g annimmt, wenn gilt

1. $u - g \in H_0^1(\Omega, w_0)$
2. $a(u, \varphi) \leq 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega, w_0),$ mit $\varphi \geq 0$ f.ü. in Ω.

Nachfolgendes Lemma ist eine Erweiterung des Lemmas von Lax-Milgram, eine Referenz auf den Beweis kann in [MurSta] Kapitel 6 gefunden werden.

Lemma 4.11. Sei X ein Hilbert-Raum und X' sein Dualraum. Sei $a(u, v)$ eine stetige, koerzive Bilinearform auf X.
Ist $U \subset X$ abgeschlossen und konvex sowie $F \in X'$, dann existiert ein eindeutiges Element $u \in U$ mit

$$a(u, v - u) \geq \langle F, v - u \rangle, \quad \forall v \in U.$$

Das nachfolgende Lemma ist eine Konsequenz dieses Hilfssatzes.

Lemma 4.12. Erfüllen w_0 und die Koeffizienten des Operators L die Bedingungen 1, 2 und (23) und seien zwei untere Lösungen $u, v \in H^1(\Omega, w_0)$ zum Operator L gegeben mit Werten u_0, v_0 auf $\partial\Omega$, dann ist

$$m := \max(u, v)$$

auch eine untere Lösung für den Operator L, die den Wert $m_0 = \max(u_0, v_0)$ auf $\partial\Omega$ annimmt.[15]

Beweis: Klarerweise gilt $m \in H^1(\Omega, w_0)$.
Die Menge

$$U = \{\psi \in H^1(\Omega, w_0) : \psi \leq m \text{ f.ü. in } \Omega \text{ und } \psi = m_0 \text{ auf } \partial\Omega\}$$

ist eine abgeschlossene konvexe Menge in $H^1(\Omega, w_0)$. Dann ist auch die Menge $U - m_0$ eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge von $H_0^1(\Omega, w_0)$.
Wie zuvor bereits festgestellt, ist die Abbildung $\varphi \mapsto -a(m_0, \varphi)$ ein stetiges lineares Funktional auf $H_0^1(\Omega, w_0)$. Nach Lemma 4.11 existiert also ein eindeutiges Element $\eta \in U - m_0$ mit

$$a(\eta, \varphi) \geq -a(m_0, \varphi), \quad \forall \varphi \in U - m_0 - \eta. \tag{24}$$

[15] vgl. [MurSta] Lemma 6.6

Aus $\eta \in U - m_0$ folgt $\eta = \psi - m_0 \leq m - m_0$ mit $\psi \in U$ sowie $\eta = 0$ auf $\partial\Omega$.
Zunächst wird gezeigt, dass jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\varphi \leq 0$ in $U - m_0 - \eta$ liegt. Hierfür muss nur für ψ in der Zerlegung $\varphi = \psi - m_0 - \eta$ bewiesen werden, dass $\psi \leq m$ gilt. Dies folgt einfach wegen

$$\varphi = \psi - m_0 - \eta \leq 0 \Leftrightarrow \psi \leq m_0 + \eta \leq m_0 + m - m_0 = m.$$

Es gilt also (24) auch, wenn man $U - m_0 - \eta$ durch $C_0^\infty(\Omega)$ ersetzt. Somit erhält man aber auch

$$a(\eta, \varphi) \leq -a(m_0, \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0,$$

also dass $\eta + m_0$ eine untere Lösung mit Wert m_0 am Rand ist.
Es bleibt zu zeigen, dass $\eta = m - m_0$ gilt. Hierfür wird bewiesen, dass sowohl $u - m_0 \leq \eta$ als auch $v - m_0 \leq \eta$ gültig ist.
Setzt man hierfür $z = \max(u - m_0, \eta)$, dann folgt klarerweise $z \in U - m_0$ und somit $z - \eta \in U - m_0 - \eta$.
Ungleichung (24) liefert nun

$$a(\eta, z - \eta) \geq -a(m_0, z - \eta).$$

Da aber u eine untere Lösung ist, erhält man auch

$$a(z, z - \eta) = a(z, z - \eta)|_{\{z = u - m_0\}} + a(z, z - \eta)|_{\{z = \eta\}} = a(u - m_0, z - \eta) \leq -a(m_0, z - \eta).$$

Somit resultiert durch Subtraktion obiger Ungleichungen

$$a(z - \eta, z - \eta) \leq a(m_0, z - \eta) - a(m_0, z - \eta) = 0.$$

Da a aber koerziv ist, gilt $z = \eta$, also $u - m_0 \leq \eta$.
In analoger Weise erhält man $v - m_0 \leq \eta$ und insgesamt

$$m - m_0 = \max(u - m_0, v - m_0) \leq \eta \leq m - m_0,$$

also $m - m_0 = \eta$, und die Behauptung ist gezeigt. □

Folgender Satz kann als schwaches Vergleichsprinzip für eine Klasse degenerierter und singulärer elliptischer Operatoren angesehen werden.

Satz 4.13. Der Operator L erfülle die Bedingungen 1, 2 und es sei die zugehörige Bilinearform $a(u, v)$ koerziv auf $H_0^1(\Omega, w_0)$. Weiters gelte $c - div(d) \geq 0$ im Distributionensinn. Ist $u \in H^1(\Omega, w_0)$ eine untere Lösung zum Operator L, dann gilt

$$\max_\Omega u \leq \max\left(\max_{\partial\Omega}(u(x)), 0\right).$$ [16]

Beweis: Gilt $\max_{\partial\Omega} u(x) = \infty$, so ist nichts zu zeigen, es sei also o.B.d.A $\max_{\partial\Omega}(u(x)) < \infty$.
Sei $k \in \mathbb{R}$ mit $k \geq 0$, dann gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\varphi \geq 0$

$$a(-k, \varphi) = -k \int_\Omega d \cdot \nabla\varphi + c\varphi dx = -k \langle c - div(d), \varphi \rangle \leq 0,$$

[16] vgl. [MurSta] Theorem 6.7

somit ist $-k$ eine untere Lösung zum Operator L. Setzt man $f = \max(\max_{\partial\Omega}(u), 0)$, dann ist also $-f$ und wegen der Linearität von L auch $u - f$ eine untere Lösung. Lemma 4.12 liefert nun, dass $v = \max(u - f, 0)$ auch eine untere Lösung von L ist, also

$$a(v, \varphi) \leq 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0$$

erfüllt. Andererseits gilt aber $v \in H_0^1(\Omega, w_0)$ und v ist nichtnegativ. Setzt man also obige Ungleichung durch Stetigkeit fort, erhält man $a(v, v) \leq 0$, und die Koerzivität der Bilinearform impliziert nun $v = 0$, also $u \leq f$ f.ü. in Ω. □

5 Probleme mit schlechten rechten Seiten

In diesem Kapitel werden Randwertprobleme mit klassischen Operatoren aber mit Inhomogenitäten $f \notin H^{-1}(\Omega)$ oder mit Randbedingung $g \notin H^{1/2}(\partial\Omega)$ analysiert. Da hier die klassische Theorie nicht angewendet werden kann, werden zwei verschiedene Ansätze vorgestellt, derartige Probleme auf gewichteten Räumen zu betrachten.

In diesem Abschnitt werden abermals Differentialoperatoren der Gestalt

$$Lu := \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) \tag{25}$$

betrachtet. Da es sich um klassische elliptische Differentialoperatoren handeln soll, sei angenommen, dass $a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ sowie $a(u,u) \geq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

5.1 Eine Verallgemeinerung des Lemmas von Lax-Milgram

Um einen Existenzsatz für diese klassischen Probleme in gewichteten Räumen zu erhalten, benötigt man zunächst eine Verallgemeinerung des Lemmas von Lax-Milgram, was hier ohne Beweis angegeben wird.

Lemma 5.1. Seien H_1, H_2 zwei Hilbert-Räume und $b(u,v)$ eine Bilinearform definiert auf $H_1 \times H_2$. Weiters sei angenommen, dass die nachfolgenden Bedingungen zutreffen.

1. Für alle $u \in H_1$ und $v \in H_2$ gilt
$$|b(u,v)| \leq c_1 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_2}.$$
2. Für alle $u \in H_1$ gilt
$$\sup_{\|v\|_{H_2}\leq 1} |b(u,v)| \geq c_2 \|u\|_{H_1}.$$
3. Für alle $v \in H_2$ gilt
$$\sup_{\|w\|_{H_1}\leq 1} |b(u,v)| \geq c_2 \|v\|_{H_2}.$$

Sei weiters $h \in H_2'$, dann existiert genau ein $u \in H_1$, dass

$$b(u,v) = \langle h, v\rangle$$

für alle $v \in H_2$ gilt. Weiters trifft folgende a-priori-Abschätzung zu

$$\|u\|_{H_1} \leq C \|h\|_{H_2'}.$$ [17]

Das Ziel dieses Abschnittes ist zu zeigen, dass die Bedingungen 1-3 für die Wahl

$$H_1 = H_0^1(\Omega, s(d_M)), \quad H_2 = H_0^1(\Omega, s^{-1}(d_M))$$

[17] vgl. [Kuf] Lemma 13.6

mit $M \subset \partial\Omega$, $m = \dim(M)$ erfüllt sind.

Bedingung 1, also die Stetigkeit der Bilinearform $a(u,v)$, erhält man einfach mittels der Hölder'schen Ungleichung, was das nachfolgende Lemma zeigt.

LEMMA 5.2. Die Bilinearform $a(u,v)$ ist stetig auf $H_0^1(\Omega, s(d_M)) \times H_0^1(\Omega, s^{-1}(d_M))$.

Beweis: Wegen der Beschränktheit der Koeffizienten und der Hölder'schen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \|a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \left|D^\beta u(x) D^\alpha v(x)\right| dx \\
&= \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \|a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \left|D^\beta u(x) s^{1/2}(d_M(x))\right| \left|D^\alpha v(x) s^{-1/2}(d_M(x))\right| dx \\
&\leq \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \|a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \left\|D^\beta u\right\|_{L^2(\Omega,s(d_M))} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega,s^{-1}(d_M))} \\
&\leq C \|u\|_{H^1(\Omega,s(d_M))} \|v\|_{H^1(\Omega,s^{-1}(d_M))}
\end{aligned}$$

□

Um nun die weiteren beiden Bedingungen des verallgemeinerten Lemmas von Lax-Milgram, die auch als die H_1-H_2-Elliptizität der Bilinearform $a(u,v)$ bezeichnet werden, zeigen zu können, untersucht man zunächst den Spezialfall $s(t) = t^\varepsilon$. Im Anschluss daran wird dann eine Bedingung formuliert, mittels der die Beweisführung des allgemeinen Falles auf diesen Spezialfall zurückgeführt werden kann.

LEMMA 5.3. Sei $s(t) = t^\varepsilon$, dann existiert ein offenes Intervall J um 0, sodass die $H_0^1(\Omega, s(d_M))$-$H_0^1(\Omega, s^{-1}(d_M))$-Elliptizität der Bilinearform $a(u,v)$ für $\varepsilon \in I$ erfüllt ist.[18]

Beweis: In der weiteren Beweisführung ist es notwendig die nicht überall differenzierbare Funktion d_M abzuleiten. Hierfür wird gemäß Lemma 3.33 die Funktion d_M durch die äquivalente C^∞-Funktion ρ ersetzt, womit man

$$|\nabla d_M^\varepsilon| \leq |\varepsilon|\, C d_M^{\varepsilon-1} \tag{26}$$

erhält.
Wegen der Bilinearität von a gilt für $u \in H_0^1(\Omega, d_M^\varepsilon)$ und $v = u d_M^\varepsilon$

$$a(u, ud_M^\varepsilon) = a(ud_M^{\varepsilon/2}, ud_M^{\varepsilon/2}) + \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \int_\Omega a_{\alpha\beta} \left[D^\alpha(ud_M^\varepsilon) D^\beta u - D^\alpha(ud_M^{\varepsilon/2}) D^\beta(ud_M^{\varepsilon/2})\right] dx. \tag{27}$$

Das Integral auf der rechten Seite setzt sich aus Linearkombinationen von zwei Typen von Integralen zusammen. Es folgt klarerweise

[18] vgl. [Kuf] Abschnitt 14.2

$$
\begin{aligned}
I_1 := \int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\alpha(u d_M^\varepsilon) D^\beta u dx &= \int_\Omega a_{\alpha\beta}(D^\alpha u) d_M^\varepsilon D^\beta u dx + \int_\Omega a_{\alpha\beta} u D^\alpha(d_M^\varepsilon) D^\beta u dx \\
I_2 := \int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\alpha(u d_M^{\varepsilon/2}) D^\beta(u d_M^{\varepsilon/2}) dx &= \int_\Omega a_{\alpha\beta}(D^\alpha u) d_M^\varepsilon D^\beta u dx + \int_\Omega a_{\alpha\beta} u^2 D^\alpha(d_M^{\varepsilon/2}) D^\beta(d_M^{\varepsilon/2}) dx \\
&\quad + \int_\Omega a_{\alpha\beta} \left(u D^\alpha(d_M^{\varepsilon/2}) D^\beta(u) d_M^{\varepsilon/2} + D^\alpha(u) d_M^{\varepsilon/2} u D^\beta(d_M^{\varepsilon/2}) \right) dx.
\end{aligned}
$$

Somit verschwinden in (27) sämtliche Integrale, in denen keine Ableitungen der Gewichtsfunktionen d_M^ε beziehungsweise $d_M^{\varepsilon/2}$ auftreten. Sämtliche nicht verschwindende Integrale lassen sich in gleicher Weise abschätzen, was an einem der obigen Integrale vorgeführt wird.

Wegen der Beschränktheit der Koeffizienten und (26) erhält man für $|\alpha| = |\beta| = 1$

$$
\int_\Omega a_{\alpha\beta} u D^\alpha(d_M^\varepsilon) D^\beta u dx \leq \|a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} C |\varepsilon| \int_\Omega |u| \, d_M^{\varepsilon-1} \left| D^\beta u \right| dx = C_1 |\varepsilon| \int_\Omega |u| \, d_M^{\varepsilon/2} \left| D^\beta u \right| d_M^{\varepsilon/2-1} dx.
$$

Die Hölder'sche Ungleichung liefert nun

$$
C_1 |\varepsilon| \int_\Omega |u| \, d_M^{\varepsilon/2} \left| D^\beta u \right| d_M^{\varepsilon/2-1} dx \leq C_1 |\varepsilon| \, \|u\|_{L^2(\Omega, d_M^{\varepsilon-2})} \left\| D^\beta u \right\|_{L^2(\Omega, d_M^\varepsilon)}.
$$

Wendet man die Hardy-Ungleichung aus Beispiel 3.18 an (gültig nur für $\varepsilon \neq 2 + m - n$), so erhält man

$$
C_1 |\varepsilon| \, \|u\|_{L^2(\Omega, d_M^{\varepsilon-2})} \left\| D^\beta u \right\|_{L^2(\Omega, d_M^\varepsilon)} \leq C_2 |\varepsilon| \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega, d_M^\varepsilon)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega, d_M^\varepsilon)} \leq C_2 |\varepsilon| \, \|u\|^2_{H^1(\Omega, d_M^\varepsilon)}.
$$

Somit ergibt sich

$$
|I_1| \leq C_3 |\varepsilon| \, \|u\|^2_{H^1(\Omega, d_M^\varepsilon)}
$$

und mittels analoger Argumentation

$$
|I_2| \leq C_4 |\varepsilon|^2 \, \|u\|^2_{H^1(\Omega, d_M^\varepsilon)}.
$$

Gesamt folgt somit

$$
\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq 1} \int_\Omega a_{\alpha\beta} \left[D^\alpha(u d_M^\varepsilon) D^\beta u - D^\alpha(u d_M^{\varepsilon/2}) D^\beta(u d_M^{\varepsilon/2}) \right] dx \leq (C_5 |\varepsilon| + C_6 |\varepsilon|^2) \|u\|^2_{H^1(\Omega, d_M^\varepsilon)}. \quad (28)
$$

Verwendet man nun die Koerzivität der Form a, so erhält man

$$
a(u d_M^{\varepsilon/2}, u d_M^{\varepsilon/2}) \geq \kappa \left\| u d_M^{\varepsilon/2} \right\|^2_{H^1(\Omega)} = \kappa \sum_{|\alpha \leq 1|} \int_\Omega \left(D^\alpha(u d_M^{\varepsilon/2}) \right)^2 dx.
$$

Weiters gilt

$$
\int_\Omega \left(D^\alpha(u d_M^{\varepsilon/2}) \right)^2 dx \geq \int_\Omega (D^\alpha u)^2 d_M^\varepsilon dx - 2 \int_\Omega \left| (D^\alpha u) d_M^{\varepsilon/2} u (D^\alpha d_M^{\varepsilon/2}) \right| dx.
$$

Das zweite Integral kann analog zu den Integralen I_1 und I_2 abgeschätzt werden. Wegen der Hardy-Ungleichung ist das erste Integral äquivalent zur $H^1(\Omega, d_M^\varepsilon)$-Norm und man erhält insgesamt

$$a(ud_M^{\varepsilon/2}, ud_M^{\varepsilon/2}) \geq (C_7 - C_8 |\varepsilon|) \|u\|^2_{H^1(\Omega, d_M^\varepsilon)} .$$

Diese Ungleichung liefert zusammen mit (28) eingesetzt in (27)

$$|a(u, ud_M^\varepsilon)| \geq (C_9 - C_{10} |\varepsilon| - C_6\varepsilon^2) \|u\|^2_{H^1(\Omega, d_M^\varepsilon)} .$$

Weiters kann man analog zu den Integralen I_1 und I_2 die Ungleichung

$$\|ud_M^\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega, d_M^{-\varepsilon})} \leq (1 + C_{11} |\varepsilon| + C_{12} |\varepsilon|^2) \|u\|^2_{H^1(\Omega, d_M^\varepsilon)}$$

zeigen, womit man die Bedingung 2 im verallgemeinerten Lax-Milgram Lemma

$$|a(u, v)| \geq C(\varepsilon) \|u\|_{H^1(\Omega, d_M^\varepsilon)} \|v\|_{H^1(\Omega, d_M^{-\varepsilon})}$$

mit $v = ud_M^\varepsilon$ und der Konstanten

$$C(\varepsilon) = \frac{C_9 - C_{10} |\varepsilon| - C_6\varepsilon^2}{\sqrt{1 + C_{11} |\varepsilon| + C_{12} |\varepsilon|^2}}$$

für $|\varepsilon|$ hinreichend klein, dass $C(\varepsilon) > 0$, bewiesen hat.
Bedingung 3 erhält man analog, indem man $v \in H^1(\Omega, d_M^{-\varepsilon})$ fixiert und mit $u = vd_M^{-\varepsilon}$ testet. Hierfür ergibt sich aus der Hardy-Ungleichung die Einschränkung $\varepsilon \neq -2 - m + n$.
Das Intervall J ist der Durchschnitt der beiden Bereiche für Bedingung 2 und 3, dass jeweils $C(\varepsilon) > 0$ gilt. □

Bemerkung 5.4. Um nun obigen H_1-H_2-Elliptizitätsbeweis auf andere Funktionen s verallgemeinern zu können, muss man einerseits eine Funktion s_0 bestimmen, dass die Einbettung

$$H_0^1(\Omega, s(d_M)) \hookrightarrow L^2(\Omega, s_0(d_M))$$

gültig ist. Um nun obigen Spezialfall verwenden zu können, definiert man eine Funktion w durch $w(t) = s^{1/\varepsilon}(t)$ und sucht Bedingungen, für die die $H_0^1(\Omega, w^\varepsilon(d_M))$-$H_0^1(\Omega, w^{-\varepsilon}(d_M))$-Elliptizität des Operators L gültig ist.

Weiters sollen eine Menge $S \subset \mathbb{R}$ und eine Konstante $C(S)$ existieren, dass die Ungleichung

$$w(d_M(x))^{\varepsilon-2}(w'(d_M(x))D^\beta d_M(x))^2 \leq C(S)p(x)$$

für $\varepsilon \in S$ und fast alle $x \in \Omega$ zutrifft, wobei $p(x)$ gewählt werden kann als $s(d_M)$ oder $s_0(d_M)$.

Sind alle diese zusätzlichen Bedingungen erfüllt, so kann man analog zu dem Spezialfall $s(t) = t^\varepsilon$ vorgehen.

Korollar 5.5. Seien $g \in H^1(\Omega, w^\varepsilon(d_M))$ und $F \in H_0^1(\Omega, w^{-\varepsilon}(d_M))'$ sowie die zusätzlichen Bedingungen aus Bemerkung 5.4 erfüllt, dann existiert ein Intervall I, dass für $\varepsilon \in I$ das Dirichlet-Problem für den Operator L genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega, w^\varepsilon(d_M))$ besitzt und es gilt folgende a-priori Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(\Omega, w^\varepsilon(d_M))} \leq C \left(\|g\|_{H^1(\Omega, w^\varepsilon(d_M))} + \|F\|_{H_0^1(\Omega, w^{-\varepsilon}(d_M))'} \right) .$$

Beweis: Das verallgemeinerte Lax-Milgram-Lemma liefert analog zu Satz 4.3 die Aussage. □

Bemerkung 5.6. Da die Hardy-Ungleichung im Raum $H^1(\Omega, d_M^\varepsilon)$ nur für $\varepsilon > 2+m-n$ gültig ist und man ebendiese auch für $-\varepsilon$ anwenden muss, erhält man, dass bei Problemen mit keinen reinen Dirichlet-Randbedingungen die relativ starke Einschränkung $2+m-n < \varepsilon < n-m-2$ oder $n-m > 2$ erfüllt sein muss.
Um dieses Problem zu umgehen, muss die Beweismethode für die H_1-H_2-Elliptizität abgeändert werden. Diese Modifikationen für den Fall $n-m \leq 2$ finden sich in [KufSän].

Folgendes, einfaches Beispiel soll den Vorteil des in diesem Kapitel vorgestellten Ansatzes aufzeigen.

Beispiel 5.7. Sei $\Omega = (0,1)^2$ und $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [0,1], x_2 = 0\}$, dann ist $d_M(x) = x_2$. Sei weiters das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} Lu := \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= g := x_2^{-1/4} && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

gegeben. Dann ist die zu L gehörige Bilinearform klarerweise stetig und beschränkt im Raum $H_0^1(\Omega)$. Allerdings gilt $g \notin L^2(\partial\Omega)$ und somit auch nicht $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, womit die Standardtheorie nicht angewendet werden kann.
Betrachtet man das Problem im Raum $H_0^1(\Omega, d_M^\varepsilon)$, dann ist die Bilinearform $H_0^1(\Omega, d_M^\varepsilon)$-$H_0^1(\Omega, d_M^{-\varepsilon})$-elliptisch für $|\varepsilon| < 1$ und beispielsweise gilt für $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dass $g \in H^1(\Omega, d_M^\varepsilon)$. Das Problem besitzt also keine schwache Lösung im Raum $H^1(\Omega)$, aber ist im Raum $H^1(\Omega, d_M^{1/2})$ eindeutig lösbar.

5.2 Eine Modifikation der schwachen Lösbarkeit

In diesem Abschnitt wurde bisher die Lösungstheorie für klassische Randwertprobleme von den Sobolev-Räumen $H^1(\Omega)$ auf gewichtete Sobolev-Räume $H^1(\Omega, s(d_M))$ erweitert. Die Anwendung gewichteter Sobolev-Räume macht es notwendig, Gewichtsfunktionen in die Bilinearform $a(u,v)$ einzufügen. In dem bisherigen Ansatz geschieht dies, indem man zwei verschiedene gewichtete Räume betrachtet, deren Gewichtsfunktionen multipliziert Eins ergeben.
Im Folgenden soll hingegen das Konzept der schwachen Lösung leicht abgeändert werden, um dann in weiterer Folge das klassische Lax-Milgram-Lemma anwenden zu können.

Betrachtet man das Problem $Lu = f$ mit dem zu Beginn des Kapitels definierten Operator L. Multipliziert man nun mit einer Testfunktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und integriert über Ω, wobei man statt des Lebesgue-Maßes dx das Maß $d\mu = wdx$ verwendet, so erhält man

$$\int_\Omega Luvwdx = \int_\Omega fvwdx$$

und mittels Gauß'schem Integralsatz

$$a(u, vw) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u D^\alpha (vw) dx = \int_\Omega fvwdx.$$

Dieser Ansatz motiviert die folgende Definition.

Definition 5.8. Sei L der in (25) definierte klassische elliptische Operator und sei weiters $w \in C^1(\Omega)$ eine Gewichtsfunktion. Dann sei die Bilinearform $a_w(u,v)$ gegeben durch

$$a_w(u,v) := a(u,vw) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u D^\alpha (vw) dx.$$

Seien weiters eine Funktion $g \in H^1(\Omega,w)$ und ein Funktional $F \in H_0^1(\Omega,w)'$ gegeben. Dann heißt eine Funktion $u \in H^1(\Omega,w)$ w-schwache Lösung des Dirichlet-Problems für den Operator L, wenn gilt

1. $u - g \in H_0^1(\Omega,w)$
2. $a_w(u,v) = \langle F, v\rangle$, für alle $v \in H_0^1(\Omega,w)$.

Bemerkung 5.9.

- Das Konzept der w-schwachen Lösung ist eine natürliche Verallgemeinerung der schwachen Lösbarkeit, da man für die Wahl $w(x) \equiv 1$ gerade das Konzept der schwachen Lösung erhält.
- Da a_w auf $H^1(\Omega,w) \times H^1(\Omega,w)$ definiert ist, genügt es, das klassische Lax-Milgram-Lemma anzuwenden.
- Die Änderungen im Konzept der w-schwachen Lösung kann als Abänderung der Gleichung angesehen werden. Verallgemeinert die schwache Lösung die Lösung der Gleichung $Lu = f$, so verallgemeinert die w-schwache Lösung die Gleichung $wLu = f$. Da aber w fast überall positiv ist, ist die Änderung in der Gleichung nicht substantiell.

Um einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für w-schwache Lösungen beweisen zu können, benötigt man noch, dass die Gewichtsfunktion die Bedingung

$$|\nabla w|(x) \leq C_1 w(x) \tag{29}$$

für fast alle $x \in \Omega$ erfüllt. Beispielsweise gilt dies für die Funktion $w(x) = \exp(\varepsilon d_M(x))$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Die Koerzivität und Beschränktheit der Bilinearform a_w erhält man ähnlich zu Abschnitt 5.1, weswegen nicht allzu sehr ins Detail gegangen wird.

Satz 5.10. Seien $g \in H^1(\Omega,w)$ und $F \in H_0^1(\Omega,w)'$ sowie die zusätzliche Bedingung (29) mit einer hinreichend kleinen Konstante C_1 erfüllt, dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega, s(d_M))$ des Dirichlet-Problems für den Operator L und es gilt folgende a-priori Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(\Omega,w)} \leq C^* \left(\|g\|_{H^1(\Omega,w)} + \|F\|_{H_0^1(\Omega,w)'} \right).$$ [19]

Beweis: Klarerweise gilt wegen der Zusatzbedingung (29)

[19] vgl. [KufSän] Kapitel 40.6 und Kapitel 40.8

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)D^\beta u D^\alpha(vw)dx &= \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)D^\beta uw^{1/2}(D^\alpha v)w^{1/2}dx + \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)D^\beta uv(D^\alpha w)dx \\
&\leq \|a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\left\|D^\beta u\right\|_{L^2(\Omega,w)} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega,w)} + C_1 \int_\Omega (D^\beta u)vwdx \right) \\
&\leq \|a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} (1+C_1) \|u\|_{H^1(\Omega,w)} \|v\|_{H^1(\Omega,w)},
\end{aligned}$$

woraus die Beschränktheit der Bilinearform a_w folgt.

Für die Koerzivität schreibt man die Form a_w zunächst folgendermaßen an:

$$a_w(u,u) = a(uw^{1/2}, uw^{1/2}) + J_w.$$

Die Integrale in J_w lassen sich analog zu obigem Beschränktheitsbeweis abschätzen, und man erhält somit

$$|J_w| \leq \tilde{C}\left(C_1 + \frac{1}{4}(C_1)^2\right) \|u\|_{H^1(\Omega,w)}$$

mit $\tilde{C} = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \|a_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)}$. Wegen der Koerzivität von a gilt

$$\begin{aligned}
a(uw^{1/2}, uw^{1/2}) &\geq \kappa \left\|uw^{1/2}\right\|^2_{H^1(\Omega)} = \kappa \int_\Omega u^2 w dx + \kappa \sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega \left(D^\alpha u w^{1/2} + \frac{1}{2} uw^{-1/2} D^\alpha w\right)^2 dx \\
&\geq \kappa \int_\Omega u^2 w dx + \kappa \sum_{|\alpha=1|} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 w - |u|\, D^\alpha u D^\alpha w dx
\end{aligned}$$

Die Integrale $\int_\Omega |u|\, D^\alpha u D^\alpha w dx$ können abermals analog zum Beschränktheitsbeweis abgeschätzt werden, und man erhält

$$a(uw^{1/2}, uw^{1/2}) \geq \kappa\,(1 - C_1 n) \|u\|_{H^1(\Omega,w)}.$$

Insgesamt ergibt sich somit

$$a_w(u,u) \geq a(uw^{1/2}, uw^{1/2}) - |J_w| \geq (\kappa - C_1(\tilde{C} + C_1 n) - \frac{1}{4}\tilde{C}C_1^2) \|u\|_{H^1(\Omega,w)},$$

womit die Koerzivität gezeigt ist, sofern C_1 klein genug ist.

Die restlichen Aussagen liefert das Lemma von Lax-Milgram analog zu Satz 4.3. □

Bemerkung 5.11.

- In der Konstante in obiger Koerzivitätsabschätzung kann durch geschickteres Abschätzen $n = 1$ gesetzt werden, Details hierzu finden sich in [KufSän].
- Statt der Bedingung (29) kann man auch die nachfolgende Bedingung fordern.
  Es existiert eine Gewichtsfunktion w_0 und zwei Konstanten $C_2, C_3 > 0$, sodass

  $$\|u\|_{L^2(\Omega,w_0)} \leq C_2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega,w)}$$

  für alle $u \in H_0^1(\Omega, w)$ sowie

  $$|\nabla w(x)|\, w^{-1}(x) \leq C_3^2 w_0(x)$$

  für fast alle $x \in \Omega$ erfüllt ist. Details finden sich abermals in [KufSän].

  Beispielsweise erfüllen Gewichte der Gestalt $w(x) = d_M(x)^\varepsilon$ diese Bedingung.

6 Weitere Resultate

6.1 Modifizierte Definition der gewichteten Sobolev-Räume

Treten bei den in Kapitel 4 vorgestellten Problemen Koeffizientenfunktionen auf, für die $w_\alpha \notin L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ oder $w_\alpha^{-1} \notin L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt, so kann man den formalen Ansatz zur Definition der gewichteten Sobolev-Räume aus Kapitel 3 nicht verwendet werden, da a-priori nicht klar ist, ob die Räume $H^k(\Omega, \mathbf{w})$ und $H^k_0(\Omega, \mathbf{w})$ Hilbert-Räume sind.
In diesem Abschnitt wird versucht, die Definition der gewichteten Sobolev-Räume so zu modifizieren, dass diese Probleme auch für derartige Koeffizientenfunktionen nicht auftreten.
Sei nun angenommen, dass die Bedingung $w^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ nicht erfüllt ist. Dann kann man eine Menge

$$M(w) = \left\{ x \in \Omega : \int_{\Omega \cap U} w^{-1}(y)dy = \infty, \ \ \forall U \in \mathcal{U}(x) \right\}$$

definieren.

Lemma 6.1. Sei $w \in W(\Omega)$, $w^{-1} \notin L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, dann gilt

1. $w^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega \backslash M(w))$.
2. $M(w)$ ist eine nichtleere abgeschlossene Menge.
3. Ist w stetig, dann hat $M(w)$ Maß Null.[20]

Beweis:

1. Sei $K \subset \Omega \backslash M(w)$ kompakt.
   Für $x \in \Omega \backslash M(w)$ gilt gemäß Definition, da die offenen Kugeln eine Umgebungsbasis bilden, dass eine offene Kugel $B(x, \varepsilon)$ existiert mit
   $$\int_{B(x,\varepsilon)} w^{-1}(y)dy < \infty.$$
   Da $\bigcup_{x \in \Omega \backslash M(w)} B(x, \varepsilon)$ eine offene Überdeckung von K ist, gilt wegen der Kompaktheit von K bereits $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon) \supseteq K$ und damit, da w^{-1} fast überall positiv ist, dann
   $$\int_K w^{-1}(y)dy \leq \sum_{i=1}^n \int_{B(x_i,\varepsilon)} w^{-1}(y)dy < \infty$$
   und somit, da K beliebig war, schließlich $w^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega \backslash M(w))$.
2. Wäre $M(w)$ leer, so gelte nach Punkt 1 $w^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, was ein Widerspruch zu den Voraussetzungen an w ist.
   Um nun zu zeigen, dass $M(w)$ abgeschlossen ist, wird in weiterer Folge gezeigt, dass mit jedem Punkt aus $\Omega \backslash M(w)$ bereits eine offene Umgebung um den Punkt in $\Omega \backslash M(w)$ liegt.
   Sei also $x \in \Omega \backslash M(w)$ und $B(x, \varepsilon)$ wie in Punkt 1. Nun gilt für $z \in B(x, \varepsilon)$
   $$\int_{B(z,\delta)} w^{-1}(y)dy \leq \int_{B(x,\varepsilon)} w^{-1}(y)dy < \infty$$

[20] vgl. [KufOp1] Lemma 3.2

für $\delta \leq \varepsilon - |x - z| > 0$ und daher $z \in \Omega \backslash M(w)$.
Somit ist $\Omega \backslash M(w)$ offen und damit $M(w)$ abgeschlossen.

3. Da w stetig ist, können zu $M(w)$ klarerweise nur jene Punkte gehören, an denen w verschwindet. Da w aber fast überall positiv ist, hat diese Menge Maß Null.

$\square$

Man bezeichnet nun weiter

$$\Omega_0 = \bigcup_{|\alpha|=1} M(w_\alpha). \tag{30}$$

Satz 3.3 und Bemerkung 3.4 implizieren, dass, sofern Ω_0 leer ist, die Räume $H^1(\Omega, \mathbf{w})$ Hilbert-Räume sind.

Dies und Lemma 6.1 sowie die Tatsache, dass $\Omega \backslash \Omega_0$ offen ist, legt nun folgende Definition nahe.

Definition 6.2. Sei Ω_0 definiert durch (30) und $w_\alpha \in W(\Omega)$, dann ist der gewichtete Sobolev-Raum $H^1(\Omega, \mathbf{w})$ definiert als der Raum

$$H^1(\Omega \backslash \Omega_0, \mathbf{w}),$$

wobei dieser Raum durch Definition 3.2 gegeben ist.

Man hätte Definition 6.2 auch als allgemeine Definition des gewichteten Sobolev-Raumes einführen können, da mit den Voraussetzung von Satz 3.3 klarerweise $\Omega_0 = \emptyset$ gilt. Allerdings ist obige Definition etwas unhandlich und für viele auftretende Anwendungen unnötig kompliziert.

Analog dazu kann man auch den gewichteten Sobolev-Raum $H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$ für $w \notin L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ einführen. Dazu definiert man analog zu oben die Ausnahmemenge

$$M_0(w) = \left\{ x \in \Omega : \int_{\Omega \cap U} w(y)dy = \infty, \ \ \forall U \in \mathcal{U}(x) \right\}.$$

Für diese Menge gelten klarerweise die selben Aussagen wie in Lemma 6.1.

Somit kann ähnlich zu oben der Raum $H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$ definiert werden.

Definition 6.3. Sei $\tilde{\Omega}_0$ gegeben durch

$$\tilde{\Omega}_0 = \bigcup_{|\alpha| \leq 1} M_0(w_\alpha),$$

dann ist der gewichtete Sobolev-Raum $H_0^1(\Omega, \mathbf{w})$ definiert als

$$H_0^1(\Omega, \mathbf{w}) = \overline{\{f : f = g|_{\Omega \backslash \Omega_0}, g \in C_0^\infty(\Omega \backslash \tilde{\Omega}_0)\}}.$$

Gilt für alle Gewichtsfunktionen $w_\alpha^{-1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, dann ist $H^1_0(\Omega, \mathbf{w}) = \overline{C_0^\infty(\Omega \backslash \tilde{\Omega}_0)}$.

Bemerkung 6.4.

- Mit dieser Modifikation in der Definition der gewichteten Sobolev-Räume kann die in dieser Arbeit präsentierte Theorie großteils analog übernommen werden.
- Lemma 6.1 zeigt, dass, falls die Gewichtsfunktionen stetig sind, Ω_0 und $\tilde{\Omega}_0$ als Teil des Randes von Ω betrachtet werden können.

6.2 Höhere Regularität

Eine allgemein gültige Theorie für höhere Regularität analog zur klassischen Lösungstheorie zu finden, kann bei Lösungen degenerierter und singulärer elliptischer partieller Differentialgleichungen klarerweise nicht gefunden werden, da man nicht ohne weiteres feststellen kann, wie die Gewichtsfunktionen zu Multiindices mit Betrag 2 aussehen sollen.
In diesem Abschnitt soll ein aktuelles Resultat zu diesem Thema für eine spezielle Problemklasse zitiert werden.

In weitere Folge werden nur Lösungen von Gleichungen $Lu = f$ betrachtet, wobei

$$Lu := -div(A(x)\nabla u)$$

und die Koeffizientenmatrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ symmetrisch ist. Weiters sollen die Funktionen a_{ij} messbar und reellwertig sein und

$$w(x)\,|\xi|^2 \leq \xi^T A(x)\xi \leq v(x)\,|\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ fast überall in Ω mit zwei Gewichtsfunktionen w, v gelten.

Definition 6.5.

1. Ein Paar von Gewichten (v, w) erfüllt die „Bedingung S_p" mit $1 < p < \infty$, wenn eine Konstante C (die S_p-Konstante) existiert, sodass

$$\int_B |M(\mu\chi_B)(x)|^p\, v(x)dx \leq C\mu(B) < \infty$$

für alle Kugeln B gilt, wobei $\mu(x) = w^{-1/p-1}(x)$ sowie $\mu(B) = \int_B \mu(x)dx$ und

$$M(f)(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\, dy$$

die Hardy-Littlewood-Maximalfunktion und $|B|$ das Volumen der Kugel bezeichnet.

2. Ein Paar von Gewichten (v, w) heißt gleichmäßig S_p in jeder Komponente, wenn $(v, w) \in S_p(\mathbb{R}^n)$ und $(v_i, w_i) \in S_p(\mathbb{R})$, wobei $v_i(t) := v(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ und die S_p-Konstanten von (v_i, w_i) unabhängig von $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ beschränkt sind.

Die obig definierten Gewichte stehen in engem Zusammenhang zu den A_p-Gewichten aus Beispiel 3.8. Erfüllt das Paar von Gewichten (v, w) die Bedingung S_p mit $p > 1$, so gilt auch

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B v dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-1/p-1} dx\right) < \infty$$

und, falls $w \leq v$, auch $w \in A_p$ und $v \in A_p$.

Satz 6.6. Sei $u \in H^1(\Omega, v)$ eine schwache Lösung der Gleichung $Lu = f$ und sei weiters angenommen, dass

1. $f/v \in L^2(\Omega, v)$.
2. Die beiden Gewichte (v, w) sind gleichmäßig S_2 in jeder Komponente.
3. $\left|\Delta_k^h a_{ij}(x)\right| = \left|\frac{a_{ij}(x+he_k)-a_{ij}(x)}{h}\right| \leq C_1 v(x)$, $x \in \Omega' \subset \Omega$ f.ü., $0 < |h| < dist(\Omega', \partial\Omega)$ mit einer Konstanten C_1, die nicht von h und Ω' abhängt.

Dann gilt für alle Teilgebiete $\Omega' \subset \Omega$, dass $u \in H^2(\Omega', v, v, w)$ (also $D^2 u \in L^2(\Omega', w)$) und

$$\|u\|_{H^2(\Omega',v,v,w)} \leq C(\|u\|_{H^1(\Omega,v)} + \|f/v\|_{L^2(\Omega,v)}),$$

wobei die Konstante C von $C_1, n, \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ und der S_2-Konstanten von (v, w) abhängt.

Beweis: Siehe [Cav] Theorem 3.9. □

Literatur

[Adams] *Sobolev Spaces*, Robert A. Adams, Academic Press Inc., 1975

[Beng] *Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces*, Bengt Ove Turesson, Springer, 2000

[Cav] *Regularity of Weak Solutions of Degenerate Eliptic [sic] Equations*, A.C.Cavalheiro, Acta Math. Univ. Comenianae, Volume LXXVII 1, 2008, pp. 43-54

[DraKuf] *Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities*, Pavel Drábek, Alois Kufner, Francesco Nicolosi, 1997

[Kuf] *Weighted Sobolev Spaces*, Alois Kufner, Teubner, 1980

[KufOp1] *How to define reasonably weighted Sobolev spaces*, Alois Kufner, Bohumir Opic, Comment. Math. Univ. Carolin. 25, 1984, pp. 537-554

[KufOp2] *Hardy-Type Inequalities*, Alois Kufner, Bohumir Opic, Longman Scientific & Technical, 1990

[KufSän] *Some Applications of Weighted Sobolev Spaces*, Alois Kufner, Margarete Sändig, Teubner, 1987

[KufOlFu] *Function spaces*, Alois Kufner, Oldrich John, Svatopluk Fucík, Kluwer, 1977

[MurSta] *Boundary value problems for some degenerate-elliptic operators*, M.K.V. Murthy, G. Stapacchia, Annali di Matematica pura ed applicata, Band 80, 1968, pp. 1-122

[Trie] *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, Hans Triebel, Barth, 1995