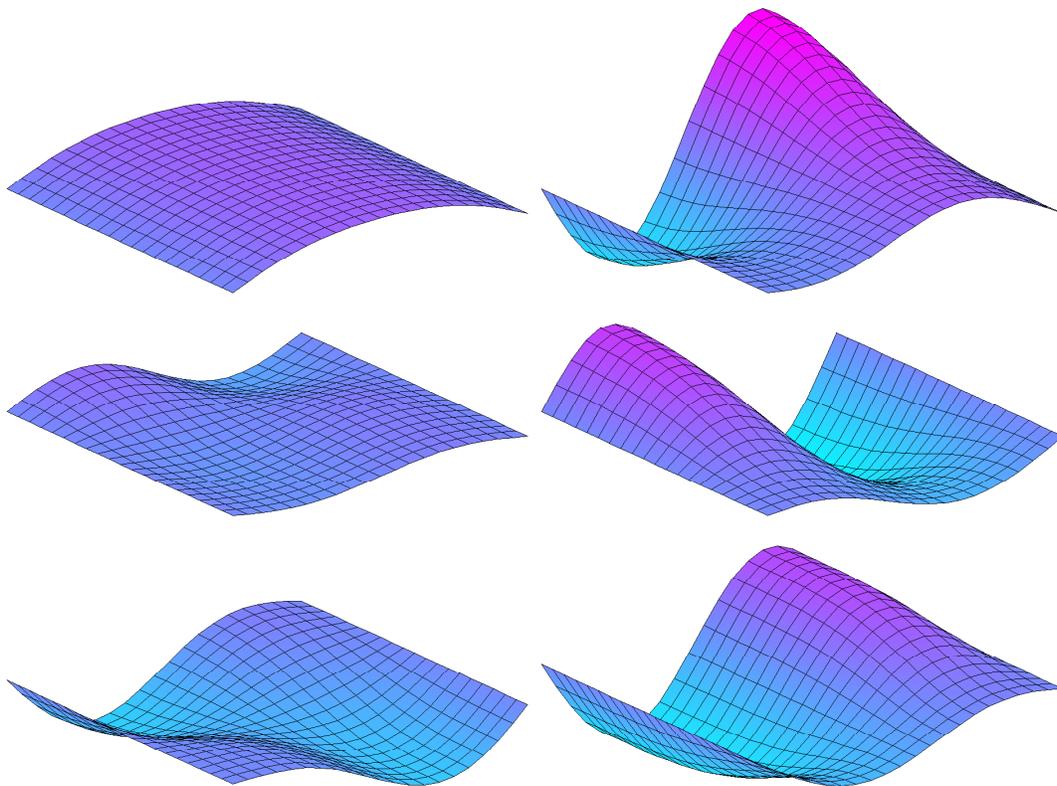


Partielle Differentialgleichungen

Vorlesungsmanuskript

Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel
Institut für Analysis und Scientific Computing



Dieses Manuskript basiert in weiten Teilen auf dem Skriptum “Partielle Differentialgleichungen” von Christian Schmeiser und zum Teil auf dem Buch “Partial Differential Equations” von L. Evans.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Was ist eine partielle Differentialgleichung?	4
1.2	Einige Definitionen und Resultate aus der Analysis	6
1.3	Wärmeleitung	11
1.4	Wellen	14
1.5	Transport	17
2	Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung	21
2.1	Quasilineare Gleichungen erster Ordnung	21
2.2	Klassifikation partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung	27
3	Distributionen	31
3.1	Definitionen	31
3.2	Eigenschaften	36
3.3	Fundamentallösungen	40
4	Die Poisson-Gleichung	44
4.1	Fundamentallösung und Greensche Funktion	44
4.2	Greensche Funktionen für die Halbebene und für Kugeln	50
4.3	Maximumprinzip	57
5	Elliptische Gleichungen	60
5.1	Motivation	60
5.2	Sobolevräume	62
5.3	Existenz schwacher Lösungen	70
5.4	Regularität	78
5.5	Maximumprinzip	80
6	Parabolische Gleichungen	86
6.1	Fourier-Transformation und Wärmeleitungsgleichung	86
6.2	Symmetrische und kompakte Operatoren	89
6.3	Existenz von Lösungen homogener Probleme	93
6.4	Existenz von Lösungen inhomogener Probleme	99
6.5	Regularität und Langzeitverhalten	101
6.6	Galerkin-Methode	106
6.7	Maximumprinzip	113

7	Hyperbolische Gleichungen	117
7.1	Die Wellengleichung im \mathbb{R}^n	117
7.2	Existenz von Lösungen	120
7.3	Energieintegral und Regularität	124
8	Ergänzungen	130
8.1	Die Ritz-Galerkin-Methode	130
8.2	Eine Konsequenz aus dem Maximumprinzip für elliptische Gleichungen .	133
8.3	Konsequenzen aus dem Maximumprinzip für parabolische Gleichungen .	134
8.4	Inverse der Fourier-Transformation	136
8.5	Dispersion und Schrödinger-Gleichung	138
8.6	Maschinelernen und partielle Differentialgleichungen	139
9	Fragen zum Selbsttest	142

1 Einleitung

1.1 Was ist eine partielle Differentialgleichung?

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion in mehreren Variablen und ihren partiellen Ableitungen. Im Gegensatz zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung treten also *partielle Ableitungen* auf. Schreiben wir die partiellen Ableitungen einer Funktion $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ abkürzend als

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{etc.},$$

so hat eine partielle Differentialgleichung die Struktur

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_n x_n}, \dots) = 0.$$

Mit Hilfe von Multiindizes kann diese Gleichung kompakter geschrieben werden. Dazu definieren wir einen *Multiindex* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ (\mathbb{N}_0 repräsentiert die natürlichen Zahlen einschließlich null) und den *Grad* von α : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Ferner sei

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}.$$

Die Größe $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})^T$ ist der *Gradient* von u , $D^2 u$ ist die *Hesse-Matrix* von u . Wir können nun die obige Gleichung schreiben als

$$F(x, u(x), Du(x), \dots, D^k u(x)) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (1.1)$$

Enthält die Gleichung partielle Ableitungen bis zur Ordnung k , so nennen wir sie eine partielle Differentialgleichung der Ordnung k . Wir nennen eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Lösung* von (1.1), wenn u k -mal differenzierbar ist und (1.1) für alle $x \in \Omega$ löst.

Definition 1.1. (i) Die partielle Differentialgleichung (1.1) heißt *linear*, wenn sie die folgende Form besitzt:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x),$$

wobei c_α und f gegebene Funktionen sind. Falls $f = 0$, so heißt die Differentialgleichung *homogen*, anderenfalls *inhomogen*.

(ii) Die Differentialgleichung (1.1) heißt *semilinear*, wenn sie die Gestalt

$$\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha(x) D^\alpha u(x) + G(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1} u(x)) = 0$$

besitzt. Mit anderen Worten: Die Gleichung ist linear bezüglich den Termen mit den höchsten partiellen Ableitungen, aber u.U. nichtlinear in allen anderen Termen.

(iii) Die Differentialgleichung (1.1) heißt *quasilinear*, wenn sie die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1}u(x)) D^\alpha u(x) + G(x, u(x), Du(x), \dots, D^{k-1}u(x)) = 0$$

besitzt.

(iv) Die Differentialgleichung (1.1) heißt *voll nichtlinear*, wenn sie nichtlinear von den höchsten partiellen Ableitungen abhängt.

In diesem Manuskript betrachten wir im Wesentlichen nur lineare partielle Differentialgleichungen. Typische Beispiele linearer partieller Differentialgleichungen sind

- ▶ die Poisson-Gleichung:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x);$$

- ▶ die Wärmeleitungsgleichung:

$$u_t - \Delta u = f(x);$$

- ▶ die Wellengleichung:

$$u_{tt} - \Delta u = f(x).$$

Welche Fragen sind bei der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen von Bedeutung?

- ▶ **Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung:** Partielle Differentialgleichungen sind im Allgemeinen Modelle von Vorgängen aus den Natur- oder Sozialwissenschaften. In diesem Fall weist die Nichtexistenz einer Lösung häufig auf ein Problem der Modellierung hin. Wir können die Eindeutigkeit von Lösungen nur erwarten, wenn noch zusätzliche Nebenbedingungen an die Lösung gegeben sind, nämlich Anfangs- und Randbedingungen oder Bedingungen für das Verhalten der Lösung im Unendlichen (falls das Gebiet unbeschränkt ist). Außerdem erwarten wir, dass kleine Änderungen in den Daten nur kleine Änderungen in der Lösung verursachen. Wir sagen in diesem Fall, dass die Lösung *stetig von den Daten abhängt*.
- ▶ **Schwache Lösungen und Regularität:** Wir können nicht in allen Fällen (stetig) differenzierbare Lösungen erwarten. Betrachte etwa die Differentialgleichung $u_{xx} = f(x)$ für eine unstetige, aber integrierbare Funktion f . Falls u eine Lösung ist, kann u_{xx} nicht stetig sein. Jedoch besitzt u eine integrierbare zweite Ableitung. In einigen Fällen wird die Differentialgleichung nicht einmal differenzierbare Lösungen besitzen. In diesen Fällen sprechen wir von *schwachen Lösungen* (wir definieren sie später präzise). Häufig ist man bestrebt, falls möglich, die Regularität solcher Lösungen zu beweisen.

- **Qualitatives Lösungsverhalten:** In den wenigsten Fällen stehen explizite Lösungsformeln für partielle Differentialgleichungen bereit. Dennoch ist es von Interesse zu verstehen, wie sich die Lösungen verhalten, etwa im Unendlichen (wenn das Lösungsgebiet unbeschränkt ist) oder für große Zeiten (wenn die Lösung von der Zeit abhängt). Diese Informationen sind auch für numerische Verfahren von Bedeutung, da sie erlauben, numerisch berechnete Lösungen zu überprüfen.

1.2 Einige Definitionen und Resultate aus der Analysis

Bevor wir Beispiele partieller Differentialgleichungen genauer untersuchen und eine Theorie partieller Differentialgleichungen entwickeln können, wiederholen wir einige Definitionen und wichtige Ergebnisse aus der Analysis, die im Folgenden verwendet werden.

- **Funktionen und Funktionenräume.** Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion (d.h. $u \in C^2(\Omega)$) und $v = (v_1, \dots, v_n)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige stetig differenzierbare Funktion (d.h. $v \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$). Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} \text{Laplace-Operator: } \Delta u &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \\ \text{Divergenz: } \operatorname{div} v &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Der Raum $C^k(\overline{\Omega})$ für beschränkte Mengen Ω ist der Raum aller k -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\overline{\Omega}$. Die Norm auf $C^k(\overline{\Omega})$ ist definiert durch

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|.$$

Damit ist $C^k(\overline{\Omega})$ ein Banachraum. Ferner definieren wir

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Dieser Raum ist kein Banachraum, aber er ist lokal konvex. Der Träger (engl.: support) einer Funktion f ist definiert durch

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}},$$

und wir setzen

$$C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) : \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt in } \Omega\}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

Wir benötigen auch Räume von Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Eine einfache Definition ist

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} : \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\},$$

wobei $1 \leq p < \infty$, und

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

die Norm von $L^p(\Omega)$ ist. Diese Definition ist nicht ganz korrekt, da sie außer acht lässt, dass Funktionen, die bis auf eine Nullmenge übereinstimmen, miteinander identifiziert werden. Eine präzisere, aber abstraktere Definition ist wie folgt: Der Raum $L^p(\Omega)$ ist definiert durch die Vervollständigung des Raums $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$. Für $p = \infty$ definieren wir

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{K \geq 0 : |f(x)| \leq K \text{ für fast alle } x \in \Omega\}$$

und führen entsprechend den Raum $L^\infty(\Omega)$ aller (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen f mit $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$ ein. Der Raum $L^p(\Omega)$ ist für alle $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum. Falls $p = 2$, so ist $L^2(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

ein Hilbertraum.

• **Satz von Gauß.** Bevor wir den Satz von Gauß im \mathbb{R}^n formulieren können, benötigen wir den Begriff "glatter" Ränder. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir bezeichnen mit $B_r(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ die (n -dimensionale) Kugel um x mit Radius r , $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$.

Definition 1.2. Wir sagen, dass $\partial\Omega \in C^k$, wenn für alle $x^* \in \partial\Omega$ ein $r > 0$ und eine k -mal stetig differenzierbare Funktion g existieren, so dass – bis auf eventuelle Umbenennung der Variablen – gilt:

$$\Omega \cap B_r(x^*) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in B_r(x^*) : x_n < g(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Mit anderen Worten: Der Rand $\partial\Omega$ ist von der Klasse C^k , wenn er lokal durch eine C^k -Funktion dargestellt werden kann (siehe Abbildung 1.1):

$$\partial\Omega \cap B_r(x^*) = \{x \in B_r(x^*) : x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Beispielsweise besitzt eine Kugel im \mathbb{R}^3 einen C^∞ -Rand, während ein Dreieck im \mathbb{R}^2 nur einen C^0 -Rand hat. Die Gebiete in Abbildung 1.2 links und Mitte haben keinen C^1 -Rand.

Sei Ω eine offene Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und $x^* \in \partial\Omega$. Dann kann $\partial\Omega$ lokal um x^* durch eine Funktion $g(x_1, \dots, x_{n-1})$ beschrieben werden, deren erste partielle Ableitungen

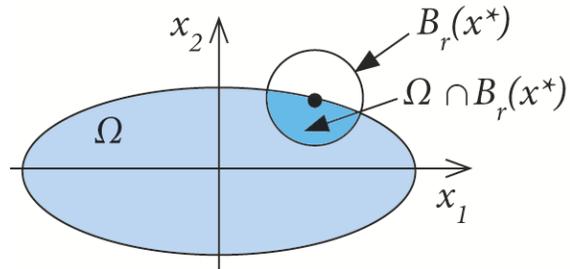


Abbildung 1.1: Illustration für die Definition eines glatten Randes im \mathbb{R}^2 .

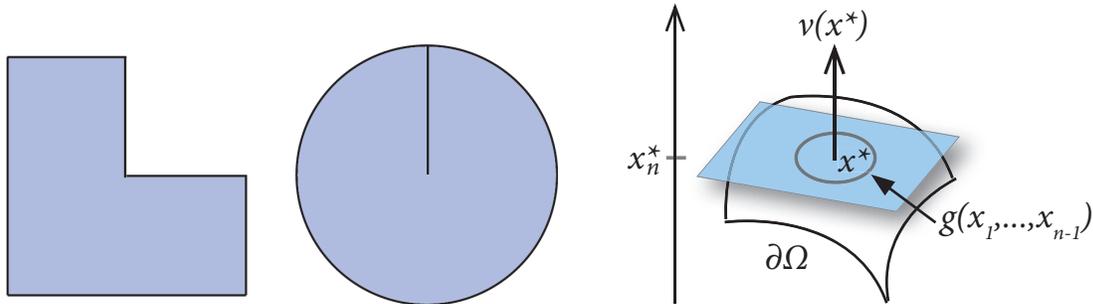


Abbildung 1.2: Links: Das L-förmige Gebiet hat einen C^0 -Rand, aber keinem C^1 -Rand. Der Rand der geschlitzten Kreisscheibe erfüllt die Definition 1.2 nicht. Rechts: Äußerer Normalenvektor $v(x^*)$ an $x^* \in \partial\Omega$, der senkrecht auf der blau markierten Tangentialebene an x^* steht.

stetig sind. Folglich existiert die Tangentialebene des Graphen von g an x^* , und es ist möglich, einen Vektor $v(x^*)$ zu konstruieren, der senkrecht auf dieser Tangentialebene steht, die Länge eins hat und in Richtung der Menge $\{x_n > g(x_1, \dots, x_{n-1})\}$ weist. Wir nennen den Vektor $v(x^*)$ den *äußeren Normaleneinheitsvektor* an $x^* \in \partial\Omega$; siehe Abbildung 1.2 rechts.

Definition 1.3. Seien $\partial\Omega \in C^1$ mit (äußeren) Normaleneinheitsvektor v und $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann nennen wir

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x) \cdot v(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

die (äußere) *Normalenableitung* von f an x . Sie ist stetig auf $\partial\Omega$.

Beispiel 1.4. Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist $v = (x, y, z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ mit $\theta \in [0, \pi)$ und $\phi \in [0, 2\pi)$ der äußere Normaleneinheitsvektor (siehe Abbildung 1.3). Die Normalenableitung der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ lautet

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2,$$

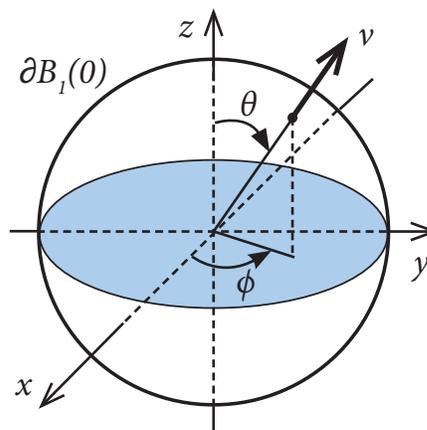


Abbildung 1.3: Äußerer Normalenvektor an der Kugeloberfläche und Kugelkoordinaten.

denn $v = (x, y, z) \in \partial B_1(0)$. □

Der Integralsatz von Gauß verallgemeinert die partielle Integration auf mehrere Dimensionen.

Theorem 1.5 (Gauß). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und äußerem Normaleneinheitsvektor v , definiert auf $\partial\Omega$. Ferner sei $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ eine vektorwertige Funktion, so dass $\operatorname{div}F$ integrierbar auf Ω ist. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot v ds.$$

Hierbei bezeichnet das Integral auf der rechten Seite das Oberflächenintegral auf $\partial\Omega$. Man nennt F auch ein *Vektorfeld*. Der Satz von Gauß bleibt gültig, wenn $\partial\Omega$ die disjunkte Vereinigung von endlich vielen C^1 -Flächenstücken ist.

Es gelten die Voraussetzungen des Satzes von Gauß, und es sei $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ergibt die Produktregel $\operatorname{div}(uF) = \nabla u \cdot F + u \operatorname{div}F$ und damit

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div}F dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot F dx + \int_{\partial\Omega} u(F \cdot v) ds.$$

Dies ist das mehrdimensionale Analogon der partiellen Integration.

Beispiel 1.6. Seien $\Omega = B_R(0)$, $R > 0$, und $F(x, y, z) = (x, y, z)^T$ mit $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $\operatorname{div} F(x, y, z) = 3$. Wir berechnen das Volumenintegral von $\operatorname{div} F$ über $B_R(0)$, indem wir Kugelkoordinaten verwenden. Die Transformationsabbildung $S(r, \theta, \phi) = (x, y, z)$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\omega, \quad \text{wobei } \omega = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

sowie $0 < r < R$, $0 \leq \theta < \pi$ und $0 \leq \phi < 2\pi$. Das Volumenelement $dx dy dz$ lautet in Kugelkoordinaten $|\det DS| dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$. Damit erhalten wir

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R 3r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 2\pi \int_0^R 3r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 4\pi R^3.$$

Die Normalkomponente von F berechnet sich auf $\partial\Omega$ zu

$$F \cdot \nu = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = R \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + R \cos^2 \theta = R.$$

Daher lautet das Oberflächenintegral von $F \cdot \nu$:

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \cdot 2 \cdot R^3 = 4\pi R^3,$$

in Übereinstimmung mit dem Satz von Gauß. □

- **Integration.** Wir wiederholen einige Sätze aus der Integrationstheorie.

Theorem 1.7 (Ungleichungen). Seien $f, g \in L^2(\Omega)$. Dann gilt die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\Omega} f g dx \leq \sqrt{\int_{\Omega} f^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} g^2 dx} = \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Sind $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ und $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ gegeben, so gilt die *Hölder-Ungleichung*

$$\int_{\Omega} f g dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Lemma 1.8. Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Gilt

$$\int_{\omega} f(x) dx = 0 \quad \text{für alle offenen Mengen } \omega \subset \Omega,$$

so folgt $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$.

Lemma 1.9. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar (d.h. auf jeder kompakten Menge integrierbar), und es gelte

$$\int_{\Omega} f \phi dx = 0 \quad \text{für alle } \phi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

so folgt $f(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$.

1.3 Wärmeleitung

Es sei ein inhomogenes Medium im beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir wollen eine Gleichung für die zeitliche Entwicklung der Temperatur $T(x, t)$ des Mediums am Ort $x \in \Omega$ zur Zeit $t > 0$ bestimmen. Wir nehmen an, dass T eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist. Sei $U \subset \Omega$ mit $\partial U \in C^1$. Nach dem Erhaltungssatz der Wärmeenergie (der letztlich die Erhaltung der Energie ausdrückt) gilt (siehe Abbildung 1.4):

$$\text{Wärmezuwachs in } U = \text{in } U \text{ erzeugte Wärme} - \text{Wärmefluss durch } \partial U. \quad (1.2)$$

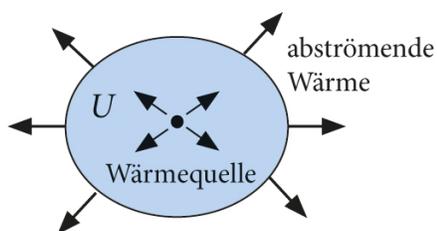


Abbildung 1.4: Links: Illustration der in U erzeugten Wärme und des Wärmeflusses durch ∂U . Rechts: Wärmeleitung in einem Lagerfeuer (Quelle: Luke Porter on Unsplash).

Die Wärmeenergie in U zum Zeitpunkt t ist gegeben durch das räumliche Integral über die Temperatur, multipliziert mit einer materialabhängigen Konstante, der spezifischen Wärme C :

$$\int_U CT(x, t) dx.$$

Die spezifische Wärme C , die i.A. eine Funktion von x ist, gibt die Wärmeenergie an, die notwendig ist, um ein Einheitsvolumen um eine Temperatureinheit zu erwärmen. Der Wärmezuwachs ist dann gegeben durch die Ableitung nach der Zeit:

$$\text{Wärmezuwachs in } U = \frac{d}{dt} \int_U CT(x, t) dx = \int_U CT_t dx.$$

Die in U erzeugte Wärme sei durch eine Wärmequelle mit Dichtefunktion $f(x, t)$ gegeben, d.h.

$$\text{in } U \text{ erzeugte Wärme} = \int_U f(x, t) dx.$$

Schließlich ist die Wärme, die durch ∂U fließt, proportional zur Normalkomponente des negativen Temperaturgradienten und zur Oberfläche ∂U . Die Proportionalitätskonstante ist die *thermische Leitfähigkeit* κ , die i.a. vom Ort x abhängt. Damit ist

$$\text{Wärmefluss durch } \partial U = - \int_{\partial U} \kappa \nabla T \cdot \nu ds.$$

Man nennt übrigens $-\kappa \nabla T \cdot \nu$ den *Wärmefluss*. Auf dieses Integral können wir den Integralsatz von Gauß anwenden und erhalten:

$$\text{Wärmefluss durch } \partial U = - \int_U \text{div}(\kappa \nabla T) dx.$$

Der Erhaltungssatz (1.2) ergibt dann

$$\int_U CT_t dx = \int_U f dx + \int_U \text{div}(\kappa \nabla T) dx$$

oder

$$\int_U (CT_t - \text{div}(\kappa \nabla T) - f) dx = 0.$$

Diese Gleichung gilt für alle U . Nach Lemma 1.8 folgt

$$CT_t = \text{div}(\kappa \nabla T) + f, \quad x \in \Omega, t > 0. \quad (1.3)$$

Wenn das Medium homogen ist, d.h., C und κ sind konstant in Ω , so erhalten wir

$$T_t = D \Delta T + g, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (1.4)$$

wobei $D = \kappa/C$ und $g = f/C$. Wir nennen D die thermische Diffusivität und (1.3) oder (1.4) die *Wärmeleitungsgleichung*. Sie ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in vier Variablen (drei Ortsvariablen und Zeit).

Abbildung 1.5 illustriert die Lösung $T(x, t)$ zu verschiedenen Zeiten, wobei $f = 0$. Die Temperatur diffundiert durch das Gebiet und nimmt im Ursprung rasch ab.

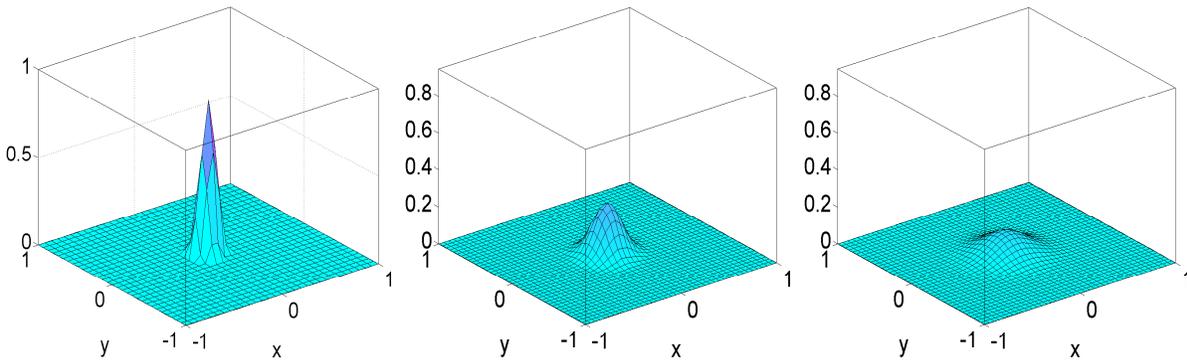


Abbildung 1.5: Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zu den Zeitpunkten $t = 0$ (links), $t = 0.5$ (Mitte) und $t = 2$ (rechts).

Wir erwarten, dass sich für große Zeiten $t \rightarrow \infty$ eine stationäre, d.h. zeitunabhängige Temperaturverteilung einstellt. Dann sollte für $t \rightarrow \infty$ die Temperatur über die stationäre Wärmeleitungsgleichung

$$-\operatorname{div}(\kappa \nabla T) = f, \quad x \in \Omega,$$

berechnet werden. Im Spezialfall eines homogenen Mediums erhalten wir

$$-\Delta T = f/\kappa, \quad x \in \Omega.$$

Wir definieren:

Definition 1.10. Die Gleichung $\Delta u = f$ wird *Poisson-Gleichung* genannt. Falls $f = 0$, heißt sie *Laplace-Gleichung*. Eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Laplace-Gleichung wird *harmonisch* genannt.

Die Wärmeleitungsgleichung allein genügt nicht, um die Temperaturverteilung vollständig zu bestimmen bzw. um eine eindeutige Lösung zu finden. Wir müssen die Temperatur zur Zeit $t = 0$ angeben und die Interaktion des Mediums mit der Umgebung beschreiben. Letzteres bedeutet, dass wir angeben müssen, wie sich die Temperatur am Rand des Mediums verhält. Zur Zeit $t = 0$ stellen wir die *Anfangsbedingung*

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Die Interaktion wird durch *Randbedingungen* festgelegt. Üblicherweise werden drei Typen von Randbedingungen unterschieden:

- ▶ *Dirichlet-Bedingung*: $T = T_D$ auf $\partial\Omega$;
- ▶ *Neumann-Bedingung*: $-\kappa \nabla T \cdot \nu = h_1$ auf $\partial\Omega$;
- ▶ *Robin-Bedingung*: $-\kappa \nabla T \cdot \nu = \alpha T + h_2$ auf $\partial\Omega$.

Bei einer Dirichlet-Randbedingung wird die Temperatur auf dem Rand vorgeschrieben. In Abbildung 1.5 beispielsweise ist eine Dirichlet-Bedingung mit $T_D = 0$ gewählt

worden. Die Neumann-Randbedingung legt den Wärmefluss, der $\partial\Omega$ verlässt, fest. Falls der Wärmefluss verschwinden soll, $-\kappa\nabla T \cdot \nu = 0$, so sprechen wir von einer *homogenen* Randbedingung. Sie bedeutet, dass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet, der Rand also isolierend wirkt. Die Robin-Bedingung ist leichter zu interpretieren, wenn wir $h_2 = -\alpha T_1$ für eine Zahl $T_1 \in \mathbb{R}$ setzen. Dann folgt

$$-\kappa\nabla T \cdot \nu = \alpha(T - T_1) \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dies bedeutet, dass der Wärmefluss durch $\partial\Omega$ proportional zur Temperaturdifferenz $T - T_1$ ist. Im Falle $\alpha = 0$ erhalten wir einen isolierenden Rand (homogene Neumann-Randbedingung), im Grenzfall $\alpha \rightarrow \infty$ die Dirichlet-Randbedingung $T = T_1$, d.h., die Temperatur auf dem Rand ist gleich einer vorgegebenen Temperatur (häufig die Umgebungstemperatur).

1.4 Wellen

Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung einer partiellen Differentialgleichung, die die zeitliche und räumliche Entwicklung der Auslenkung einer schwingenden Saite beschreibt. Um die Herleitung zu vereinfachen, machen wir folgende Voraussetzungen:

- ▶ Die Schwingungen verlaufen in der Ebene und sind transversal (d.h. senkrecht zur eingespannten Saite).
- ▶ Die Saite ist homogen, d.h., die Massendichte ρ ist konstant.
- ▶ Die Auslenkungen der Saite sind klein.

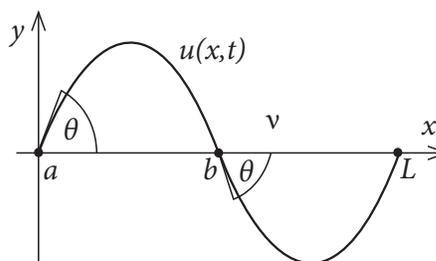
Mit diesen Annahmen können wir ein (x, y) -Koordinatensystem einführen, so dass die Saite an den Punkten $x = 0$ und $x = L$ auf der x -Achse eingespannt ist. Die Teilchen der Saite bewegen sich nur in y -Richtung; sei $u(x, t)$ die Auslenkung der Saite in y -Richtung im Punkt x zur Zeit t . Wir nehmen an, dass u zweimal stetig differenzierbar ist. Die Saite setzt einer Dehnung Widerstand entgegen. Die Größe dieser Kraft heißt die Spannung der Saite; wir bezeichnen sie mit $T(x, t)$. Die Komponenten der Spannungskräfte, die auf einen Abschnitt $[a, b]$ der Saite wirken, lauten $T(b, t) \sin \theta(b, t)$ bzw. $-T(a, t) \sin \theta(a, t)$, wobei $\theta(x, t)$ der Winkel zwischen der Saite und der x -Achse im Punkt x ist (siehe Abbildung 1.6). Der Betrag der Spannungskraft ist minimal, wenn $\theta = 0$, und maximal, wenn $\theta = \pi/2 = 90^\circ$. Die Summe der Kräfte an den Endpunkten $x = a$ und $x = b$ lautet

$$\text{Spannungskraft} = T(b, t) \sin \theta(b, t) - T(a, t) \sin \theta(a, t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (T \sin \theta) dx. \quad (1.5)$$

Nach dem Newtonschen Bewegungsgesetz ist diese Kraft gleich dem Produkt aus der Masse $\rho \cdot (b - a)$ des Saitenabschnitts und der Beschleunigung,

$$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \rho(b - a) \cdot \frac{1}{b - a} \int_a^b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx. \quad (1.6)$$

Abbildung 1.6: An den Punkten $x = 0$ und $x = L$ eingespannte Saite mit Auslenkung $u(x, t)$.



(Für die Beschleunigung im Saitenabschnitt haben wir den Mittelwert $\int_a^b u_{tt} dx / (b - a)$ verwendet; dies kann genauer begründet werden, indem man die Bewegung des Schwerpunkts des Saitenabschnitts $(a + b)/2$ untersucht.) Setzen wir (1.5) und (1.6) gleich, erhalten wir

$$\int_a^b (\rho u_{tt} - (T \sin \theta)_x) dx = 0.$$

Da a und b beliebig gewählt werden können, folgt aus Lemma 1.8 die Differentialgleichung.

$$\rho u_{tt} = (T \sin \theta)_x, \quad x \in (0, L), \quad t > 0.$$

Wir können den Winkel θ durch die Auslenkung u ausdrücken, indem wir beobachten, dass $\tan \theta = du/dx = u_x$ (siehe Abbildung 1.7 links) und daher

$$\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} = \sin \theta.$$

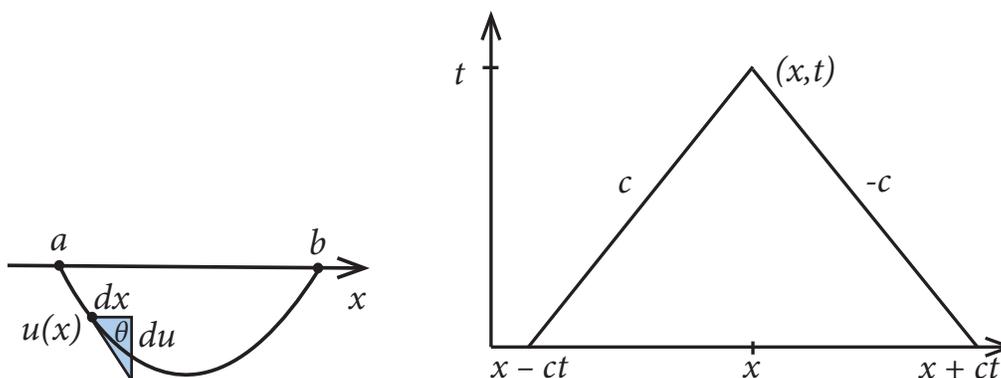


Abbildung 1.7: Links: Geometrie der Saite und Auslenkung $u(x)$ im Punkt x . Rechts: Charakteristiken $x - ct$ und $x + ct$ der Wellengleichung.

Damit folgt die nichtlineare Differentialgleichung

$$\rho u_{tt} = \left(\frac{T u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right)_x.$$

Mit der dritten Annahme kleiner Auslenkungen können wir sie weiter vereinfachen. In der stationären Lage $u = 0$ ist die Spannung der Saite überall gleich, also $T = T_0$. Im Falle kleiner Auslenkungen $|u| \ll 1$ und $|u_x| \ll 1$ ersetzen wir nun T durch T_0 und $1 + u_x^2$ durch 1. Dann folgt

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in (0, L), \quad t > 0. \quad (1.7)$$

mit $c^2 = T_0/\rho$. Sie heißt eindimensionale *Wellengleichung* und ist gültig für kleine, ebene, transversale Schwingungen einer homogenen Saite. Es handelt sich um eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in den Variablen x und t . Um die Bewegung der Saite eindeutig zu bestimmen, sind Anfangs- und Randbedingungen nötig. Da die Saite an den Punkten $x = 0$ und $x = L$ eingespannt ist, gilt

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Außerdem sollten die Auslenkung und Geschwindigkeit der Saite zur Zeit $t = 0$ bekannt sein:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, L). \quad (1.8)$$

Warum heißt (1.7) Wellengleichung? Dies ist einfach einzusehen, wenn u_0 bzw. u_1 zweimal bzw. einmal stetig differenzierbare Funktionen in \mathbb{R} sind. Dann ist

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(z) dz, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine klassische Lösung von (1.7)-(1.8) für alle $x \in \mathbb{R}$, denn

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{2}(u_0''(x - ct) + u_0''(x + ct)) + \frac{1}{2c}(u_1'(x + ct) - u_1'(x - ct)), \\ u_{tt} &= \frac{c^2}{2}(u_0''(x - ct) + u_0''(x + ct)) + \frac{c}{2}(u_1'(x + ct) - u_1'(x - ct)) \end{aligned}$$

und daher $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

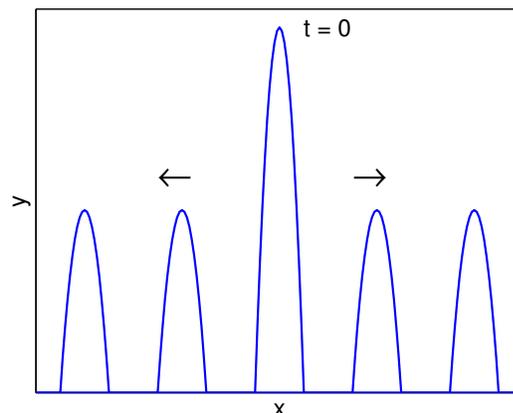


Abbildung 1.8: Lösung der Wellengleichung mit $u_0(x) = \max(0, 1 - x^2)$ und $u_1 = 0$ zu verschiedenen Zeitpunkten.

Die Lösung am Punkt (x, t) hängt nur von den Anfangsdaten im Intervall $[x - ct, x + ct]$ ab. Die Eckpunkte des Intervalls bilden Geraden im (x, t) -Raum, die *Charakteristiken* genannt werden (siehe Abbildung 1.7 rechts). Ist beispielsweise $u_1 = 0$, so beschreibt der Lösungsanteil $u_0(x - ct)$ das Fortschreiten der durch u_0 definierten Kurve mit der Geschwindigkeit c , $u_0(x + ct)$ das Fortschreiten mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit $-c$. Die Konstante c hat also die Bedeutung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle. Dieses Verhalten ist in Abbildung 1.8 illustriert: Die Anfangswelle, die um $x = 0$ zentriert ist, breitet sich nach beiden Seiten mit halber Höhe aus.

Die Schwingungsgleichung kann auch in mehreren Dimensionen formuliert werden. Betrachte etwa eine Membran in einem Gebiet Ω der (x, y) -Ebene, die in dieser Ebene fest eingespannt ist und sich nur in z -Richtung bewegen kann. Dann wirken Spannungskräfte in der x - und y -Richtung, und wir erhalten die Gleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0.$$

Wie im eindimensionalen Fall müssen Anfangs- und Randwerte vorgeschrieben werden, um eindeutige Lösbarkeit zu gewährleisten. Die Anfangsbedingungen sind durch

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

gegeben. Da die Membran am Rand $\partial\Omega$ fest eingespannt ist, gelten die homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0.$$

Es sind allerdings auch andere Randbedingungen denkbar: Ist eine eindimensionale Saite an der Stelle $x = L$ nicht eingespannt, sondern kann frei schwingen, so wirkt an dieser Stelle keine Spannung, $T \sin \theta = 0$, so dass wir als Randbedingung $u_x(L, t) = 0$ ansetzen können.

In Abbildung 1.9 stellen wir die Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung mit $c = 0.1$, $u_0(x, y) = \max(0, 1 - 60(x^2 + y^2))$ und $u_1(x, y) = 0$ zu verschiedenen Zeiten dar. Die Welle breitet sich in allen Richtungen mit verminderter Höhe aus, ähnlich wie bei Wasserwellen (siehe Abbildung 1.10).

1.5 Transport

Wir betrachten eine Flüssigkeit, die sich mit der Geschwindigkeit $v(x, t) \in \mathbb{R}^3$ ($x \in \mathbb{R}^3, t > 0$) bewegt. In der Flüssigkeit sei eine Substanz gelöst, die mit der Flüssigkeit chemisch reagiert und dadurch erzeugt oder vernichtet werden kann. Die Reaktionsrate sei von der lokalen Dichte $u(x, t)$ der Substanz abhängig, so dass die pro Volumen- und Zeiteinheit durch chemische Reaktionen erzeugte bzw. vernichtete Masse durch $r(u)$ gegeben ist. Wir wollen eine Differentialgleichung für die zeitliche und räumliche

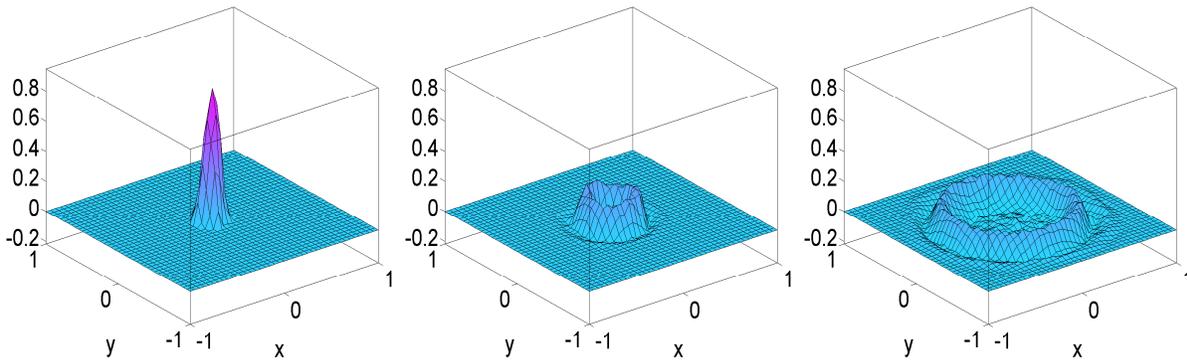


Abbildung 1.9: Lösungen der Wellengleichung zu den Zeitpunkten $t = 0$ (links), $t = 0.5$ (Mitte) und $t = 2$ (rechts).



Abbildung 1.10: Ein Wassertropfen erzeugt eine kreisförmige Welle (Quelle: Terry Vlisidis on Unsplash).

Veränderung der Dichte u herleiten. Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Wir nehmen ferner an, dass die Funktionen u und v stetig differenzierbar sind. Die zeitliche Änderung der Masse in Ω erfolgt durch Transport der Substanz durch den Rand $\partial\Omega$ des Gebiets und durch chemische Reaktionen:

$$\text{Massenänderung in } \Omega = \text{Transport durch } \partial\Omega + \text{chemische Reaktionen in } \Omega. \quad (1.9)$$

Die Masse der Substanz in Ω ist gegeben durch $\int_{\Omega} u(x, t) dx$, so dass

$$\text{Massenänderung in } \Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u dx = \int_{\Omega} u_t dx.$$

Der Transport der Substanz durch $\partial\Omega$ ist proportional zur Massendichte u und zur Normalkomponente der Geschwindigkeit $v \cdot \nu$, wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ sei. Damit ist

$$\text{Transport durch } \partial\Omega = - \int_{\partial\Omega} u(v \cdot \nu) ds.$$

Schließlich gilt

$$\text{chemische Reaktionen in } \Omega = \int_{\Omega} r(u) dx.$$

Damit folgt aus (1.9)

$$\int_{\Omega} u_t dx = - \int_{\partial\Omega} u(v \cdot \nu) ds + \int_{\Omega} r(u) dx.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite können wir mit dem Satz von Gauß umformulieren, so dass wir nur Volumenintegrale erhalten:

$$\int_{\Omega} (u_t + \operatorname{div}(uv) - r(u)) dx = 0.$$

Da das Gebiet Ω beliebig gewählt werden kann, folgt mit Lemma 1.8 die Differentialgleichung

$$u_t + \operatorname{div}(uv) = r(u), \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0. \quad (1.10)$$

Diese Gleichung heißt *Reaktions-Transportgleichung*. Sie ist bei gegebener Geschwindigkeit v eine semilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung in vier Variablen (drei Ortsdimensionen und eine Zeitdimension). Falls keine chemischen Reaktionen stattfinden, d.h. falls $r(u) = 0$ gilt, verändert sich die Dichte der Substanz nur infolge des Transports in der Flüssigkeit, und wir nennen die resultierende Gleichung eine *Transportgleichung*. Zur Zeit $t = 0$ sei die Anfangsdichte bekannt:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.11)$$

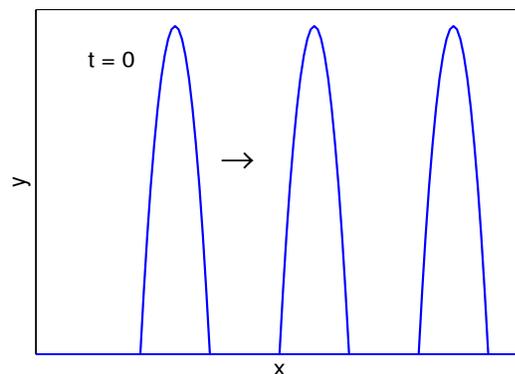


Abbildung 1.11: Lösung der eindimensionalen Transportgleichung mit Geschwindigkeit $v = 1$ und Anfangswert $u_0(x) = \max(0, 1 - x^2)$ zu verschiedenen Zeiten.

Falls die Geschwindigkeit der Flüssigkeit konstant ist und keine chemischen Reaktionen stattfinden, vereinfacht sich die Transportgleichung (1.10). Wegen $\operatorname{div}(uv) = \nabla u \cdot v + u \operatorname{div} v = v \cdot \nabla u$ erhalten wir nämlich

$$u_t + v \cdot \nabla u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, t > 0.$$

Ist die Anfangsbedingung stetig differenzierbar, können wir diese Gleichung explizit lösen:

$$u(x, t) = u_0(x - vt), \quad (1.12)$$

denn $u_t(x, t) = -v \cdot \nabla u_0(x - vt)$ und $v \cdot \nabla u(x, t) = v \cdot \nabla u_0(x - vt)$. In Abbildung 1.11 sind diese Lösungen für den eindimensionalen Fall und in Abbildung 1.12 für den zweidimensionalen Fall dargestellt. Die Funktion $t \mapsto x - vt$ wird auch eine *Charakteristik* genannt. Die Anfangsdichte wird also in Richtung der Geschwindigkeit v transportiert. Dies erklärt den Namen der Gleichung.

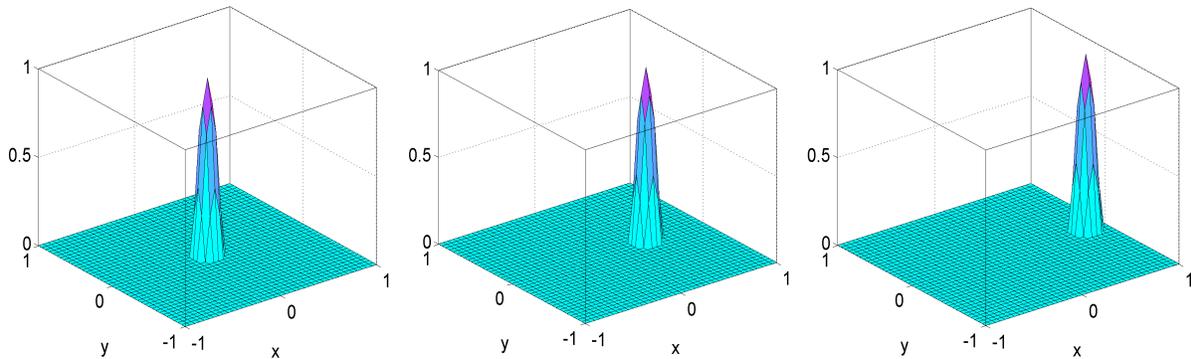


Abbildung 1.12: Lösungen der Transportgleichung mit Geschwindigkeitsvektor $v = (1, 0)^T$ zu den Zeitpunkten $t = 0$ (links), $t = 0.4$ (Mitte) und $t = 0.8$ (rechts).

Ist u_0 nicht stetig differenzierbar, so ist (1.12) keine stetig differenzierbare Lösung von (1.10). Andererseits ist physikalisch plausibel, dass auch eine nicht stetig differenzierbare Anfangsdichte gemäß (1.12) transportiert wird. Wir können in diesem Fall (1.12) als eine *verallgemeinerte* oder *schwache Lösung* von (1.10) interpretieren. Dies bedeutet, dass auch eine unstetige Funktion eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung sein kann. Dies macht es natürlich notwendig, den Lösungsbegriff genauer zu definieren und zwischen klassischen (stetig differenzierbaren) und schwachen Lösungen zu unterscheiden.

2 Partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung

Während wir im vorigen Kapitel sehr spezielle Differentialgleichungen betrachtet haben, untersuchen wir nun allgemeine partielle Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung. Dabei betrachten wir zunächst die Situation im \mathbb{R}^2 und dann allgemeiner im \mathbb{R}^n .

2.1 Quasilineare Gleichungen erster Ordnung

Die allgemeine partielle Differentialgleichung erster Ordnung im \mathbb{R}^2 lautet

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.1)$$

Fordern wir zusätzlich, dass die sogenannten *Cauchydaten*

$$u = \bar{u} \quad \text{auf } \Gamma \quad (2.2)$$

erfüllt sind mit einer Kurve Γ im \mathbb{R}^2 , dann erhalten wir ein *Cauchyproblem*. Sei diese Kurve parametrisiert durch $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$. Dann ist $(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t))$ eine Kurve im \mathbb{R}^3 , die wir S nennen. Wir behaupten, dass wir das Problem (2.1)-(2.2) auf die Lösung eines Anfangswertproblems für gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen können.

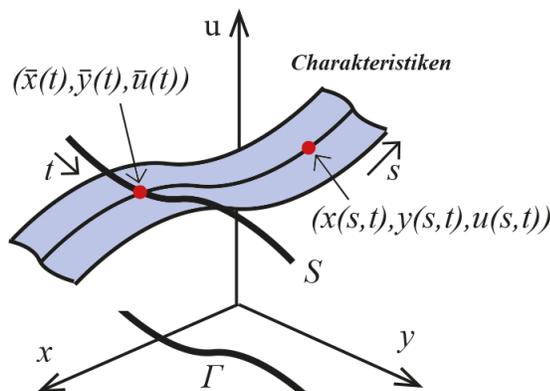


Abbildung 2.1: Charakteristiken im \mathbb{R}^3 . Die Kurve Γ ist die Projektion von S auf die (x, y) -Ebene.

Dazu geben wir zunächst eine geometrische Interpretation von (2.1). Wir erinnern, dass die Tangentialebene an die Fläche $u = u(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0, u_0) durch die Gleichung

$$u - u_0 = u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ beschrieben wird. Dies bedeutet, dass $(u_x, u_y, -1)^T \cdot (x - x_0, y - y_0, u - u_0)^T = 0$. Also ist der Normalenvektor auf die Fläche gegeben durch $(u_x, u_y, -1)^T$. Nun können

wir (2.1) auch formulieren als

$$\begin{pmatrix} a(x, y, u) \\ b(x, y, u) \\ c(x, y, u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

d.h., der Vektor $(a, b, c)^T$ steht senkrecht auf dem Normalenvektor $(u_x, u_y, -1)^T$. Dies bedeutet, dass $(a, b, c)^T$ in der Tangentialebene an die Fläche $u = u(x, y)$ liegt.

Wir können also (2.1) lösen, indem wir eine Fläche von Raumkurven konstruieren, die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial s} = a(x, y, u), \quad \frac{\partial y}{\partial s} = b(x, y, u), \quad \frac{\partial u}{\partial s} = c(x, y, u) \quad (2.3)$$

sind. Wir erhalten Lösungen der Form $(x(s), y(s), u(s))$ (die Funktion $u(s)$ ist nicht zu verwechseln mit der Lösung $u(x, y)$ von (2.1)). Dann löst $u(x(s), y(s))$ die Differentialgleichung (2.1):

$$c(x, y, u) = \frac{\partial u}{\partial s}(x(s), y(s)) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y.$$

Wir nennen $(x(s), y(s), u(s))$ die *Charakteristiken* der Gleichung (2.1) (siehe Abbildung 2.1).

Die Cauchydaten (2.2) sind erfüllt, wenn wir die Raumkurven $(x(s), y(s), u(s))$ von der Kurve S ausgehen lassen. Dazu benötigen wir einen zweiten Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$x(0, t) = \bar{x}(t), \quad y(0, t) = \bar{y}(t), \quad u(0, t) = \bar{u}(t). \quad (2.4)$$

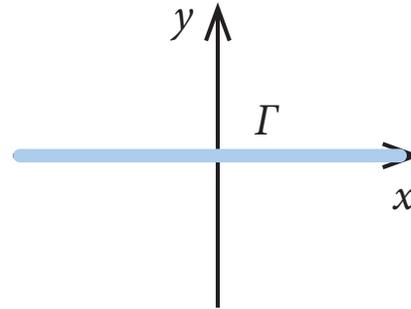
Für jedes feste t bildet (2.3)-(2.4) ein Anfangswertproblem für ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit der Lösung $u(s, t)$. Die Lösung ist also eine Funktion von s und t . Um eine Funktion von x und y zu erhalten, müssen wir von (s, t) nach (x, y) transformieren.

Beispiel 2.1. Wir wollen das Cauchyproblem

$$u_x + u_y = u^2, \quad u(x, 0) = f(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

lösen. Die Kurve Γ ist also gegeben durch $\{(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ (Abbildung 2.2). Das dazugehörige Anfangswertproblem lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= 1, & \frac{\partial y}{\partial s} &= 1, & \frac{\partial u}{\partial s} &= u^2, \\ x(0, t) &= \bar{x}(t) = t, & y(0, t) &= \bar{y}(t) = 0, & u(0, t) &= \bar{u}(t) = f(t). \end{aligned}$$

Abbildung 2.2: Kurve Γ für Beispiel 2.1.

Die Lösung kann explizit angegeben werden:

$$x(s, t) = s + t, \quad y(s, t) = s, \quad u(s, t) = \frac{f(t)}{1 - sf(t)}.$$

Schließlich eliminieren wir s und t , indem wir $s = y$ und $t = x - s = x - y$ setzen:

$$u(x, y) = \frac{f(x - y)}{1 - yf(x - y)}.$$

Dies ist die gewünschte Lösung. □

Die Elimination von s und t ist nicht immer sichergestellt. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung können wir eine differenzierbare Funktion in einer Umgebung eines Punktes invertieren, wenn die Funktionaldeterminante an dieser Stelle nicht verschwindet. Die Abbildung $(s, t) \mapsto (x, y)$ ist also invertierbar an $s = 0$, wenn

$$0 \neq \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \det \begin{pmatrix} x_s(0, t) & x_t(0, t) \\ y_s(0, t) & y_t(0, t) \end{pmatrix} = a\bar{y}_t(t) - b\bar{x}_t(t).$$

Damit ist diese Abbildung auch invertierbar in einer Umgebung von Γ .

Beispiel 2.2. Wir wollen zuerst $u_x = 1$ mit den Cauchydaten $u(0, y) = f(y)$ lösen. Dann ist Γ gegeben durch $\{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ (Abbildung 2.3). Das Cauchyproblem

$$x_s = 1, \quad x(0, t) = 0, \quad y_s = 0, \quad y(0, t) = t, \quad u_s = 1, \quad u(0, t) = f(t),$$

besitzt die Lösung $x(s, t) = s, y(s, t) = t, u(s, t) = s + f(t)$. Wegen

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

können wir nach (x, y) auflösen und erhalten die explizite Lösung $u(x, y) = x + f(y)$.

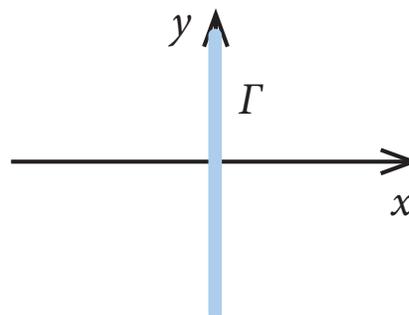


Abbildung 2.3: Kurve Γ für Beispiel 2.2.

Die Situation ändert sich, wenn wir die Cauchydaten $u(x, 0) = g(x)$ verwenden. Dann ist die Kurve Γ durch $\{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ definiert und das Anfangswertproblem

$$x_s = 1, \quad x(0, t) = t, \quad y_s = 0, \quad y(0, t) = 0, \quad u_s = 1, \quad u(0, t) = g(t)$$

hat die Lösung $x(s, t) = s + t, y(s, t) = 0, u(s, t) = s + g(t)$. Die Funktionaldeterminante ist überall gleich null, denn

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

d.h., wir können nicht nach (x, y) auflösen.

Was bedeutet dies geometrisch? Die Gleichungen der Charakteristiken sind $x_s = 1$ und $y_s = 0$, also $(x(s), y(s)) = (s, c)$ mit $c \in \mathbb{R}$. Diese Kurven stellen Parallelen zur x -Achse dar, also $y = c$. Die Anfangskurve Γ ist gerade die x -Achse, sie ist also eine spezielle Charakteristik. \square

Das letzte Beispiel hat gezeigt, dass die Anfangskurve Γ quer zu den Charakteristiken verlaufen muss, da ansonsten das Problem nicht eindeutig lösbar ist. Wir fassen zusammen:

Theorem 2.3. Seien S eine stetig differenzierbare Kurve im \mathbb{R}^3 und Γ die Projektion von S auf die (x, y) -Ebene. Die Funktionen a, b und c seien in einer Umgebung von S stetig differenzierbar. Ferner gelte $a\bar{y}_t - b\bar{x}_t \neq 0$ auf Γ . Dann existiert in einer Umgebung von S eine eindeutige stetig differenzierbare Lösung von (2.1)-(2.2).

Beweis. Wir haben bereits die Existenz einer lokalen Lösung gezeigt. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. \square

Bemerkung. Wir haben in Abschnitt 1.4 die Lösungen $f(x \pm ct)$ der eindimensionalen Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit $u(\cdot, 0) = f$ und $u_t(\cdot, 0) = \pm cf'$ auch Charakteristiken genannt. Um zu sehen, dass dieser Begriff mit dem in diesem Abschnitt verwendeten übereinstimmt, benötigen wir die allgemeine Definition einer Charakteristik.

Sei L ein Differentialoperator k -ter Ordnung (also mit Ableitungen höchstens k -ter Ordnung) und Γ eine Hyperfläche im \mathbb{R}^n . Die Werte einer Funktion samt ihren Normalableitungen bis

zur Ordnung $k-1$ auf Γ nennen wir *Cauchydaten*. Wenn der Wert von Lu an einem Punkt $x \in \Gamma$ aus den Cauchydaten berechnet werden kann, nennen wir die Mannigfaltigkeit S , definiert durch $S := (\Gamma, \text{Cauchydaten}) \subset \mathbb{R}^{n+k}$, *charakteristisch* von L in x . Wenn S charakteristisch in jedem Punkt ist, heißt S eine *Charakteristik*.

Betrachte als erstes Beispiel den Operator der Wellengleichung $Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ in \mathbb{R} . Gemäß Abschnitt 1.4 sind $f(x \pm ct)$ für beliebige Funktionen f spezielle Lösungen dieser Gleichung. Ist eine Kurve Γ durch die Gleichung $x \pm ct = \text{const.}$ gegeben, so ist die Lösung der Wellengleichung vollständig durch die Werte auf Γ , gegeben durch $x \pm ct = \text{const.}$, bestimmt. Dies bedeutet, dass Γ eine Charakteristik von L ist.

Wählen wir wie in Beispiel 2.2 $Lu = u_x$ und Γ gleich der x -Achse, schreiben wir also $u(x, 0) = g(x)$ vor, so ist $Lu(x, 0) = u_x(x, 0) = g'(x)$ aus den Cauchydaten berechenbar. Folglich ist $S = \{(x, 0, g(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ eine Charakteristik. Ist Γ gleich der y -Achse, so können wir $Lu(0, y) = u_x(0, y)$ nicht aus den Cauchydaten $u(0, y) = f(y)$ bestimmen und die entsprechende Kurve S ist nirgends charakteristisch. \square

Wir können die oben erläuterte Charakteristikenmethode auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung in n Variablen erweitern:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u) u_{x_i} = c(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad u = \bar{u} \quad \text{auf } \Gamma, \quad (2.5)$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Sei Γ parametrisiert durch $\bar{x}(t_2, \dots, t_n)$. Dann ist die zugehörige $(n-1)$ -dimensionale Fläche S im \mathbb{R}^{n+k} nirgends charakteristisch, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & \partial \bar{x}_1 / \partial t_2 & \cdots & \partial \bar{x}_1 / \partial t_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & \partial \bar{x}_n / \partial t_2 & \cdots & \partial \bar{x}_n / \partial t_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wir lösen die Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial s} &= a_i, & x_i(0, t_2, \dots, t_n) &= \bar{x}_i(t_2, \dots, t_n), & i &= 1, \dots, n, \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= c, & u(0, t_2, \dots, t_n) &= \bar{u}(t_2, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Da S nirgends charakteristisch ist, ist die Variablentransformation $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (s, t_2, \dots, t_n)$ definiert, und wir erhalten lokale Lösungen $u(x_1, \dots, x_n)$ von (2.5). Satz 2.3 gilt also auch für den n -dimensionalen Fall.

Beispiel 2.4. Die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}, t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ist eine vereinfachte Gleichung in der Fluidodynamik mit der Dichte $u(x, t)$. Sie tritt auch bei Verkehrsflüssen auf, wobei $u = 1 - 2\rho/\rho_{\max}$, und ρ beschreibt die Fahrzeugdichte (siehe Abbildung 2.4. Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen ist die

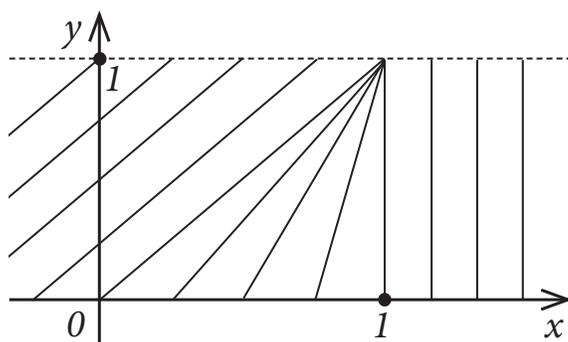


Abbildung 2.4: Links: Charakteristiken der Burgers-Gleichung. Rechts: Fahrzeuge auf einer Autobahn (Quelle: Thaddaeus Lim on Unsplash).

Gleichung quasilinear. Wir wollen sie mit der Charakteristikenmethode lösen. Formal ist $a = 1$, $b = u$ und $c = 0$ in (2.1). Folglich ist (wir schreiben (t, x) anstatt (x, y))

$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = u(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial s} = 0. \quad (2.6)$$

Die erste Gleichung impliziert $s = t$ (bis auf eine additive Konstante). Daher ist

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x(s), t(s)) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) = u_x(x(t), t) \frac{\partial x}{\partial t} + u_t(x(t), t) = u_x u + u_t = 0,$$

was wir schon aus der dritten Gleichung in (2.6) wissen. Wir schliessen, dass die Lösung u konstant entlang der Charakteristik $x(t)$ ist. Dann ist die rechte Seite der zweiten Gleichung in (2.6) konstant:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u(x(t), t) = \text{const.}, \quad x(0) = x_0.$$

Folglich ist $x(t)$ eine Gerade in der (x, t) -Ebene durch x_0 mit der Steigung $1/u_0(x(t)) = 1/u_0(x_0)$. Abbildung 2.4 illustriert die Lösung $u(x, t)$ der Burgers-Gleichung mit der Anfangsbedingung $u_0 = 1$ in $x < 0$, $u_0(x) = 1 - x$ in $0 < x < 1$ und $u_0 = 0$ in $x > 1$. Die Geraden stellen die Charakteristiken dar, die die entsprechenden Anfangswerte für $t > 0$ "transportieren". Die Abbildung zeigt auch, dass sich die Charakteristiken im Punkt $(x, t) = (1, 1)$ treffen. Dort wird die Lösung unstetig! Dies zeigt, dass Satz 2.3 im Allgemeinen nur zeitlich lokale stetige Lösungen liefern kann.

In der Verkehrsflussanwendung ist die Autobahn leer für $x < 0$ ($\rho = 0$ oder $u = 1$) und moderat gefüllt für $x > 1$ ($\rho = \rho_{\max}/2$ oder $u = 0$). Die Autos im Intervall $(0, 1)$ fahren in Richtung der positiven x -Achse, bis sich dort keine Autos mehr befinden. Da keine Autos von links nachkommen, ist dann $\rho = 0$ oder $u = 1$ in $(-\infty, 1)$.

Mit dieser Technik lassen sich auch komplexere Situationen explizit lösen; siehe etwa das Ampelproblem in [Abbildung 2.5](#). □

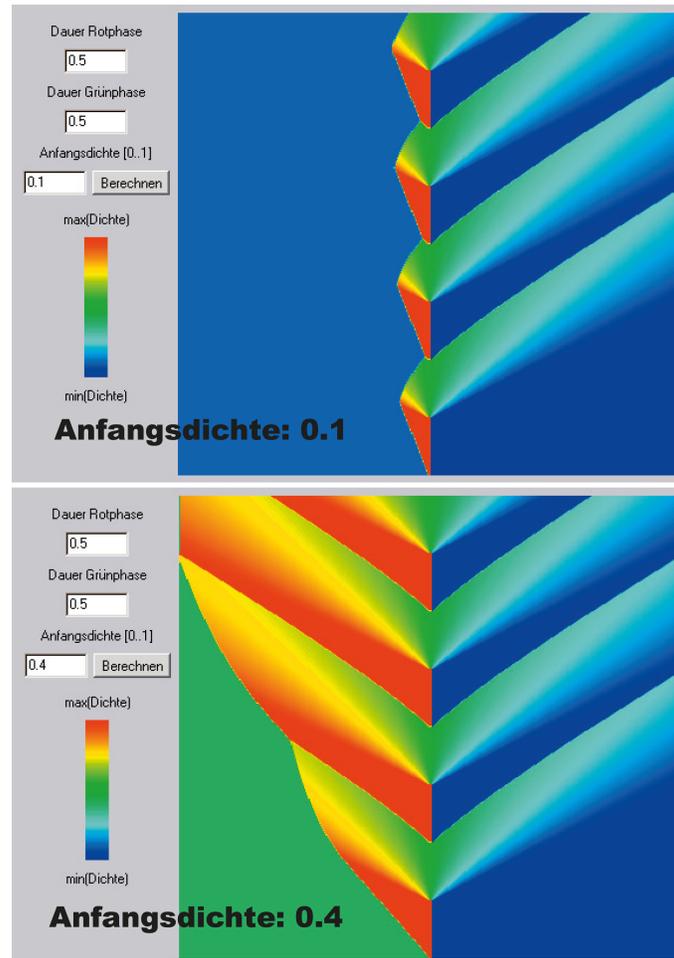


Abbildung 2.5: Dargestellt ist die Fahrzeugdichte vor einer Ampel (rot: hohe Dichte, grün: niedrige Dichte). Die x -Achse bezeichnet die Position, die y -Achse die Zeit. Oben: Von links kommende Fahrzeuge stauen sich vor einer roten Ampel. Der Stau löst sich während der Grünphase auf. Unten: Die Anzahl der von links kommenden Fahrzeuge während einer Rotphase ist zu groß, um während der Grünphase abgebaut zu werden. Der Stau wächst über alle Grenzen.

2.2 Klassifikation partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Partielle Differentialgleichungen können nicht einfach klassifiziert werden, da es eine Vielzahl von Typen gibt. Im Falle reellwertiger Gleichungen zweiter Ordnung in zwei Variablen ist eine vollständige Klassifikation möglich. Daher betrachten wir zunächst eine allgemeine quasilineare Gleichung zweiter Ordnung für eine Funktion $u(x, y)$:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f, \quad (2.7)$$

wobei a, b, c und f Funktionen von x, y, u, u_x und u_y sind.

Definition 2.5. Die Klassifikation der Gleichung (2.7) lautet wie folgt:

- ▶ Falls $b^2 - ac < 0$ an der Stelle (x, y) , so heißt (2.7) *elliptisch* an (x, y) .
- ▶ Falls $b^2 - ac > 0$ an der Stelle (x, y) , so heißt (2.7) *hyperbolisch* an (x, y) .
- ▶ Falls $b^2 - ac = 0$ an der Stelle (x, y) , so heißt (2.7) *parabolisch* an (x, y) .

Diese Begriffe haben einen Zusammenhang mit den Kegelschnitten: Die Gleichung $ax^2 + 2bxy + cy^2 = f$ beschreibt eine Ellipse, wenn $b^2 - ac < 0$; eine Hyperbel, wenn $b^2 - ac > 0$; und eine Parabel, wenn $b^2 - ac = 0$ (siehe Abbildung 2.6).

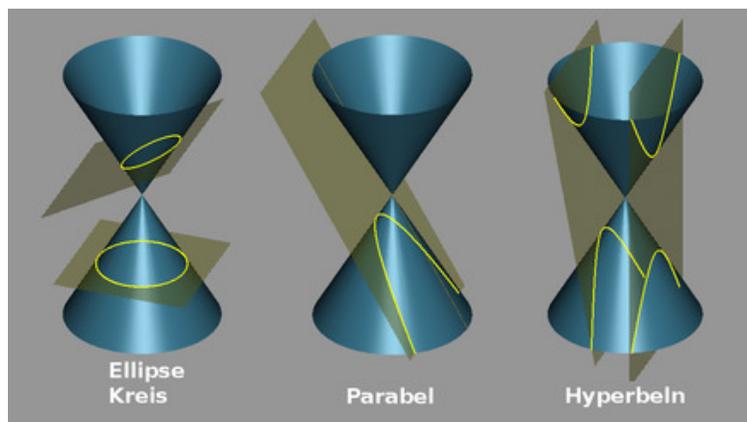


Abbildung 2.6: Kegelschnitte. (Quelle: Duk at en.Wikipedia, Creative-Common-Lizenz.)

Beispiel 2.6. (i) Die zweidimensionale Laplace-Gleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ist elliptisch in \mathbb{R}^2 , denn $a = c = 1$ und $b = 0$.

(ii) Die eindimensionale Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$ ist hyperbolisch in \mathbb{R}^2 , denn (wir setzen $y := t$) $a = -1, b = 0$ und $c = 1$.

(iii) Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_t - u_{xx} = 0$ kann mit $y := t$ und $f = u_t$ wie (2.7) geschrieben werden, wobei $a = -1$ und $b = c = 0$. Folglich ist sie in \mathbb{R} parabolisch.

(iv) Die *Tricomi-Gleichung*

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ist elliptisch, falls $y > 0$, und hyperbolisch, falls $y < 0$. Sie ist ein einfaches Modell für eine stationäre Strömung. Die Funktion u ist hierbei die Stromfunktion. \square

Bei Differentialgleichungen mit mehr als zwei Variablen ist eine vollständige Klassifikation schwieriger. Wir beschränken uns daher nur auf einige für die Anwendungen

wichtige Typen. Dazu betrachten wir die quasilineare partielle Differentialgleichung

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f \quad (2.8)$$

für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Die Koeffizienten a_{ij} und die rechte Seite f können von $x = (x_1, \dots, x_n)$, u und ∇u abhängen. Wir können die Matrix $A = (a_{ij})$ ohne Einschränkung als symmetrisch voraussetzen, denn ansonsten könnten wir sie gemäß

$$a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a_{ji} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = (a_{ij} + a_{ji}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$$

formulieren, und die Matrix $B = (b_{ij})$ aus den neuen Koeffizienten $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ ist symmetrisch. Die Eigenschaften der Gleichung (2.8) hängen von den Vorzeichen der Eigenwerte von A ab.

Definition 2.7. Betrachte die Differentialgleichung (2.8) mit symmetrischer Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})$, die von x , u und ∇u abhängt. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n$.

- ▶ Wir nennen (2.8) *elliptisch* an x , falls $\lambda_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ oder $\lambda_i < 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt.
- ▶ Wir nennen (2.8) *hyperbolisch* an x , falls $\lambda_j > 0$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und $\lambda_i < 0$ für alle $i \neq j$ oder falls $\lambda_j < 0$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und $\lambda_i > 0$ für alle $i \neq j$ gilt.
- ▶ Wir nennen (2.8) *parabolisch* an x , falls ein $j \in \{1, \dots, n\}$ existiert, so dass $\lambda_j = 0$ und alle anderen λ_i dasselbe Vorzeichen haben.

Diese Definition steht im Einklang mit Definition 2.5: Die zu der Gleichung $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f$ gehörende Matrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

mit den reellen Eigenwerten

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(a + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a + c)^2 + 4(b^2 - ac)}.$$

Dann gilt klarerweise:

- ▶ $\lambda_{1/2} > 0$ impliziert $b^2 - ac < 0$ (elliptischer Fall);
- ▶ $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$ implizieren $b^2 - ac > 0$ (hyperbolischer Fall);
- ▶ $\lambda_2 = 0$ impliziert $b^2 - ac = 0$ (parabolischer Fall).

Beispiel 2.8. (i) Die Laplace-Gleichung im \mathbb{R}^n ,

$$\Delta u = 0,$$

ist elliptisch, denn die Koeffizientenmatrix ist gleich der Einheitsmatrix, die nur den Eigenwert eins besitzt.

(ii) Die Koeffizientenmatrix der Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

lautet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

wobei wir die Variablen in der Reihenfolge (t, x_1, \dots, x_n) aufgeschrieben haben. Da genau ein Eigenwert gleich eins ist und alle anderen gleich -1 , ist die Wellengleichung hyperbolisch.

(iii) Die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = f, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

ist parabolisch, denn die Koeffizientenmatrix ist ähnlich zu (2.9) mit dem Unterschied, dass das Element $a_{11} = 0$ und nicht $a_{11} = 1$ lautet. \square

Nicht alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung fallen in die oben angeführte Unterteilung. Ein Beispiel ist die komplexwertige *Schrödinger-Gleichung* der Quantenmechanik,

$$iu_t = -\Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

wobei i die komplexe Einheit mit $i^2 = -1$ ist. Es handelt sich *nicht* um eine parabolische Gleichung. Ihre Lösungen können etwa ein wellenartiges Verhalten zeigen. Beispielsweise ist $u(x, t) = e^{i(k \cdot x - |k|^2 t)}$ für jedes $k \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung, die mit der Frequenz $|k|^2$ oszilliert.

3 Distributionen

3.1 Definitionen

Wir haben in Abschnitt 1.5 gesehen, dass es Sinn machen kann, nicht stetig differenzierbare Lösungen zu betrachten. Betrachte etwa die stationäre Transportgleichung

$$u_x = f, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Wir multiplizieren sie mit einer Funktion $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass ϕ außerhalb eines Intervalls (a, b) verschwindet, und integrieren über \mathbb{R} :

$$\int_{\mathbb{R}} u_x \phi dx = \int_{\mathbb{R}} f \phi dx.$$

Tatsächlich lauten die Integrationsgrenzen a und b , da $\phi = 0$ für $x \leq a$ und $x \geq b$. Wir formen mit partieller Integration um:

$$\int_a^b u_x \phi dx = - \int_a^b u \phi_x dx + [u \phi]_a^b.$$

Wegen $\phi(a) = \phi(b) = 0$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}} u \phi_x dx = - \int_{\mathbb{R}} f \phi dx. \quad (3.2)$$

Wir können nun u eine *verallgemeinerte Lösung* von (3.1) nennen, wenn sie die Gleichung (3.2) für alle ϕ erfüllt. Jede klassische (d.h. stetig differenzierbare) Lösung von (3.1) ist klarerweise eine verallgemeinerte Lösung. Umgekehrt ist jede verallgemeinerte Lösung, die sich als stetig differenzierbar herausstellt, auch eine klassische Lösung.

Der Vorteil dieses neuen Lösungsbegriffs ist, dass die Funktion u nicht differenzierbar, sondern nur lokal integrierbar sein muss. Die Ableitung wird auf die sogenannte *Testfunktion* ϕ übertragen. Diese Idee kann mit Hilfe der Distributionentheorie formalisiert werden. Distributionen sind verallgemeinerte Funktionen, die nicht punktweise ausgewertet werden können, sondern nur über die Anwendung von Testfunktionen definiert sind. Insbesondere sind Distributionen immer unendlich oft partiell differenzierbar. Sie sind daher ein wichtiges Hilfsmittel, um verallgemeinerte Lösungen definieren zu können. Im Folgenden führen wir in die Theorie der Distributionen ein.

Seien Ω eine offene Menge und

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(\phi) \text{ ist kompakt in } \Omega\}$$

der Raum der *Testfunktionen*. Der Raum enthält nicht nur die Nullfunktion, denn z.B. die Funktionen

$$\phi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{\alpha^2}{|x|^2 - \alpha^2}\right) & : |x| < \alpha \\ 0 & : |x| \geq \alpha \end{cases}$$

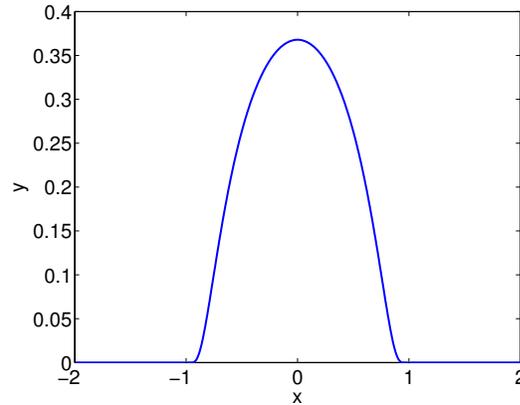


Abbildung 3.1: Die Funktion $\phi_1(x) = \exp(1/(x^2 - 1))$ für $|x| < 1$ und $\phi_1(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ ist ein Element von $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

für $\alpha \in \mathbb{R}$ sind Elemente von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (Abbildung 3.1). Dies kann man dadurch einsehen, indem man ϕ_α für $|x| < \alpha$ differenziert und dann die Regel von de l'Hospital für $|x| \rightarrow \alpha$ anwendet.

Bemerkung. Wir skizzieren kurz die Topologie des Raums $\mathcal{D}(\Omega)$ der Testfunktionen. Für präzisere und weiterführende Aussagen verweisen wir auf Yoshida [14, Seiten 27f.] und Rudin [12, 6.2f.]. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Wir definieren

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{f \in C_0^\infty(\Omega) : \text{supp } f \subset K\}.$$

Die Topologie von $\mathcal{D}_K(\Omega)$ wird von den Halbnormen

$$p_m(f) = \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

erzeugt. (Eine Abbildung $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Halbnorm auf einem Vektorraum X , wenn $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ und $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ für alle $x, y \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Die obigen Abbildungen sind sogar Normen.) Sei nun

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega \text{ kompakt}} \mathcal{D}_K(\Omega)$$

der Raum der Testfunktionen. Falls $K_1 \subset K_2$ kompakt, so ist die Topologie von $\mathcal{D}_{K_1}(\Omega)$ gleich der relativen Topologie von $\mathcal{D}_{K_1}(\Omega)$ als eine Teilmenge von $\mathcal{D}_{K_2}(\Omega)$. Dann ist der induktive Limes der $\mathcal{D}_K(\Omega)$ über alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$ ein lokal konvexer topologischer Vektorraum, der $\mathcal{D}(\Omega)$ genannt wird. Die oben definierten Normen können dazu benutzt werden, um eine lokal konvexe, metrisierbare Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$ zu definieren [12, Section 6.2]. Allerdings ist diese Topologie nicht vollständig. Wir können eine andere Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$ definieren, die vollständig ist, die sich aber als nicht metrisierbar erweist. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, definieren wir auf $\mathcal{D}(\Omega)$ nur die Konvergenz und gehen nicht weiter auf topologische Eigenschaften ein. Wir werden sehen, dass dies für unsere Zwecke genügt. \square

Auf $\mathcal{D}(\Omega)$ definieren wir Konvergenz von Funktionenfolgen wie folgt.

Definition 3.1. Eine Folge (ϕ_m) aus $\mathcal{D}(\Omega)$ *konvergiert gegen null* genau dann, wenn

- ▶ es eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ gibt, so dass $\text{supp}(\phi_m) \subset K$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, und
- ▶ wenn für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \phi_m(x)| = 0.$$

Wir schreiben auch kurz: $\phi_m \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Mit anderen Worten: Die Folge (ϕ_n) konvergiert gegen null, wenn alle ϕ_n außerhalb einer kompakten Menge verschwinden und wenn alle partiellen Ableitungen von ϕ_n gleichmäßig gegen null konvergieren. Mit diesem Konvergenzbegriff können wir eine Distribution definieren.

Definition 3.2. Eine *Distribution* ist ein lineares Funktional $u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, das bezüglich des oben definierten Konvergenzbegriffs stetig ist, d.h., wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(\phi_n) = 0 \quad \text{für alle Folgen } (\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega), \text{ die gegen null konvergieren.}$$

Anstelle der Schreibweise $u(\phi)$ für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ verwenden wir auch die Notation $\langle u, \phi \rangle$. Wir bezeichnen die Menge aller Distributionen mit $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Diese Definition ist zuweilen etwas unhandlich. Wir können Distributionen auch folgendermaßen charakterisieren.

Lemma 3.3. Ein lineares Funktional $u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Distribution genau dann, wenn u beschränkt ist, d.h., wenn es für alle kompakten Mengen $K \subset \Omega$ zwei Konstanten $C > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für alle $\phi \in \mathcal{D}(K) := \mathcal{D}_K(\Omega)$ gilt

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq C \|\phi\|_{C^k(K)}, \quad (3.3)$$

wobei $\|\phi\|_{C^k(K)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi(x)|$.

Beweis. 1. Sei $u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft (3.3) und $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ eine Folge, die gegen null konvergiert. Dann folgt sofort aus (3.3), dass $\langle u, \phi_n \rangle \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

2. Sei umgekehrt $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Wir machen die Widerspruchsannahme, dass es eine kompakte Menge K gibt, so dass für alle $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ eine Funktion $\phi_n \in \mathcal{D}(K)$ existiert mit der Eigenschaft $|\langle u, \phi_n \rangle| > C \|\phi_n\|_{C^m(K)}$. Wir wählen speziell $C = m = n$:

$$|\langle u, \phi_n \rangle| > n \|\phi_n\|_{C^n(K)}.$$

Durch Wahl einer multiplikativen Konstante für ϕ_n können wir stets $|\langle u, \phi_n \rangle| = 1$

erreichen. Dann folgt für alle $|\alpha| \leq n$

$$\frac{1}{n} > \|\phi_n\|_{C^n(K)} \geq \sup_{x \in K} |D^\alpha \phi_n(x)|,$$

und für $n \rightarrow \infty$ folgt $\sup |D^\alpha \phi_n| \rightarrow 0$. Dann müsste wegen $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ aber $\langle u, \phi_n \rangle \rightarrow 0$ folgen, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $|\langle u, \phi_n \rangle| = 1$ ist. \square

Die Definition von Distributionen hat den Zweck, den Begriff der Funktion zu verallgemeinern. Der folgende Satz zeigt, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Theorem 3.4. Jede Funktion $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \forall K \subset \Omega \text{ kompakt: } f|_K \in L^1(K)\}$ kann vermittelt

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f \phi dx \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

als eine Distribution aufgefasst werden.

Wir haben in dem obigen Satz die gleiche Notation für die Funktion und die dazugehörige Distribution verwendet. Das Integral auf der rechten Seite existiert, da die Funktion $f \phi$ einen kompakten Träger hat und als Produkt einer integrierbaren Funktion mit einer beschränkten Funktion wieder integrierbar ist. Bis auf Identifikation können wir also

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

schreiben.

Beweis. Sei $K \subset \Omega$ eine kompakte Menge. Die Distribution ist offensichtlich linear und auch stetig, denn

$$|\langle f, \phi \rangle| \leq \sup_{x \in K} |\phi(x)| \|f\|_{L^1(K)}$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp}(\phi) \subset K$. Wähle also in Lemma 3.3 $C = \|f\|_{L^1(K)}$ und $k = 0$. \square

Definition 3.5. Eine Distribution, die einer lokal integrierbaren Funktion entspricht, wird *regulär* genannt, anderenfalls *singulär*.

Beispiel 3.6. Ein Beispiel einer singulären Distribution ist die sogenannte *Diracsche Delta-Distribution* δ , definiert durch $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Aufgrund der Abschätzung $|\langle \delta, \phi \rangle| \leq \sup_{x \in K} |\phi(x)|$ für $\phi \in \mathcal{D}(K)$ können wir in Lemma 3.3 $C = 1$ und $k = 0$ wählen, und es gilt $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Wir können die Delta-Distribution (in einer Raumdimension) anschaulich verstehen, indem wir sie durch Funktionen approximieren. Seien dafür für $\varepsilon > 0$ die

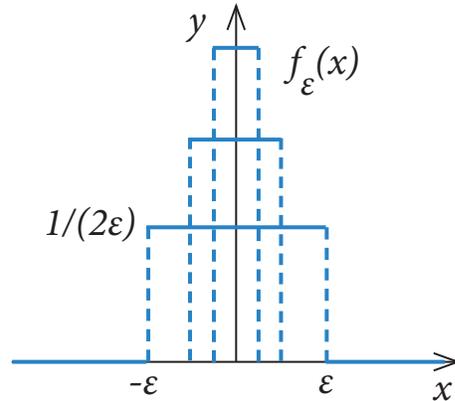


Abbildung 3.2: Illustration der Funktion f_ε aus Beispiel 3.6 für verschiedene Werte von ε .

Funktionen

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & : |x| > \varepsilon \\ 1/(2\varepsilon) & : |x| < \varepsilon \end{cases}$$

gegeben (siehe Abbildung 3.2). Es gilt $f_\varepsilon \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Dann wird durch

$$u(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon \phi dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

ein lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ definiert. Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt

$$u(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon \phi dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \phi(x) dx = \phi(0),$$

also ist u gleich der Delta-Distribution δ . In diesem Sinne ist der Träger von δ (den wir in Beispiel 3.8 definieren) konzentriert auf den Punkt null, und der "Wert" von δ in diesem Punkt ist "unendlich". Daher wird δ in der Physik häufig als die Dichte einer Punktladung verwendet. \square

Definition 3.7. Sei $G \subset \Omega$ eine offene Menge und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Wir sagen, dass u auf G verschwindet, $u = 0$ in G , wenn

$$\langle u, \phi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ mit } \text{supp}(\phi) \subset G.$$

Beispiel 3.8. Wir behaupten, dass für die Delta-Distribution $\delta = 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt. Sei $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp}(\phi) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $\phi(0) = 0$ und daher $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) = 0$. In diesem Sinne ist δ auf den Punkt null konzentriert. \square

3.2 Eigenschaften

Rechenregeln für Distributionen können dadurch definiert werden, dass die entsprechende Eigenschaft auf die Testfunktion übertragen wird. Die Grundlage für diese Vorgehensweise liefert der folgende Satz.

Theorem 3.9. Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene Mengen und sei $L : \mathcal{D}(\Omega_1) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega_2)$ eine lineare, stetige Abbildung. Wir definieren die *adjungierte Abbildung* $L^* : \mathcal{D}(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega_1)$ durch

$$\langle \phi, L^*(\psi) \rangle = \int_{\Omega_1} \phi L^*(\psi) dx = \int_{\Omega_2} L(\phi) \psi dx = \langle L(\phi), \psi \rangle$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ und $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$. Wir setzen voraus, dass L^* existiert und stetig ist. Dann wird L durch

$$\langle L(u), \phi \rangle = \langle u, L^*(\phi) \rangle \quad \text{für alle } u \in \mathcal{D}'(\Omega_1), \phi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$$

auf eine stetige Abbildung von $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ nach $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ erweitert.

Wie ist Stetigkeit in $\mathcal{D}'(\Omega)$ zu verstehen? Wir sagen, dass eine Folge von Distributionen (u_n) gegen $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ konvergiert, wenn

$$\langle u_n, \phi \rangle \rightarrow \langle u, \phi \rangle \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

erfüllt ist. Dann bedeutet die Stetigkeit von L , dass aus $u_n \rightarrow u$ in $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ folgt $L(u_n) \rightarrow L(u)$ in $\mathcal{D}'(\Omega_2)$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass L wohldefiniert (d.h. $L(u) \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ für $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$) und stetig ist. Sei $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega_2)$ mit $\phi_n \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega_2)$. Aus der Stetigkeit von L^* folgt $L^*(\phi_n) \rightarrow L^*(0) = 0$ in $\mathcal{D}(\Omega_1)$ und daher

$$\langle L(u), \phi_n \rangle = \langle u, L^*(\phi_n) \rangle \rightarrow \langle u, L^*(0) \rangle = 0.$$

Nach Definition 3.2 ist $L(u) \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$.

Sei nun $(u_n) \subset \mathcal{D}'(\Omega_1)$ mit $u_n \rightarrow u$ in $\mathcal{D}'(\Omega_1)$. Dann folgt

$$\langle L(u_n), \phi \rangle = \langle u_n, L^*(\phi) \rangle \rightarrow \langle u, L^*(\phi) \rangle = \langle L(u), \phi \rangle.$$

Dies beweist die Stetigkeit von L . □

Satz 3.9 erlaubt die Definition neuer Distributionen:

- **Multiplikation mit Funktionen.** Seien $a \in C^\infty(\Omega)$ und $L(\phi) = a\phi$. Dann gilt $L^* = L$. Die Multiplikation einer Distribution u mit der Funktion a wird definiert durch

$$\langle au, \phi \rangle = \langle u, a\phi \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega), \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

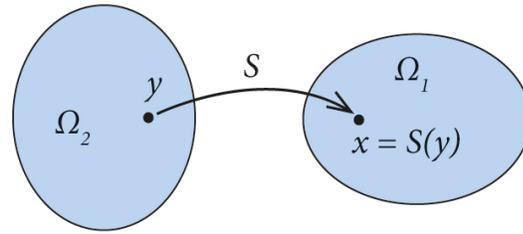


Abbildung 3.3: Koordinatentransformation $S : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$, $S(y) = x$.

Dies ist wohldefiniert, da $a\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

• **Koordinatentransformationen.** Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete mit C^∞ -Rand und $S : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ ein C^∞ -Diffeomorphismus, d.h. eine bijektive C^∞ -Funktion, deren Inverse ebenfalls aus C^∞ ist (siehe Abbildung 3.3), und sei $L(\chi) = \chi \circ S$ für $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$. Wir benutzen die Transformationsformel der Integralrechnung (mehrdimensionale Substitutionsregel mit $x = S(y)$),

$$\int_{\Omega_2} \chi(S(y))\phi(y)dy = \int_{\Omega_1} \chi(x)\phi(S^{-1}(x))|\det DS^{-1}(x)|dx,$$

wobei DS^{-1} die Jacobi-Matrix von S^{-1} bedeutet und $\chi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$. Wir können folglich die Transformation von Distributionen durch

$$\langle u \circ S, \phi \rangle = \langle u, \phi \circ S^{-1} |\det DS^{-1}| \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega_1), \phi \in \mathcal{D}(\Omega_2),$$

definieren. Wichtige Beispiele sind

- Translation um einen Vektor $z \in \mathbb{R}^n$: Sei $\tau_z(x) = x+z$, Dann ist $(\phi \circ \tau_z)(x) = \phi(x+z)$. Wir schreiben auch $\tau_z(\phi) = \phi \circ \tau_z$, d.h., wir interpretieren τ_z als Funktion von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann definieren wir

$$\langle \tau_z u, \phi \rangle = \langle u, \tau_{-z}\phi \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

- Reflexion: Definiere $R(x) = -x$. Dann ist $(\phi \circ R)(x) = \phi(-x)$ bzw., wenn wir R als Funktion von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ interpretieren, $(R\phi)(x) = \phi(-x)$. Damit können wir definieren:

$$\langle Ru, \phi \rangle = \langle u, R\phi \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Beispiel 3.10. Ein Beispiel einer verschobenen Distribution ist die *Delta-Distribution mit Pol* $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\delta_\xi = \tau_{-\xi}\delta$, definiert durch

$$\langle \delta_\xi, \phi \rangle = \langle \delta, \tau_\xi\phi \rangle = (\tau_\xi\phi)(0) = \phi(\xi).$$

Manchmal schreibt man auch $\delta(x - \xi)$ für δ_ξ , um den Pol in ξ zu betonen. Diese Schreibweise ist allerdings etwas missverständlich, da $\delta(x - \xi)$ keine Funktion und

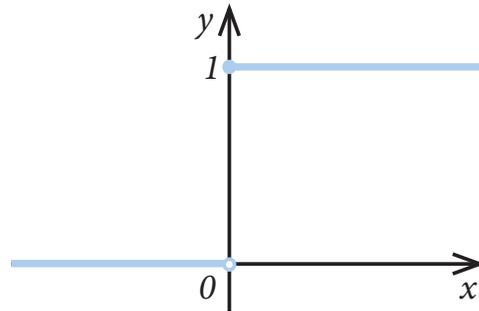


Abbildung 3.4: Illustration der Heaviside-Funktion.

$x - \xi$ kein Argument von δ ist. □

• **Ableitung einer Distribution.** Sei $L = D^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Partielle Integration zeigt, dass $L^* = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$. Wir definieren

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega), \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Insbesondere ist *jede Distribution beliebig oft partiell differenzierbar!*

Beispiel 3.11. Die *Heaviside-Funktion* (Abbildung 3.4)

$$H(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : x \geq 0 \end{cases}$$

ist nicht im gewöhnlichen Sinne differenzierbar. Fassen wir sie jedoch als Distribution auf, so können wir sie im Sinne der Distributionentheorie ableiten. Wir erhalten für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

Folglich ist $H' = \delta$. Die distributionelle Ableitung der Heaviside-Funktion ist also gleich der Delta-Distribution.

Natürlich ist auch die Delta-Distribution δ unendlich oft (distributionell) differenzierbar:

$$\langle D^\alpha \delta, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, D^\alpha \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \phi(0), \quad \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

□

Die Ableitung einer konvergenten Folge von Distributionen ist wieder konvergent. Es gilt das folgende Lemma:

Lemma 3.12. Sei $(u_n) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ eine konvergente Folge mit $u_n \rightarrow u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex. Dann konvergiert $(D^\alpha u_n)$ für $n \rightarrow \infty$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ gegen $D^\alpha u$.

Beweis. Es gilt für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle D^\alpha u_n, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u_n, D^\alpha \phi \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle = \langle D^\alpha u, \phi \rangle \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

also $D^\alpha u_n \rightarrow D^\alpha u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. \square

• **Faltung mit Testfunktion.** Für die Lösung von partiellen Differentialgleichungen benötigen wir noch den Begriff der *Faltung* oder *Konvolution*. Sie ist für Funktionen $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$(\psi * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y)\phi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\phi(x-y)dy.$$

Es gilt $\psi * \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $D^\alpha(\psi * \phi) = \psi * (D^\alpha \phi) = (D^\alpha \psi) * \phi$. Außerdem ist die Faltung kommutativ. Wir definieren $L(\phi) = \psi * \phi$ und rechnen

$$\begin{aligned} \langle L(\phi), \chi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (\psi * \phi)(x)\chi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\psi(x-z)}_{=(R\psi)(z-x)} \phi(z)\chi(x)dzdx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (R\psi * \chi)(z)\phi(z)dz = \langle \phi, (R\psi) * \chi \rangle \end{aligned}$$

und daher ist $L^*(\chi) = R\psi * \chi$. Da die Konvergenz in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig ist, sind sowohl L als auch L^* stetig. Satz 3.9 kann also angewendet werden, und durch

$$\langle \psi * u, \phi \rangle = \langle u, (R\psi) * \phi \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \psi, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

wird eine Distribution definiert. In ähnlicher Weise kann $u * \psi$ definiert werden, und man kann $u * \psi = \psi * u$ beweisen. Außerdem kann $\psi * u$ differenziert werden:

Lemma 3.13. Seien $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$D^\alpha(\psi * u) = (D^\alpha \psi) * u = \psi * D^\alpha u.$$

Beweis. Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Die Definition der Faltung sowie die Eigenschaft $D^\alpha(R\psi) = (-1)^{|\alpha|} R(D^\alpha \psi)$ ergeben

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha(\psi * u), \phi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle \psi * u, D^\alpha \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, (R\psi) * (D^\alpha \phi) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha(R\psi) * \phi \rangle = \langle u, R(D^\alpha \psi) * \phi \rangle = \langle D^\alpha \psi * u, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Dies beweist $D^\alpha(\psi * u) = (D^\alpha \psi) * u$. Die andere Gleichheit zeigt man analog. \square

Beispiel 3.14. Es gilt für die Delta-Distribution $\psi * \delta = \psi$, denn für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ folgt

$$\langle \psi * \delta, \phi \rangle = \langle \delta, (R\psi) * \phi \rangle = ((R\psi) * \phi)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\phi(x)dx = \langle \psi, \phi \rangle.$$

Diese Eigenschaft spielt eine wichtige Rolle bei der Bestimmung von Fundamentallösungen, die wir im nächsten Abschnitt einführen. \square

3.3 Fundamentallösungen

Ziel dieses Abschnitts ist die Lösung von partiellen Differentialgleichungen

$$L(u) = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

wobei L ein linearer formaler Differentialoperator der Ordnung k auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist,

$$L(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha \phi, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

und $c_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Definition 3.15. Der *formal adjungierte Operator* ist definiert durch

$$L^*(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (c_\alpha \phi), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Operatoren mit der Eigenschaft $L = L^*$ heißen *formal selbstadjungiert*.

Beispiele formal selbstadjungierter Operatoren sind

$$L = \Delta, \quad L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta.$$

Der formal adjungierte Operator ergibt sich durch partielle Integration, indem man alle Ableitungen auf die Testfunktion anwendet. Randintegrale verschwinden hierbei, da die Testfunktionen kompakten Träger in \mathbb{R}^n besitzen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(\phi)\psi dx = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} c_\alpha (D^\alpha \phi)\psi dx = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \phi D^\alpha (c_\alpha \psi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi L^*(\psi) dx.$$

Der Operator L^* ist daher die adjungierte Abbildung im Sinne von Satz 3.9. Wir können folglich die Anwendung von L auf eine Distribution definieren durch

$$\langle L(u), \phi \rangle = \langle u, L^*(\phi) \rangle, \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Dies erlaubt die Definition verschiedener Lösungsbegriffe für die Differentialgleichung $L(u) = f$.

Definition 3.16. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(i) Die Funktion u heißt *klassische Lösung* von $L(u) = f$, wenn $u \in C^k(\Omega)$ und wenn sie die Differentialgleichung für alle $x \in \Omega$ löst.

(ii) Die Abbildung u heißt *distributionelle Lösung* von $L(u) = f$, wenn $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und wenn $L(u) = f$ im Distributionensinne gilt, d.h. $\langle L(u) - f, \phi \rangle = 0$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(iii) Eine distributionelle Lösung u , die in Ω lokal integrierbar ist, heißt *schwache Lösung* von $L(u) = f$.

Das folgende Lemma zeigt, dass der Begriff der distributionellen Lösung eine Erweiterung des klassischen Lösungsbegriffs ist.

Lemma 3.17. Jede klassische Lösung der Differentialgleichung $L(u) = f$ ist auch eine distributionelle Lösung. Ist umgekehrt u eine distributionelle Lösung und $u \in C^k(\Omega)$, so ist sie auch eine klassische Lösung.

Beweis. Sei $u \in C^k(\Omega)$ eine klassische Lösung von $L(u) = f$. Dann folgt für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle L(u) - f, \phi \rangle = \int_{\Omega} (L(u) - f)\phi dx = 0.$$

Also ist u eine distributionelle Lösung. Sei umgekehrt $u \in C^k(\Omega)$ eine distributionelle Lösung von $L(u) = f$. Dann erhalten wir für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$0 = \langle L(u) - f, \phi \rangle = \int_{\Omega} (L(u) - f)\phi dx.$$

Dies impliziert nach Lemma 1.9 $L(u) = f$ in Ω . □

Wesentlich für die Lösung der Differentialgleichung ist der Begriff der Fundamentallösung.

Definition 3.18. Seien L ein linearer formaler Differentialoperator wie zu Beginn dieses Abschnitts und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen eine distributionelle Lösung von

$$L(U_{\xi}) = \delta_{\xi},$$

wobei δ_{ξ} die verschobene Delta-Distribution aus Beispiel 3.10 ist, *Fundamentallösung von L mit Pol in ξ* .

Beispiel 3.19. Wir zeigen, dass die Funktion $g(\cdot, \xi)$ für gegebenes $\xi \in \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x, \xi) = \begin{cases} x(\xi - 1) & : x \leq \xi \\ \xi(x - 1) & : x > \xi, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

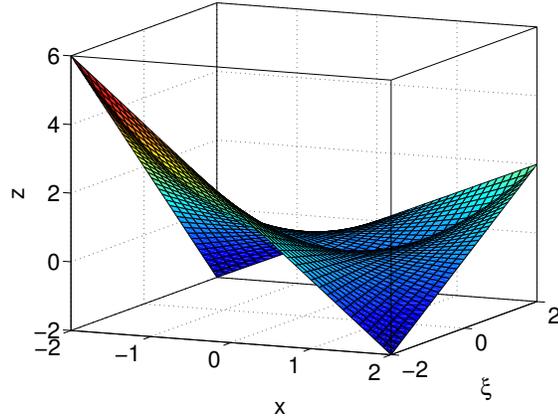


Abbildung 3.5: Fundamentallösung $g(x, \xi)$ aus Beispiel 3.19.

eine Fundamentallösung von d^2/dx^2 mit Pol in ξ ist (siehe Abbildung 3.5). Dazu rechnen wir für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle g'', \phi \rangle &= \langle g, \phi'' \rangle = \int_{-\infty}^{\xi} x(\xi - 1)\phi''(x)dx + \int_{\xi}^{\infty} \xi(x - 1)\phi''(x)dx \\ &= (\xi - 1)\left([x\phi'(x)]_{-\infty}^{\xi} - \int_{-\infty}^{\xi} \phi'(x)dx\right) + \xi\left([(x - 1)\phi'(x)]_{\xi}^{\infty} - \int_{\xi}^{\infty} \phi'(x)dx\right) \\ &= (\xi - 1)(\xi\phi'(\xi) - \phi(\xi)) + \xi(-(\xi - 1)\phi'(\xi) + \phi(\xi)) = \phi(\xi). \end{aligned}$$

Wegen $\langle \delta_{\xi}, \phi \rangle = \phi(\xi)$ folgt die Behauptung. \square

Fundamentallösungen liefern distributionelle Lösungen von $L(u) = f$, falls L ein Differentialoperator mit *konstanten* Koeffizienten ist. Dies wird im folgenden Satz präzisiert.

Theorem 3.20. Seien L ein linearer formaler Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und U_0 eine Fundamentallösung mit Pol in null.

- (i) Dann ist $\tau_{-\xi}U_0$ eine Fundamentallösung mit Pol in ξ .
- (ii) Ist $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, so ist $u = U_0 * f$ eine distributionelle Lösung von $L(u) = f$.

Beweis. (i) Sei $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle L(\tau_{-\xi}U_0), \phi \rangle &= \langle \tau_{-\xi}U_0, L^*(\phi) \rangle = \langle U_0, \tau_{\xi}L^*(\phi) \rangle \stackrel{*}{=} \langle U_0, L^*(\tau_{\xi}\phi) \rangle \\ &= \langle L(U_0), \tau_{\xi}\phi \rangle = \langle \delta_0, \tau_{\xi}\phi \rangle = \langle \delta_{\xi}, \phi \rangle. \end{aligned}$$

Die Gleichheit “ $*$ ” gilt nur bei konstanten Koeffizienten, da der Operator τ_{ξ} dann nur auf die Testfunktion ϕ wirkt. Wir erhalten $L(\tau_{-\xi}U_0) = \delta_{\xi}$, d.h., $\tau_{-\xi}U_0$ ist eine Fundamentallösung mit Pol in ξ .

(ii) Da L konstante Koeffizienten besitzt, folgt aus Lemma 3.13 und dann aus Beispiel 3.14

$$L(U_0 * f) = L(U_0) * f = \delta_0 * f = f.$$

Dies zeigt, dass $U_0 * f$ eine distributionelle Lösung ist. \square

Nach dem Satz von Ehrenpreis-Malgrange existiert zu jedem linearen formalen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten eine Fundamentallösung. Der Beweis ist recht aufwendig und verwendet den Fortsetzungssatz von Hahn-Banach. Wir verweisen für Details auf Hörmander [10].

In einigen Fällen ist es möglich, eine Fundamentallösung zu finden, die durch eine Funktion repräsentiert wird. Welche Gleichung sollte diese Fundamentallösung erfüllen? Sei $\tau_{-\xi}U_0$ eine Fundamentallösung mit Pol in ξ . Dann folgt

$$\phi(\xi) = \langle \delta_\xi, \phi \rangle = \langle L(\tau_{-\xi}U_0), \phi \rangle = \langle \tau_{-\xi}U_0, L^*(\phi) \rangle.$$

Lässt sich nun $\tau_{-\xi}U_0$ durch eine Funktion $U(x, \xi)$ darstellen, so muss die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(x, \xi)(L^*(\phi))(x)dx = \phi(\xi) \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (3.4)$$

erfüllt sein. Diese Formel werden wir im folgenden Kapitel zur Bestimmung von Fundamentallösungen elliptischer Gleichungen verwenden.

4 Die Poisson-Gleichung

4.1 Fundamentallösung und Greensche Funktion

In diesem Abschnitt suchen wir eine Fundamentallösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

und eine Lösung des Dirichlet-Randwertproblems

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ sei. Wegen Satz 3.20 (i) genügt es, eine Fundamentallösung mit Pol in null zu bestimmen, d.h. eine distributionelle Lösung von $\Delta u = \delta$. Nach Beispiel 3.8 gilt $\delta = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir suchen also eine Funktion, die die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ erfüllt und eine Singularität in null hat.

Die Symmetrie des Problems macht die Verwendung sphärischer Koordinaten plausibel. Dazu müssen wir den Laplace-Operator in sphärischen Koordinaten formulieren.

Sei dazu $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ und schreibe $v(r) = u(x)$. Wir rechnen

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = v'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = v'(r) \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = v'(r) \frac{x_i}{r},$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v'(r) \frac{x_i}{r} \right) = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \frac{1}{r} - v'(r) \frac{x_i}{r} \frac{x_i}{r^2}.$$

Damit erhalten wir

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = v''(r) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \frac{n}{r} - v'(r) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{r^3} = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Die Gleichung $\Delta u = 0$ wird eine gewöhnliche Differentialgleichung,

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0,$$

die für alle $r > 0$ (also ohne den Ursprung) zu lösen ist. Wenn $v'(r) \neq 0$, folgt nach Division durch $v'(r)$

$$\frac{1-n}{r} = \frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{d}{dr} \ln |v'|$$

und daher nach Integration $\ln |v'| = (1-n) \ln r + c_0$ und folglich $v'(r) = c_1 r^{1-n}$ für

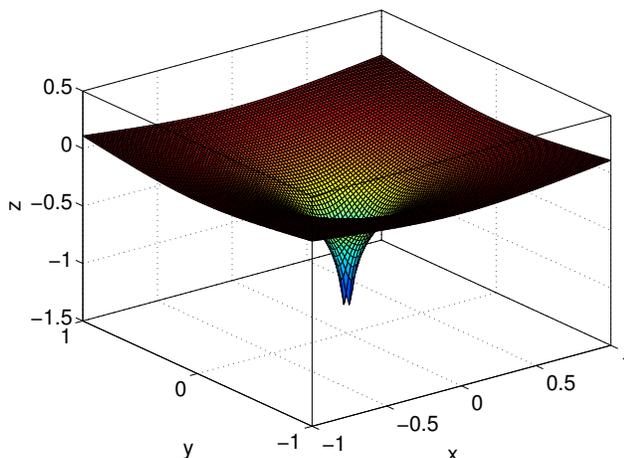


Abbildung 4.1: Fundamentallösung des Laplace-Operators für $n = 2$.

beliebige Konstante $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$. Wir erhalten folgende Lösungen:

$$v(r) = \begin{cases} c_2 \ln r + c_3 & : n = 2 \\ c_2 r^{2-n} + c_3 & : n \geq 3, \end{cases}$$

wobei $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Wegen der Singularität im Ursprung liegt die Vermutung nahe, dass $v(r)$ für spezielle Konstanten c_2 und c_3 eine Fundamentallösung liefert. Der folgende Satz zeigt, dass dies tatsächlich der Fall ist (siehe Abbildung 4.1).

Theorem 4.1. Die lokal integrierbare Funktion

$$U(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln r & : n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)S_n} r^{2-n} & : n \geq 3 \end{cases}$$

ist eine Fundamentallösung des Laplace-Operators mit Pol 0.

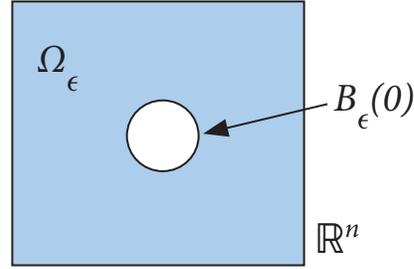
In dem Satz ist

$$S_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$$

die Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^n und $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ die Gamma-Funktion. Insbesondere ist $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ und $S_3 = 4\pi$. Den Fall $n = 1$ haben wir übrigens bereits in Beispiel 3.19 behandelt.

Beweis. Die Funktion $U(r) = U(|x|)$ ist auf \mathbb{R}^n lokal integrierbar, denn in sphärischen Koordinaten lautet das Integral über den Radialanteil

$$\int_0^1 U(r) r^{n-1} dr,$$

Abbildung 4.2: Zur Definition von Ω_ε .

und dieses Integral existiert für alle $n \geq 2$. Damit ist $U(r)$ eine reguläre Distribution. Wir müssen also gemäß der Formel (3.4), nämlich $\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x, \xi) L^*(\phi)(x) dx$ für $\xi = 0$, zeigen, dass für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\phi(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} U \Delta \phi dx \quad (4.1)$$

gilt, wobei $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$ (siehe Abbildung 4.2). Der Grenzwert ist notwendig, da U im Ursprung eine Singularität aufweist. Wir integrieren zweimal partiell gemäß dem Satz von Gauß:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} U \Delta \phi dx &= - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla U \cdot \nabla \phi dx + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} U \nabla \phi \cdot \nu ds \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta U \phi dx + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} (U \nabla \phi \cdot \nu - \phi \nabla U \cdot \nu) ds. \end{aligned}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite verschwindet, da nach Konstruktion $\Delta U = 0$ in Ω_ε . Es bleiben also nur die beiden Randintegrale abzuschätzen.

Die äußere Normale an $\partial \Omega_\varepsilon$ ist gleich der negativen äußeren Normalen an $B_\varepsilon(0)$, die in Radialrichtung weist. Daher ist $\nabla U \cdot \nu = \partial U / \partial \nu = -dU/dr$. Die Abschätzung

$$\left| \int_{\partial \Omega_\varepsilon} U \nabla \phi \cdot \nu ds \right| \leq |U(\varepsilon)| \text{meas}(\partial \Omega_\varepsilon) \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\nabla \phi(x)| = |U(\varepsilon)| \varepsilon^{n-1} S_n \max_{x \in \mathbb{R}^n} |\nabla \phi(x)|$$

zeigt, dass das Integral für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen null konvergiert. Hierbei ist $\text{meas}(\partial \Omega_\varepsilon) = \varepsilon^{n-1} S_n$ das Maß (engl.: measure) des Randes von Ω_ε . Für das andere Randintegral verwenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung: Es existiert ein $x_\varepsilon \in \partial B_\varepsilon(0)$, so dass

$$- \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \phi \nabla U \cdot \nu ds = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \phi \frac{dU}{dr} ds = \phi(x_\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{dU}{dr} ds = \phi(x_\varepsilon) \frac{dU}{dr}(\varepsilon) \int_{\partial B_\varepsilon(0)} ds,$$

denn dU/dr ist konstant auf $\partial B_\varepsilon(0)$. Die Oberfläche von $\partial B_\varepsilon(0) = \partial \Omega_\varepsilon$ ist gleich $\varepsilon^{n-1} S_n$. Andererseits gilt

$$\frac{dU}{dr}(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} & : n = 2 \\ \frac{1}{S_n} \varepsilon^{1-n} & : n \geq 3 \end{cases} = \frac{1}{S_n} \varepsilon^{1-n}.$$

Wir schließen

$$-\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \phi \nabla U \cdot \nu ds = \phi(x_\varepsilon).$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt $x_\varepsilon \rightarrow 0$ und damit $\phi(x_\varepsilon) \rightarrow \phi(0)$. Dies beweist (4.1). \square

Mit Hilfe von Satz 3.20 aus dem vorigen Abschnitt können wir eine Lösung der Poisson-Gleichung bestimmen.

Theorem 4.2. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Das *Newton-Potential*

$$N(x) = (U * f)(x) = \int_{\Omega} U(|x - y|) f(y) dy \quad (4.2)$$

ist eine klassische Lösung von $\Delta u = f$ in Ω .

Beweis. Aus Satz 3.20 folgt, dass $U * f$ eine distributionelle Lösung der Poisson-Gleichung ist. Mit den Resultaten aus Abschnitt 3.2 folgt für alle $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle U * f, \phi \rangle = \langle U, \phi * Rf \rangle = \int_{\Omega} U(|y|) (\phi * Rf)(y) dy = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} U(|y|) f(x - y) \phi(x) dx dy,$$

wobei $(Rf)(x) = f(-x)$ und die zweite Gleichheit wegen $U \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ folgt. Daher ist

$$(U * f)(x) = \int_{\Omega} U(|y|) f(x - y) dy = \int_{\Omega} U(|x - z|) f(z) dz.$$

Weil $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, können wir $U * f$ differenzieren, und es gilt $U * f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Daher ist $U * f$ eine klassische Lösung. \square

Das Newtonsche Potential löst die Poisson-Gleichung, erfüllt aber nicht unbedingt vorgegebene Dirichlet-Randbedingungen. Um dies zu erreichen, benötigen wir den Begriff der Greenschen Funktion.

Definition 4.3. Die *Greensche Funktion* (erster Art) G ist definiert durch

$$G(x, y) = U(|x - y|) - h_x(y), \quad x, y \in \Omega, \quad x \neq y,$$

wobei U die in Satz 4.1 definierte Fundamentallösung des Laplace-Operators und h_x die (stetige) Lösung von

$$\Delta h_x = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad h_x(y) = U(|x - y|) \quad \text{für } y \in \partial\Omega, \quad (4.3)$$

sind.

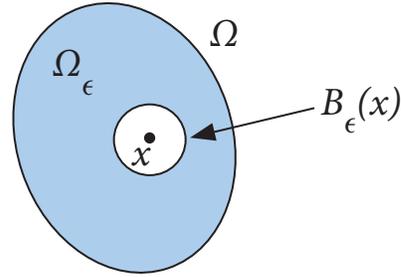


Abbildung 4.3: Zur Definition von Ω_ϵ .

Die Greensche Funktion G ist für festes $x \in \Omega$ also eine Fundamentallösung des Laplace-Operators, die zusätzlich homogene Dirichlet-Randbedingungen erfüllt:

$$\Delta G(x, \cdot) = \delta_x \quad \text{in } \Omega, \quad G(x, \cdot) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (4.4)$$

Kennt man eine solche Funktion, dann kann man eine explizite Formel für $C^2(\overline{\Omega})$ -Lösungen des Dirichletproblems der Poisson-Gleichung angeben. Dies führt auf die folgende *Repräsentationsformel*.

Theorem 4.4 (Repräsentationsformel für das Dirichlet-Problem). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $f \in C^0(\overline{\Omega})$, $g \in C^0(\partial\Omega)$, und sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Dirichlet-Randwertproblems*

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dann folgt

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) ds(y) + \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy, \quad x \in \Omega. \quad (4.5)$$

Die Normalenableitung $\partial G / \partial \nu$ ist definiert durch $\nabla_y G(x, y) \cdot \nu(y)$, wobei ν der äußere Normalenvektor an $y \in \partial\Omega$ ist. Wir bemerken, dass im Allgemeinen für beliebige Funktionen $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $g \in C^0(\partial\Omega)$ durch (4.5) *nicht* eine Lösung des klassischen Dirichletproblems gegeben sein muss.

Beweis. Wegen der Singularität von $U(|x - y|)$ an $x = y$ können wir nicht ohne weiteres in Integralen über \mathbb{R}^n partiell integrieren. Daher definieren wir ähnlich wie im Beweis von Satz 4.1 für ein beliebiges $x \in \Omega$ die Menge $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{B_\epsilon(x)}$. Integrieren wir zweimal partiell wie im Beweis von Satz 4.1, so erhalten wir wegen $\Delta U = 0$ in Ω_ϵ und $\partial\Omega_\epsilon = \partial\Omega \cup \partial B_\epsilon(x)$

$$\int_{\Omega_\epsilon} U(|x - y|) \Delta u(y) dy = \int_{\partial\Omega} \left(U \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) ds + \int_{\partial B_\epsilon(x)} \left(U \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) ds,$$

wobei $U = U(|x - y|)$. Das Randintegral über $\partial B_\epsilon(x)$ kann wie im Beweis von Satz 4.1 behandelt werden, und wir erhalten im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ wegen " $\Omega_\epsilon \rightarrow \Omega$ " den Wert

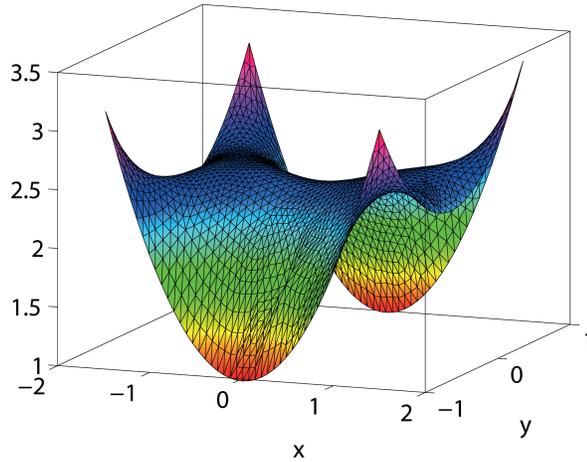


Abbildung 4.4: Lösung des Randwertproblems $\Delta u = 2$ in $\Omega = [-1.5, 1.5] \times [-1, 1]$, $u = x^2 + y^2$ auf $\partial\Omega$.

$u(x)$. Daher folgt

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \left(U \frac{\partial u}{\partial v} - u \frac{\partial U}{\partial v} \right) ds + \int_{\Omega} U(|x - y|) \Delta u(y) dy. \quad (4.6)$$

Da die Funktion h_x , definiert in (4.3), harmonisch ist, erhalten wir durch zweimalige partielle Integration

$$0 = - \int_{\Omega} u \Delta h_x dy = - \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial h_x}{\partial v} - h_x \frac{\partial u}{\partial v} \right) ds - \int_{\Omega} h_x \Delta u dy. \quad (4.7)$$

Addieren wir (4.6) und (4.7), so folgt

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_{\partial\Omega} \left(\underbrace{(U - h_x)}_{=0} \frac{\partial u}{\partial v} - u \frac{\partial}{\partial v} \underbrace{(U - h_x)}_{=G(x, \cdot)} \right) ds + \int_{\Omega} \underbrace{(U(|x - y|) - h_x)}_{=G(x, \cdot)} \Delta u dy \\ &= \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial}{\partial v} G(x, \cdot) ds + \int_{\Omega} G(x, \cdot) f dy \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. \square

Im Allgemeinen ist es schwierig, die Greensche Funktion explizit zu bestimmen, und man benötigt numerische Verfahren. In Abbildung 4.4 stellen wir die Lösung des Randwertproblems $\Delta u = f$ in Ω , $u = g$ auf $\partial\Omega$ mit $\Omega = [-1.5, 1.5] \times [-1, 1]$, $f(x, y) = 2$ und $g(x, y) = x^2 + y^2$ dar. Die rechte Seite f kann als eine Kraft interpretiert werden, die auf den Graphen von u wirkt, im Beispiel als eine konstante Kraft in Richtung der positiven z -Achse. Der Graph wölbt sich daher in der Nähe des Ursprungs leicht nach oben.

Bei Problemen mit sehr einfacher Geometrie kann die Greensche Funktion explizit berechnet werden. Wir betrachten im folgenden Abschnitt zwei einfache Beispiele.

4.2 Greensche Funktionen für die Halbebene und für Kugeln

Wir wollen die Greensche Funktion für die zweidimensionale Halbebene $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ und die n -dimensionale Kugel bestimmen. Die Hauptschwierigkeit ist die Berechnung der Funktion h_x . Hierfür verwenden wir die sogenannte *Spiegelungsmethode*. Diese Technik wird insbesondere in der Elektrotechnik angewendet, um das elektrische Potential für Punktladungen innerhalb eines Gebiets mit geeigneten "Scheinladungen" außerhalb des Gebiets zu konstruieren.

• **Greensche Funktion für die Halbebene.** Wir verwenden die Fundamentallösung im \mathbb{R}^2 ,

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0, 0).$$

Die Idee der Spiegelungsmethode lautet, für $h_{(x,y)}$ die Fundamentallösung mit einem Pol außerhalb des betrachteten Gebiets zu verwenden, nämlich durch Spiegelung am Rand des Gebiets. Wir ziehen also von der Fundamentallösung mit Pol in (ξ, η) (mit $\eta > 0$) den an der x -Achse gespiegelten Pol $(\xi, -\eta)$ ab (siehe Abbildung 4.5):

$$\begin{aligned} G(x, y, \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \left(\ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2) - \ln((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2) \right) \end{aligned}$$

Diese Funktion hat weiterhin nur den Pol (ξ, η) im Gebiet $y > 0$ und ist daher eine Fundamentallösung in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. Ferner erfüllt G homogene Randbedingungen, $G(x, y, \xi, 0) = 0$. Der äußere Normalenvektor an $y > 0$ weist in negativer y - bzw. η -Richtung. Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y, \xi, 0) &= -\frac{\partial G}{\partial \eta}(x, y, \xi, 0) = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{-2(y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} - \frac{2(y + \eta)}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2} \right]_{\eta=0} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2}, \end{aligned}$$

und aus der Repräsentationsformel (4.5) folgt für $f = 0$

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y, \xi, 0) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y g(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi.$$

Wir zeigen, dass diese Funktion tatsächlich das Dirichletproblem des Laplaceoperators löst:

Theorem 4.5. Sei $g \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Die Funktion

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y g(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0, \quad (4.8)$$

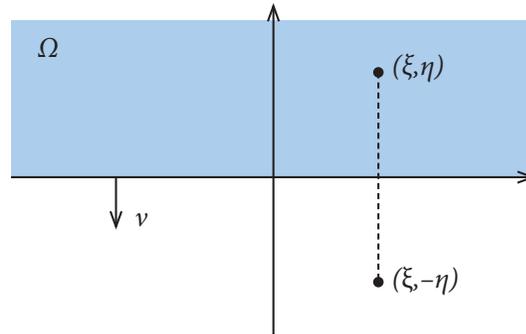


Abbildung 4.5: Zur Konstruktion der Greenschen Funktion für die Halbebene.

löst das Dirichlet-Randwertproblem

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad u = g \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Die Beziehung (4.8) wird die *Poissonsche Integralformel* für die Halbebene genannt. Die Funktion $K(x, y, \xi) = y/(\pi((x - \xi)^2 + y^2))$ heißt der *Poisson-Kern* für die Halbebene. Man kann zeigen, dass u auf der Halbebene beliebig oft differenzierbar und beschränkt ist (siehe Evans, Seite 38 [7]). Letzteres folgt für $x \in \mathbb{R}, y > 0$ aus

$$|u(x, y)| \leq \frac{1}{\pi} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{\xi^2 + y^2} d\xi = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Wir bemerken außerdem, dass (4.8) *nicht* eindeutig ist; auch $u(x, y) + cy$ mit $c \in \mathbb{R}$ sind Lösungen. Um Eindeutigkeit der Lösung zu erhalten, ist es notwendig, das Verhalten für $y \rightarrow \infty$ vorzugeben.

Beweis. Wir gehen wie in Evans, Seite 38 [7] vor. Da $G(x, y, \cdot, \cdot)$ eine Fundamentallösung ist, ist $(\xi, \eta) \mapsto G(x, y, \xi, \eta)$ harmonisch für $(x, y) \neq (\xi, \eta)$. Die explizite Darstellung von G zeigt, dass G symmetrisch ist, $G(x, y, \xi, \eta) = G(\xi, \eta, x, y)$. Also ist auch $(x, y) \mapsto G(x, y, \xi, \eta)$ harmonisch für $(x, y) \neq (\xi, \eta)$. Dann ist auch $K(x, y, \xi) = -\partial G(x, y, \xi, 0)/\partial \eta$ harmonisch in $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ und

$$\Delta u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \Delta_{(x,y)} K(x, y, \xi) d\xi = 0, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Es bleibt zu zeigen, dass u die Dirichlet-Randwerte erfüllt, d.h. $u(x, y) \rightarrow g(x_0)$ für $x \rightarrow x_0, y \rightarrow 0$. Hierfür wählen wir $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Da g stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|x_0 - \xi| < \delta$

$$|g(x_0) - g(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.9}$$

erfüllt ist. Eine direkte Rechnung zeigt, dass $\int_{\mathbb{R}} K(x, y, \xi) d\xi = 1$ gilt. Dann folgt für $x \in \mathbb{R}, y > 0$ mit $|x - x_0| < \delta/2$

$$|u(x, y) - g(x_0)| = \left| \int_{\mathbb{R}} K(x, y, \xi) (g(\xi) - g(x_0)) d\xi \right|$$

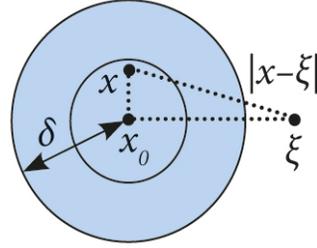


Abbildung 4.6: Illustration für den Beweis der Poissonschen Integralformel.

$$\begin{aligned} &\leq \int_{|\xi-x_0|<\delta} K(x, y, \xi) |g(\xi) - g(x_0)| d\xi \\ &\quad + \int_{|\xi-x_0|\geq\delta} K(x, y, \xi) |g(\xi) - g(x_0)| d\xi. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite können wir wegen (4.9) wie folgt abschätzen:

$$\int_{|\xi-x_0|<\delta} K(x, y, \xi) |g(\xi) - g(x_0)| d\xi \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} K(x, y, \xi) d\xi = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus $|x - x_0| < \delta/2$ und $|\xi - x_0| \geq \delta$ folgt (siehe Abbildung 4.6)

$$|\xi - x_0| \leq |\xi - x| + |x - x_0| < |\xi - x| + \frac{\delta}{2} \leq |\xi - x| + \frac{1}{2}|\xi - x_0|$$

und daher $|x - \xi| > \frac{1}{2}|\xi - x_0|$. Damit können wir das zweite Integral in (4.10) abschätzen:

$$\begin{aligned} \int_{|\xi-x_0|\geq\delta} K(x, y, \xi) |g(\xi) - g(x_0)| d\xi &\leq 2 \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |g(\xi)| \frac{1}{\pi} \int_{|\xi-x_0|\geq\delta} \frac{y}{(x-\xi)^2} d\xi \\ &\leq \frac{8y}{\pi} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |g(\xi)| \int_{|\xi-x_0|\geq\delta} \frac{d\xi}{(\xi-x_0)^2}. \end{aligned}$$

Da das Integral auf der rechten Seite beschränkt ist, konvergiert die rechte Seite für $y \rightarrow 0$ gegen null. Für hinreichend kleines $y > 0$ ist die rechte Seite also kleiner als $\varepsilon/2$, so dass sich aus (4.10) ergibt:

$$|u(x, y) - g(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

• **Greensche Funktion für Kugeln.** Um die Greensche Funktion zu konstruieren, verwenden wir wieder die Spiegelungsmethode. Wir spiegeln durch den Rand der Kugel $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit Radius $R > 0$. Genauer definieren wir für $x \in B_R(0)$ den an $\partial B_R(0)$ gespiegelten Punkt

$$\bar{x} = \frac{R^2}{|x|^2} x.$$

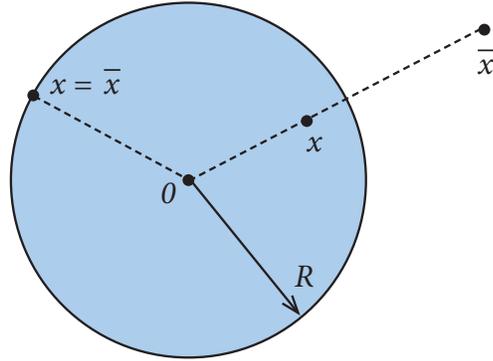


Abbildung 4.7: Zur Konstruktion der Greenschen Funktion für eine Kugel mit Radius R .

Punkte auf dem Rand $\partial B_R(0)$ werden wieder auf den Rand abgebildet und das Bild des Ursprungs ist unbeschränkt (siehe Abbildung 4.7). Wir definieren die Greensche Funktion wie folgt:

$$G(x, y) = \begin{cases} U(|x - y|) - U\left(\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}|\right) & : y \neq 0 \\ U(|x - y|) - U(R) & : y = 0, \end{cases}$$

wobei $x, y \in B_R(0)$, $x \neq y$, und U ist die in Satz 4.1 definierte Fundamentallösung des Laplace-Operators. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{|y|}{R}|x - \bar{y}| &= \sqrt{\frac{|y|^2}{R^2} \left| x - \frac{R^2}{|y|^2} y \right|^2} \\ &= \sqrt{\frac{|y|^2}{R^2} \left(|x|^2 + \frac{R^4}{|y|^4} |y|^2 - 2x \cdot y \frac{R^2}{|y|^2} \right)} = \sqrt{\frac{|x|^2 |y|^2}{R^2} + R^2 - 2x \cdot y} \end{aligned}$$

können wir G für $y \neq x$ auch schreiben als

$$G(x, y) = U\left(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y}\right) - U\left(\sqrt{\frac{|x|^2 |y|^2}{R^2} + R^2 - 2x \cdot y}\right). \quad (4.11)$$

Bemerkung. Die Greensche Funktion kann mit Hilfe des elektrischen Potentials im dreidimensionalen Raum motiviert werden. Wir machen für $y \in \mathbb{R}^3$ den Ansatz

$$\phi_y(x) = \frac{q}{|x - y|} + \frac{\bar{q}}{|x - \bar{y}|},$$

wobei ϕ das elektrische Potential, q eine Punktladung an der Stelle y und \bar{q} eine "Scheinladung" an der Stelle \bar{y} (ohne physikalische Einheiten) seien. Wir wollen \bar{y} und \bar{q} aus der Forderung $\phi_y(x) = 0$ für alle $|x| = R$ bestimmen. Physikalisch bedeutet dies, dass wir die "Scheinladung" so platzieren, dass das elektrische Potential am Kugelrand verschwindet. Aus $\phi_y(x) = 0$ folgt

$$\frac{q^2}{|x - y|^2} = \frac{\bar{q}^2}{|x - \bar{y}|^2}.$$

Formen wir diesen Bruch um, erhalten wir

$$q^2(|x|^2 + |\bar{y}|^2 - 2x \cdot \bar{y}) = \bar{q}^2(|x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y)$$

oder wegen $|x| = R$

$$q^2(|\bar{y}|^2 + R^2) - \bar{q}^2(|y|^2 + R^2) = -2(\bar{q}^2 y - q^2 \bar{y}) \cdot x. \quad (4.12)$$

Diese Gleichung soll für alle $x \in \partial B_R(0)$ gelten, aber die linke Seite hängt nicht von x ab. Es ist daher sinnvoll, beide Seiten gleich null zu setzen:

$$\frac{q^2}{\bar{q}^2} = \frac{|y|^2 + R^2}{|\bar{y}|^2 + R^2} \quad \text{und} \quad \frac{q^2}{\bar{q}^2} = \frac{|y|}{|\bar{y}|}. \quad (4.13)$$

Wir können q und \bar{q} eliminieren, indem wir beide Gleichungen gleichsetzen:

$$\frac{|y|}{|\bar{y}|} = \frac{|y|^2 + R^2}{|\bar{y}|^2 + R^2}, \quad \text{also} \quad |y|(|\bar{y}|^2 + R^2) = |\bar{y}|(|y|^2 + R^2)$$

bzw. nach Umformulierung

$$(|y| - |\bar{y}|)(R^2 - |y||\bar{y}|) = 0.$$

Eine Lösung ist $|y| = |\bar{y}|$. Dies ergibt wegen (4.13) $q^2 = \bar{q}^2$ und wegen (4.12) $q^2(y - \bar{y}) \cdot x = 0$ für alle x , woraus sich $y = \bar{y}$ ergibt. Falls $q = -\bar{q}$, so folgt die triviale Lösung $\phi_y(x) = 0$. Falls $q = \bar{q}$, erhalten wir $\phi_y(x) = 2q/|x - y| \neq 0$ für $|x| = R$, was der Forderung $\phi_x(y) = 0$ für $|x| = R$ widerspricht. Daher muss die andere Lösung $R^2 = |y||\bar{y}|$ gelten. Geometrisch liegen wegen (4.12) y und \bar{y} auf einer Linie, also ist

$$\bar{y} = \frac{R^2}{|y|^2} y.$$

Setzen wir diese Beziehung in die zweite Gleichung von (4.13) ein, so erhalten wir $q^2/\bar{q}^2 = |y|^2/R^2$ und folglich $\bar{q} = -qR/|y|$. Wir fassen zusammen:

$$\phi_y(x) = \frac{q}{|x - y|} - \frac{q}{\frac{|y|}{R}|x - \bar{y}|}.$$

Dies entspricht gerade (für $q = 1$) der Greenschen Funktion $G(x, y)$ im \mathbb{R}^3 . \square

Es gelten die folgenden Eigenschaften.

Lemma 4.6. Für die Greensche Funktion (4.11) gilt für alle $x, y \in \overline{B_R(0)}$

$$G(x, y) = G(y, x) \quad \text{und} \quad G(x, y) \leq 0.$$

Beweis. Die Symmetrie von G folgt aus der Symmetrie des Skalarprodukts und der Darstellung (4.11). Die zweite Eigenschaft folgt aus der Ungleichung

$$|x|^2 + |y|^2 = \frac{|x|^2|y|^2}{R^2} + \underbrace{|x|^2}_{\leq R^2} \left(1 - \frac{|y|^2}{R^2}\right) + |y|^2 \leq \frac{|x|^2|y|^2}{R^2} + R^2 \quad \text{für alle } |x|, |y| \leq R$$

und der Tatsache, dass die Fundamentallösung U , definiert in Satz 4.1, monoton wachsend ist. \square

Wir können die Eigenschaften von G aus Lemma 4.6 physikalisch interpretieren. Dazu erinnern wir, dass $G(x, \cdot)$ die Differentialgleichung $\Delta G(x, \cdot) = \delta_x$ in $B_R(0)$ erfüllt und homogene Dirichlet-Randwerte hat (siehe (4.4)). Wir können $G(x, y)$ als die Temperatur an der Stelle y interpretieren, wenn sich an der Stelle x eine Temperatursenke befindet. Die durch die Senke verursachte Temperatur liegt unter der Randtemperatur, die gleich null ist: $G(x, y) \leq 0$ für $x, y \in B_R(0)$. Die Symmetrie von G bedeutet dann, dass die durch eine an der Stelle x befindliche Wärmesenke verursachte Temperatur an der Stelle y gleich ist der Temperatur an der Stelle x , die durch eine Senke an y verursacht wird.

Bevor wir das Dirichletproblem lösen, zeigen wir einige Eigenschaften für harmonische Funktionen, also für die Lösungen der Laplace-Gleichung.

Theorem 4.7. (i) Sei $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$ eine harmonische Funktion. Dann gilt die *Poisson-sche Integralformel* für Kugeln

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{RS_n} \int_{\partial B_R(0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} ds(y), \quad x \in B_R(0). \quad (4.14)$$

(ii) Eine in einer offenen Menge Ω harmonische Funktion liegt in $C^\infty(\Omega)$.

Dieser Satz zeigt zwei erstaunliche Eigenschaften harmonischer Funktionen. Teil (i) sagt aus, dass die Werte einer harmonischen Funktion in einer Kugel vollständig durch die Werte auf dem Kugelrand bestimmt sind. Teil (ii) drückt eine Regularisierungseigenschaft des Laplace-Operators aus: Erfüllt eine klassische Lösung u die Laplace-Gleichung, so ist sie automatisch unendlich oft differenzierbar. Beachte allerdings, dass u nicht notwendigerweise glatt bis zum Rand ist, d.h., dass $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *nicht* unbedingt gelten muss. Ähnlich wie bei der Halbebene wird die Funktion

$$K(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{RS_n |x - y|^n}$$

der *Poisson-Kern* für die Kugel genannt.

Beweis. Eine Rechnung zeigt, dass für $y \in \partial B_R(0)$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y} = \nabla_y G \cdot \frac{y}{R} = \frac{R^2 - |x|^2}{RS_n} \frac{1}{|x - y|^n}$$

gilt. Damit folgt Teil (i) aus der Repräsentationsformel (4.5). Um Teil (ii) zu beweisen, bemerken wir, dass der Poisson-Kern beliebig oft differenzierbar in $x \in B_R(0)$ ist (für $y \in \partial B_R(0)$), also gilt die Aussage für Kugeln. Bei einer beliebigen offenen Menge Ω

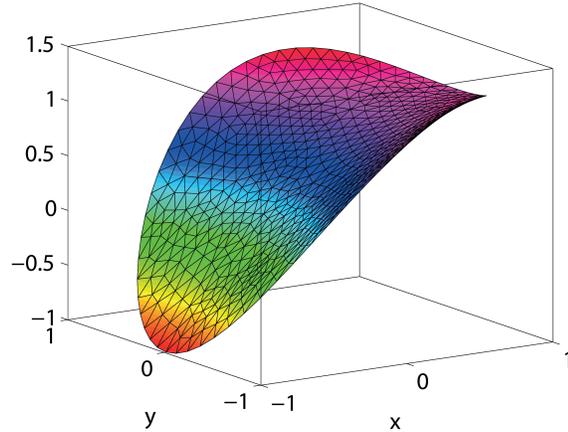


Abbildung 4.8: Lösung der Poissonschen Integralformel im Einheitskreis mit $g(x, y) = x + y^2$.

wählen wir $x \in \Omega$. Dann existiert eine Kugel mit Mittelpunkt x , die vollständig in Ω liegt. Wir können die Aussage auf diese Kugel anwenden und erhalten die Differenzierbarkeit an x . \square

Wie bei der Halbebene liefert die Poissonsche Integralformel eine klassische Lösung des Dirichlet-Problems.

Theorem 4.8. Sei $g \in C^0(\partial B_R(0))$. Dann ist

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{RS_n} \int_{\partial B_R(0)} \frac{g(y)}{|x - y|^n} ds(y)$$

eine Lösung von

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B_R(0), \quad u = g \quad \text{auf } \partial B_R(0).$$

Wir illustrieren die Lösung u in Abbildung 4.8, wobei wir $R = 1$ und $g(x, y) = x + y^2$ gewählt haben.

Beweis. Der Beweis ist ähnlich wie der Beweis von Satz 4.5. Es ist die Stetigkeit an den Randpunkten zu zeigen. Dazu bemerken wir, dass die Poissonsche Integralformel (4.14), angewendet auf $u = 1$, die Beziehung

$$\int_{\partial B_R(0)} K(x, y) ds(y) = 1 \tag{4.15}$$

ergibt. Seien nun $x_0 \in \partial B_R(0)$ und $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von g existiert $\delta > 0$, so dass aus $|y - x_0| < \delta$ folgt $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon/2$. Für alle $x \in B_R(0)$ mit $|x - x_0| < \delta/2$ folgt dann wegen (4.15)

$$|u(x) - g(x_0)| = \left| \int_{\partial B_R(0)} K(x, y)(g(y) - g(x_0)) ds \right|$$

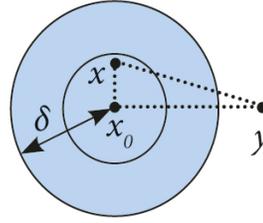


Abbildung 4.9: Illustration für den Beweis der Poissonschen Integralformel.

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{y \in \partial B_R(0), |y-x_0| < \delta} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| ds \\
 &\quad + \int_{y \in \partial B_R(0), |y-x_0| \geq \delta} K(x, y) |g(y) - g(x_0)| ds \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \sup_{z \in \partial B_R(0)} |g(z)| \frac{R^2 - |x|^2}{RS_n} \int_{|y-x_0| \geq \delta} \frac{ds(y)}{|x-y|^n}. \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Aus den Ungleichungen $|x-x_0| < \delta/2$ und $|y-x_0| \geq \delta$ folgt $|x-y| \geq |y-x_0| - |x_0-x| \geq \delta/2$ (siehe Abbildung 4.9), so dass das Integral auf der rechten Seite beschränkt ist:

$$\int_{|y-x_0| \geq \delta} \frac{ds(y)}{|x-y|^n} \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \int_{\partial B_R(0)} ds < \infty.$$

Für $|x-x_0| \rightarrow 0$ erhalten wir $R^2 - |x|^2 \rightarrow 0$. Also ist die rechte Seite von (4.16) für hinreichend kleines $|x-x_0|$ kleiner als $\varepsilon/2$. Dies beweist $u(x) \rightarrow g(x_0)$ für $x \rightarrow x_0$. \square

4.3 Maximumprinzip

In diesem Abschnitt beweisen wir weitere Eigenschaften für die Lösung der Laplace- oder Poisson-Gleichung. Zuerst zeigen wir, dass die Lösung der Laplace-Gleichung, ausgewertet an einem Punkt x , gleich dem Mittelwert der Funktion über die Oberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt x ist. Es gilt sogar mehr:

Theorem 4.9 (Mittelwerteigenschaft). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Für $u \in C^2(\Omega)$ gelte $\Delta u = 0$ in Ω . Dann gilt für alle $R > 0$ und $x \in \Omega$ mit $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ die *Mittelwerteigenschaft*:

$$u(x) = \frac{1}{S_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u ds = \frac{n}{S_n R^n} \int_{B_R(x)} u dy. \tag{4.17}$$

Falls $\Delta u \geq 0$ bzw. $\Delta u \leq 0$ in Ω , so gilt (4.17) mit " \leq " bzw. " \geq " anstelle des Gleichheitszeichens.

Beweis. Wir wählen sphärische Koordinaten mit Mittelpunkt $x_0 \in \Omega$, $r = |x-x_0|$,

$\omega = (x - x_0)/r$ und $0 < r \leq R$. Dann folgt aus dem Satz von Gauß

$$0 = \int_{B_r(x_0)} \Delta u dx = \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial r}(x_0 + r\omega) d\omega.$$

Division durch r^{n-1} und Integration von null bis R liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial B_1(0)} \int_0^R \frac{\partial u}{\partial r}(x_0 + r\omega) dr d\omega = \int_{\partial B_1(0)} (u(x_0 + R\omega) - u(x_0)) d\omega \\ &= \frac{1}{R^{n-1}} \int_{\partial B_R(0)} u(x_0 + \omega') d\omega' - u(x_0) \int_{\partial B_1(0)} d\omega \\ &= \frac{1}{R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u ds - S_n u(x_0), \end{aligned}$$

denn S_n ist die Oberfläche von $\partial B_1(0)$. Dies zeigt die erste Gleichheit in (4.17). Die zweite Gleichheit folgt aus der ersten, denn

$$\int_{B_R(x)} u dy = \int_0^R \int_{\partial B_r(x)} u ds dr = \int_0^R u(x) S_n r^{n-1} dr = \frac{S_n R^n}{n} u(x).$$

Im Falle eines der Ungleichheitszeichen verläuft der Beweis analog. \square

Übrigens gilt auch die Umkehrung von Satz 4.9: Ist $u \in C^2(\Omega)$ und gilt (4.17) für alle Kugeln $B_R(x) \subset \Omega$, so ist u harmonisch (siehe Evans, Seite 26 [7]).

Wir haben bereits bei den Poissonschen Integralformeln aus dem vorigen Abschnitt gesehen, dass eine harmonische Funktion in einem Gebiet vollständig durch die Werte auf dem Rand des Gebiets bestimmt ist. Diese Aussage kann verschärft werden.

Theorem 4.10 (Maximum- und Minimumprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $\Delta u \geq 0$ bzw. $\Delta u \leq 0$ in Ω .

(i) Es existiere ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ bzw. $u(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$. Dann ist u konstant in Ω .

(ii) Es gilt

$$\sup_{x \in \Omega} u = \sup_{x \in \partial \Omega} u \quad \text{bzw.} \quad \inf_{x \in \Omega} u = \inf_{x \in \partial \Omega} u.$$

Teil (i) des Satzes wird das *starke Maximumprinzip* bzw. *Minimumprinzip* genannt; Teil (ii) heißt das *schwache Maximumprinzip* bzw. *Minimumprinzip*. Der Satz ist auch gültig, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in (i) eine offene, zusammenhängende Menge und in (ii) eine offene, beschränkte Menge ist. Anstelle von "sup" und "inf" hätten wir auch "max" und "min" schreiben können, da u stetig auf $\overline{\Omega}$ ist.

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ mit $M = u(x_0) = \sup_{x \in \Omega} u(x)$ und $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$. Aus der Mittelwerteigenschaft (4.17) und $u \leq M$ folgt

$$M = u(x_0) = \frac{n}{r^n S_n} \int_{B_r(x_0)} u dx \leq \frac{nM}{r^n S_n} \text{meas}(B_r(x_0)) = M.$$

Also muss Gleichheit gelten, aber dies ist wegen der Stetigkeit von u nur möglich, wenn $u = M$ in $B_r(x_0)$ gilt. Wir behaupten, dass die Menge $A = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ offen und (relativ) abgeschlossen in Ω ist. Daraus folgt dann $A = \Omega$ (da Ω als zusammenhängend vorausgesetzt wurde) und die Behauptung (i). Wählen wir $x \in A$, so existiert nach der obigen Betrachtung eine Kugel $B_r(x)$ mit $u = M$ in $B_r(x)$. Also ist A offen. Die Abgeschlossenheit von A folgt aus der Stetigkeit von u .

Teil (ii) des Satzes ist eine Konsequenz aus Teil (i), denn nimmt u das Maximum im Innern von Ω an, so ist u nach Teil (i) konstant und die Aussage gilt. \square

Eine wichtige Konsequenz aus dem Maximumprinzip ist die Eindeutigkeit von klassischen Lösungen des Dirichlet-Problems.

Theorem 4.11. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Seien $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ zwei Lösungen des Dirichlet-Problems

$$\Delta u_i = f \quad \text{in } \Omega, \quad u_i = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad i = 1, 2,$$

wobei f und g stetige Funktionen seien. Dann gilt $u_1 = u_2$ in Ω .

Beweis. Die Funktion $u_1 - u_2$ ist harmonisch und nimmt daher nach Satz 4.10 ihr Minimum und Maximum auf dem Rand an. Auf dem Rand verschwindet $u_1 - u_2$ nach Voraussetzung. Also muss $u_1 - u_2 = 0$ in Ω gelten. \square

5 Elliptische Gleichungen

5.1 Motivation

In diesem Kapitel verallgemeinern wir einige Resultate aus dem vorigen Kapitel für Lösungen allgemeiner elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$L(u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (5.1)$$

wobei L ein linearer formaler Differentialoperator der Form

$$L(u) = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u$$

und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet seien. In Anwendungen sind häufig die Koeffizienten von L oder die rechte Seite f in (5.1) nicht stetig. In diesen Fällen kann keine zweimal stetig differenzierbare Lösung existieren. Wir müssen den Lösungsbegriff auf verallgemeinerte oder sogenannte *schwache Lösungen* erweitern. Um dies zu motivieren, betrachten wir folgendes Dirichletproblem:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (5.2)$$

Wir nehmen zunächst an, dass dieses Problem eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ besitzt und dass $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit einer Funktion $v \in H = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$. Dann erhalten wir mit dem Satz von Gauß:

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} (-\Delta u + u) v dx = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx.$$

Das Randintegral verschwindet, da $v = 0$ auf $\partial\Omega$. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass die Funktion u nur noch einmal differenzierbar sein muss. Damit erhalten wir eine alternative Formulierung des Dirichlet-Problems (5.2), die sogenannte *schwache Formulierung*: Finde eine einmal stetig differenzierbare Funktion u mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$, so dass für alle einmal stetig differenzierbaren Funktionen v mit $v = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt:

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx. \quad (5.3)$$

Insbesondere legt diese Formulierung den Versuch nahe, ein Resultat aus der Funktionalanalysis zu verwenden, nämlich den Darstellungssatz von Riesz. Dazu erinnern wir an die Definition eines Hilbertraums und seines Duals: Ein Vektorraum H heißt *Hilbertraum*, wenn auf ihm ein Skalarprodukt (\cdot, \cdot) definiert ist und wenn er vollständig ist (d.h., jede Cauchy-Folge ist konvergent in H). Der *Dualraum* H' ist definiert durch

$$H' = \{F : H \rightarrow \mathbb{R} : F \text{ linear, stetig}\}.$$

Theorem 5.1 (Darstellungssatz von Riesz). Seien H ein Hilbertraum und $F \in H'$. Dann existiert genau ein $u \in H$, so dass

$$(u, v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in H.$$

Für den Beweis verweisen wir auf die Literatur über Funktionalanalysis, z.B. Alt, Seite 163 [2]. Um den Darstellungssatz anwenden zu können, ist es naheliegend, $H = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ und

$$(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) dx, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v dx, \quad u, v \in H,$$

zu definieren. Die Norm von H ist über das Skalarprodukt durch $\|u\|_H^2 = (u, u)$ für $u \in H$ definiert. Sind die Voraussetzungen des Darstellungssatzes erfüllt? Das Produkt (\cdot, \cdot) ist ein Skalarprodukt, denn es ist bilinear, symmetrisch und $(u, u) \geq 0$ mit $(u, u) = 0$ genau dann, wenn $u = 0$. Das Funktional F ist linear und stetig und damit ein Element aus H' , denn mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (siehe Satz 1.7) folgt

$$|F(v)| = \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_H.$$

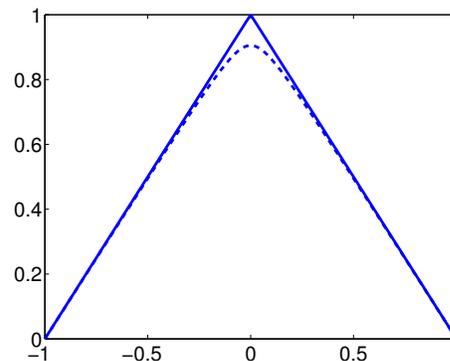


Abbildung 5.1: Funktionen u_n (gestrichelte Linie) und u (durchgezogene Linie).

Ist der Raum H ein Hilbertraum? Er ist sicherlich ein Vektorraum, aber ist er auch vollständig? Dies stimmt leider nicht. Um dies einzusehen, definieren wir exemplarisch die Funktionenfolge

$$u_n(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}},$$

$$x \in \Omega = (-1, 1), \quad n \in \mathbb{N}$$

(siehe Abbildung 5.1). Dann gilt $u_n \in H$ und $u_n(x)$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ punktweise gegen $u(x) = 1 - |x|$, $x \in (-1, 1)$. Ferner gilt:

Lemma 5.2. Die Funktionenfolge (u_n) konvergiert in der Norm von H gegen u ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} + \|u'_n - u'\|_{L^2(\Omega)}) = 0,$$

aber es gilt $u \notin H$.

Beweis. Eine längere Rechnung zeigt, dass

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (u_n - u)^2 dx &= \frac{4}{3} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/2} + \left(\frac{1}{n}\right)^{3/2} \right) + \frac{2}{n} \\ &\quad + \frac{1}{n} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) \left(\ln \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) - \ln \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) \right). \end{aligned}$$

Wegen $x \ln x \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ konvergiert dieser Ausdruck für $n \rightarrow \infty$ gegen null. Die Ableitung von u lautet $u'(x) = -1$ für $x > 0$ und $u(x) = 1$ für $x < 0$. Eine andere längere Rechnung ergibt dann

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (u'_n - u')^2 dx &= \int_{-1}^0 \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n}} - 1 \right)^2 dx + \int_0^1 \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n}} + 1 \right)^2 dx \\ &= 2 \int_0^1 \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n}} + 1 \right)^2 dx \\ &= 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \arctan \sqrt{n} + 2 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \right), \end{aligned}$$

und dies konvergiert wegen $\arctan(x)/x \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ ebenfalls gegen null, falls $n \rightarrow \infty$. Dies zeigt das Lemma. \square

Da u nicht differenzierbar ist, können Grenzwerte von Folgen von H also aus dem Raum hinausführen. Damit kann der Darstellungssatz von Riesz nicht angewendet werden. Gibt es einen Ausweg aus diesem Problem? Ja, er besteht darin, den Funktionenraum zu ändern. Eine Idee lautet, den Raum H bezüglich seiner Norm zu vervollständigen, d.h. den Raum \overline{H} zu betrachten, wobei der Abschluss bezüglich der oben definierten Norm zu verstehen ist. Solche vervollständigten Räume heißen *Sobolevräume*. Wir untersuchen sie im folgenden Abschnitt genauer, bevor wir uns der Lösung des Problems (5.3) zuwenden.

5.2 Sobolevräume

Wir definieren in diesem Abschnitt Sobolevräume, die für die schwache Lösbarkeit elliptischer Differentialgleichungen essentiell sind, und notieren einige ihrer wichtigsten

Eigenschaften. Die Beweise aller Eigenschaften würde den Rahmen dieses Manuskripts sprengen, und wir müssen für Details auf die Literatur über Sobolevräume verweisen; siehe z.B. Adams [1] oder Troianiello [13].

Es sei im Folgenden $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren auf dem Vektorraum $C^\infty(\overline{\Omega})$ das Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx$$

und die dadurch induzierte Norm

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{H^k}}.$$

Ferner definieren wir (siehe Alt, 1.25 [2]):

Definition 5.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Abschluss von $X = \{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{H^k(\Omega)} < \infty\}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ ist der *Sobolevraum* $H^k(\Omega)$. Der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ ist der *Sobolevraum* $H_0^k(\Omega)$. Wir schreiben:

$$H^k(\Omega) = \overline{X}, \quad H_0^k(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}.$$

Die Räume $H^k(\Omega)$ und $H_0^k(\Omega)$ sind Hilberträume. Wir setzen $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Gemäß Definition kann eine Funktion u aus $H^k(\Omega)$ (bzw. $H_0^k(\Omega)$) durch Funktionen u_n aus $C^\infty(\Omega) \cap H^k(\Omega)$ (bzw. $C_0^\infty(\Omega)$) approximiert werden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{H^k(\Omega)} = 0.$$

Die obige Definition vermeidet das am Ende des vorigen Abschnitts erwähnte Problem der Nicht-Vollständigkeit, aber sie hat den Nachteil, dass sie eher abstrakt ist. Wir können allerdings auch eine andere Charakterisierung des Sobolevraums $H^k(\Omega)$ geben.

Theorem 5.4 (Charakterisierung von Sobolevfunktionen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt

$$H^k(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq k\},$$

wobei $D^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ die distributionelle Ableitung von u ist.

Beweisskizze. Der Beweis basiert auf folgender Idee: Sei $Z = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq k\}$ und definiere die Abbildung $J : H^k(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ durch $J(u) = u$, wobei $u = L^2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ und (u_n) eine Cauchyfolge in $C^\infty(\Omega)$ sind. Wegen der Äquivalenzrelation in $H^k(\Omega)$ ist J injektiv und nach der Definition der Norm in $H^k(\Omega)$ normerhaltend. Man kann außerdem mit Hilfe der Faltung zeigen, daß J surjektiv auf Z ist. Für Details verweisen wir auf [2], Abschnitt 1.25. Folglich ist $J : H^k(\Omega) \rightarrow Z$ bijektiv. Daher ist Z vollständig und wir können Z mit $H^k(\Omega)$ identifizieren. \square

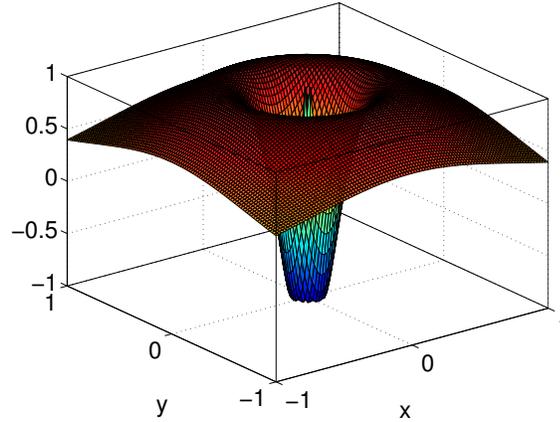


Abbildung 5.2: Beispiel einer beschränkten, aber am Ursprung unstetigen Funktion aus H^1 .

Da L^2 -Funktionen nur fast überall (d.h. bis auf Nullmengen) definiert sind, besteht $H^k(\Omega)$ eigentlich aus Äquivalenzklassen von Funktionen, die bis auf Nullmengen übereinstimmen. In diesem Sinne gilt $u = v$ in $H^k(\Omega)$, wenn $u(x) = v(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus N$ und $N \subset \Omega$ eine Nullmenge ist.

Beispiel 5.5. (i) Die Funktion $u(x) = |x|$ ist ein Element aus $H^1(-1, 1)$, denn die distributionelle Ableitung u' , gegeben durch $u'(x) = -1$ für $x < 0$ und $u'(x) = 1$ für $x > 0$, ist L^2 -integrierbar. Die zweite Ableitung von u lautet dagegen $u'' = 2\delta_0$, denn für alle $\phi \in \mathcal{D}(-1, 1)$ folgt

$$\langle u'', \phi \rangle = -\langle u', \phi' \rangle = \int_{-1}^0 \phi'(x) dx - \int_0^1 \phi'(x) dx = 2\phi(0).$$

Da δ_0 keine reguläre Distribution ist, erhalten wir $u'' \notin L^2(-1, 1)$ und daher $u \notin H^2(-1, 1)$.

(ii) Die Funktion $u(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $(x, y, z)^T \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, ist ein Element von $H^1(B_1(0))$, denn wir erhalten in Kugelkoordinaten

$$\int_{B_1(0)} |u|^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 |\ln(r^2)|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 16\pi \int_0^1 \ln^2(r) r^2 dr < \infty,$$

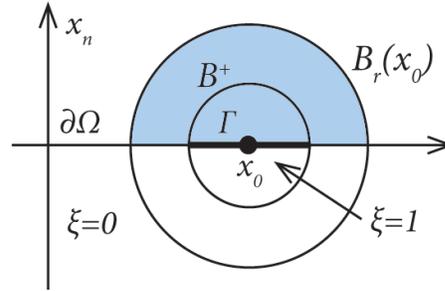
$$\int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{2}{r}\right)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 16\pi < \infty.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass Funktionen aus H^1 nicht stetig (fortsetzbar) sein müssen.

(iii) Die Funktion $u(x) = \sin(\ln(1 + 1/|x|))$ mit $x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ ist beschränkt (im Gegensatz zum Beispiel in (ii)) und ein Element von $H^1(B_1(0))$, aber an der Stelle $x = 0$ nicht stetig (siehe Abbildung 5.2). \square

Wie können wir uns Funktionen aus $H_0^1(\Omega)$ vorstellen? Da sie durch Funktionen aus

Abbildung 5.3: Illustration für den Beweis von Satz 5.6. Die hellblaue Fläche beschreibt B^+ , die fette schwarze Linie ist Γ .



$C_0^\infty(\Omega)$, die samt allen Ableitungen auf $\partial\Omega$ verschwinden, approximiert werden, können wir vermuten, dass auch Funktionen aus $H_0^1(\Omega)$ auf $\partial\Omega$ gleich null sind,

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad \text{wenn } u \in H^1(\Omega) \text{ und } "u = 0 \text{ auf } \partial\Omega".$$

Allerdings haben wir in dem obigen Beispiel gezeigt, dass Sobolevfunktionen nicht stetig sein müssen, also i.a. auf $\partial\Omega$ nicht punktweise definiert sind. In welchem Sinn ist dann die Aussage " $u = 0$ auf $\partial\Omega$ " zu verstehen? Dazu benötigen wir die Spur einer Funktion.

Theorem 5.6 (Spur von Sobolevfunktionen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$. Dann existiert ein beschränkter linearer Operator, genannt die *Spur* (engl.: trace), $T : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$T(u) = u|_{\partial\Omega} \quad \text{für alle } u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

Beweisskizze. Wir nehmen zunächst an, dass $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und dass $\partial\Omega$ in der Nähe eines Randpunktes x_0 "geglättet" ist, also in der Menge $\{x_n = 0\}$ liegt. Wir wollen $Tu := u|_\Gamma$ auf Γ definieren und müssen daher zeigen, dass $\|Tu\|_{L^2(\Gamma)} = \|u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ gilt. Sei $B_r(x_0)$ eine Kugel um x_0 mit Radius $r > 0$ und sei $\xi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$ mit $\xi \geq 0$ und $\xi = 1$ in $B_{r/2}(x_0)$. Seien weiter $\Gamma = \partial\Omega \cap B_{r/2}(x_0)$ und $B^+ = B_r(x_0) \cap \{x_n > 0\}$ (Abbildung 5.3). Dann ist

$$\begin{aligned} \int_\Gamma u^2 ds &\leq \int_{\{x_n=0\}} \xi u^2 ds = - \int_{B^+} \frac{\partial}{\partial x_n} (\xi |u|^2) dx \quad (\text{denn } \xi = 0 \text{ auf } \partial B^+ \setminus \{x_n = 0\}) \\ &= - \int_{B^+} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_n} u^2 + 2\xi u \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) dx \leq C \int_{B^+} \left(u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right) dx \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf $u(\partial u/\partial x_n)$ angewendet und ξ bzw. $\partial \xi/\partial x_n$ durch L^∞ -Normen abgeschätzt. Für den allgemeinen Fall zerlegt man $\partial\Omega$ in endlich viele Teilmengen, die in der Nähe eines Randpunktes "geglättet" werden und definiert $Tu := u|_{\partial\Omega}$. Die obige Rechnung motiviert die Beschränktheit von T :

$$\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Schließlich seien $u \in H^1(\Omega)$ und $(u_n) \subset C^1(\overline{\Omega})$ eine Folge von Funktionen, die $u \in H^1(\Omega)$ approximiert, und definiere $Tu := L^2\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} Tu_n$. Für den vollständigen Beweis siehe Theorem 1, Kapitel 5.5 in [7]. \square

Der Satz ist auch gültig, wenn der Rand von Ω nur lipschitzstetig ist, d.h. lokal durch eine lipschitzstetige Funktion dargestellt wird. Dies gilt für alle nachfolgenden Sätze dieses Abschnitts, in denen C^1 -Regularität des Randes gefordert wird.

Sei $u \in H_0^1(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$, so dass $u_n \rightarrow u$ in $H^1(\Omega)$. Dann gilt gemäß dem obigen Satz $T(u_n) = 0$ und, da T ein stetiger Operator ist, $T(u) = 0$. Es gilt auch die Umkehrung, deren Beweis deutlich aufwendiger ist; siehe Theorem 2, Kapitel 5.5 [7]. Damit können wir $H_0^1(\Omega)$ -Funktionen charakterisieren.

Theorem 5.7 (Charakterisierung von H_0^1 -Funktionen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei ferner $u \in H^1(\Omega)$. Dann gilt

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{genau dann, wenn} \quad T(u) = 0.$$

Für Sobolev-Funktionen kann die partielle Integration verallgemeinert werden.

Theorem 5.8 (Gauß für Sobolev-Funktionen). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und seien $u_1, \dots, u_n, w \in H^1(\Omega)$. Setze $u = (u_1, \dots, u_n)^T$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} u) w dx = - \int_{\Omega} u \cdot \nabla w dx + \int_{\partial\Omega} (u \cdot \nu) w ds,$$

wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial\Omega$ ist.

Das Randintegral ist als $\int_{\partial\Omega} (T(u) \cdot \nu) T(v) ds$ und $T(u) = (T(u_1), \dots, T(u_n))^T$ zu interpretieren, wobei T der Spuroperator ist. Dieses Integral ist definiert, da $T(u_i), T(v) \in L^2(\partial\Omega)$. Der Satz kann durch Approximation mit Funktionen aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ bewiesen werden; siehe Abschnitt A6.8 in [2].

Wir haben in Beispiel 5.5 gesehen, dass H^1 -Funktionen nicht unbedingt stetig sein müssen. Sind H^k -Funktionen stetig, wenn k hinreichend groß ist? Der folgende Einbettungssatz zeigt, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Theorem 5.9 (Einbettungssatz von Sobolev). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und es gelte $k - n/2 > m$ für $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$H^k(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega}),$$

d.h., es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in H^k(\Omega)$

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$

Wir haben $H^k(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$ anstatt $H^k(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$ geschrieben, denn die Mengeneinklusion ist streng genommen nicht korrekt, weil $H^k(\Omega)$ aus Äquivalenzklassen von Funktionen besteht. Das Zeichen " \hookrightarrow " deutet die folgende Aussage an: Jede Äquivalenzklasse von $H^k(\Omega)$ enthält einen Repräsentanten, der ein Element von $C^m(\overline{\Omega})$ ist. Die Abschätzung der C^m -Norm gilt dann für diesen Repräsentanten.

Beweisskizze. Wir skizzieren den Beweis nur für den Fall $k = 1, m = 0$ (also für Funktionen $u \in H_0^1(\Omega)$) und approximieren u durch $C_0^\infty(\Omega)$ -Funktionen (siehe die Argumente im Beweis von Satz 8.9 in [2]). Wir setzen $u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ und setzen $R = \text{diam}(\Omega)$, so dass $\Omega \subset B_R(x_0)$ für jedes $x_0 \in \Omega$ (Abbildung 5.4). Insbesondere ist $u = 0$ auf $\partial B_R(x_0)$ und

$$|u(x_0)| = \left| \int_0^R \frac{d}{dr} u(x_0 + rv) dr \right| \leq \int_0^R |\nabla u(x_0 + rv)| dr,$$

wobei v den Einheitsnormalenvektor bezeichne. Integration über $v \in \partial B_1(0)$ und Transformation der sphärischen auf euklidische Koordinaten via $x = x_0 + rv$ liefert

$$\text{meas}(\partial B_1(0)) |u(x_0)| \leq \int_0^R \int_{\partial B_1(0)} |\nabla u(x_0 + rv)| dv dr = \int_{B_R(x_0)} \frac{|\nabla u(x)| dx}{|x - x_0|^{n-1}}.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt sich dann

$$\text{meas}(\partial B_1(0)) |u(x_0)| \leq \left(\int_{B_R(x_0)} \frac{dx}{|x - x_0|^{2(n-1)}} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Der erste Faktor ist genau dann endlich, wenn $2(n-1) < n$ oder $n < 2$. Wir schließen, dass

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \sup_{x_0 \in \Omega} |u(x_0)| \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Der allgemeine Fall kann ähnlich bewiesen werden; siehe Seiten 330-335 in [2]. \square

Wir können die Aussage des Einbettungssatzes auch folgendermaßen formulieren: Die Identität ist eine stetige Abbildung von $H^k(\Omega)$ nach $C^m(\overline{\Omega})$, d.h., der Raum $H^k(\Omega)$ ist in $C^m(\overline{\Omega})$ *stetig eingebettet*. Es gilt sogar:

Theorem 5.10 (Rellich-Kondrachov). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und seien $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0$ mit $k > m$. Dann ist die Einbettung $H^k(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega)$ kompakt, d.h., beschränkte Mengen in $H^k(\Omega)$ sind präkompakt in $H^m(\Omega)$.

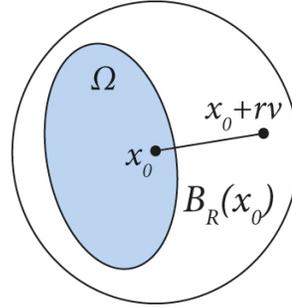


Abbildung 5.4: Illustration für den Beweis von Satz 5.9.

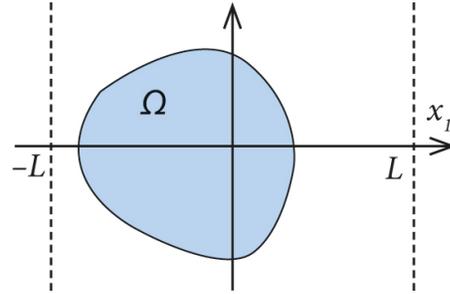


Abbildung 5.5: Illustration für den Beweis von Satz 5.11.

Ist also (u_n) eine beschränkte Folge aus $H^k(\Omega)$, so existiert eine Teilfolge $(u_{n'})$ von (u_n) , so dass $(u_{n'})$ in $H^m(\Omega)$ konvergiert, wenn $k > m$. Für den recht technischen Beweis verweisen wir auf Kapitel 5.7 in [7].

Wir kehren zum Raum $H_0^1(\Omega)$ zurück. Er hat die wichtige Eigenschaft, dass die Beschränktheit von $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ die Beschränktheit von $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ impliziert. Unter der Norm $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ verstehen wir die $L^2(\Omega)$ -Norm von $|\nabla u|$. Genauer gilt:

Theorem 5.11 (Poincaré-Ungleichung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte Menge (beschränkt in einer Richtung genügt). Dann existiert eine Konstante $C_p > 0$, so dass für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis. Sei zunächst $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Wegen der Beschränktheit von Ω existiert ein $L > 0$, so dass $\Omega \subset (-L, L) \times \mathbb{R}^{n-1}$ (Abbildung 5.5). Mit partieller Integration und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 u^2) dx - \int_{\Omega} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (u^2) dx = \int_{\partial\Omega} x_1 u^2 \nu_1 ds - 2 \int_{\Omega} x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} dx \\ &\leq 2L \|u\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $u = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt. Wir erhalten also

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2L \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq 2L \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Sei nun $u \in H_0^1(\Omega)$. Nach Definition kann u durch eine Folge (u_n) aus $\mathcal{D}(\Omega)$ approximiert werden, so dass $u_n \rightarrow u$ und $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ für $n \rightarrow \infty$ in $L^2(\Omega)$ gelten. Dann folgt aus

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 2L \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ die Behauptung mit $C_p = 2L$. \square

Die Poincaré-Ungleichung hat die Ungleichungskette

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (C_p^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (C_p^2 + 1) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (5.4)$$

zur Folge, die zeigt, dass $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ eine zu $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ äquivalente Norm in $H_0^1(\Omega)$ ist.

Schließlich benötigen wir noch Sobolevräume mit negativem Index. Betrachte etwa die Funktion $u(x) = |x|$ für $x \in (-1, 1)$. Nach Beispiel 5.5 (i) gilt $u \in H^1(-1, 1)$, also $u' \in H^0(-1, 1) = L^2(-1, 1)$. Die zweite Ableitung u'' existiert nur im distributionellen Sinne, und es ist naheliegend, $u'' \in H^{-1}(-1, 1)$ zu schreiben. Im Folgenden definieren wir diesen Raum.

Definition 5.12. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren $H^{-k}(\Omega)$ als den Dualraum von $H_0^k(\Omega)$, d.h.

$$H^{-k}(\Omega) = \{u : H_0^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Der Raum $H^{-k}(\Omega)$ ist mit der Norm

$$\|u\|_{H^{-k}(\Omega)} = \sup\{|u(\phi)| : \|\phi\|_{H_0^k(\Omega)} = 1\}, \quad u \in H^{-k}(\Omega),$$

versehen.

Ähnlich wie bei Distributionen verwenden wir für $u \in H^{-k}(\Omega)$ und $\phi \in H_0^k(\Omega)$ die Notation $u(\phi) = \langle u, \phi \rangle_{H^{-k}}$. Jedes Element aus $H^{-k}(\Omega)$ ist eine Distribution, $H^{-k}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, denn für $u \in H^{-k}(\Omega)$ und $\phi \in \mathcal{D}(K)$ ($K \subset \Omega$ kompakt) folgt

$$|\langle u, \phi \rangle_{H^{-k}}| \leq \|u\|_{H^{-k}(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^k(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^{-k}(\Omega)} \|\phi\|_{C^k(K)}$$

mit einer Konstante $C > 0$, die von K abhängt. Beispiele für Elemente aus H^{-k} sind $L^2(\Omega)$ -Funktionen (via Identifikation), denn aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir für alle $u \in L^2(\Omega)$, $\phi \in H_0^k(\Omega)$ und $k \in \mathbb{N}_0$:

$$|\langle u, \phi \rangle_{H^{-k}}| = \left| \int_{\Omega} u \phi dx \right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{H_0^k(\Omega)}.$$

Damit erhalten wir die Inklusionskette:

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H^k(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-k}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \quad k \geq 1.$$

In dieser Ungleichungskette haben wir den Raum $L^2(\Omega)$ mit seinem Dualraum $L^2(\Omega)'$ identifiziert, um die Inklusion $L^2(\Omega) \subset H^{-k}(\Omega)$ formulieren zu können.

Beispiel 5.13. Betrachte die Delta-Distribution $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definiert durch $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$ für $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, wobei $0 \in \Omega$ gelte. Wir behaupten, dass $\delta \in H^{-k}(\Omega)$, wobei $k \in \mathbb{N}$ mit $k > n/2$. Seien dazu $\phi \in H_0^k(\Omega)$ und $\phi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine Folge, die in $H^k(\Omega)$ gegen ϕ konvergiert. Dann erhalten wir mit dem Sobolevschen Einbettungssatz 5.9 für $m = 0$

$$|\langle \delta, \phi_n \rangle| = |\phi_n(0)| \leq \|\phi_n\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq C \|\phi_n\|_{H^k(\Omega)}.$$

Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ folgt wegen der Konvergenz $\phi_n \rightarrow \phi$ in $H^k(\Omega)$:

$$|\langle \delta, \phi \rangle| = |\phi(0)| \leq C \|\phi\|_{H^k(\Omega)}.$$

Dies beweist $\delta \in H^{-k}(\Omega)$. □

5.3 Existenz schwacher Lösungen

Wir zeigen in diesem Abschnitt die Existenz schwacher Lösungen des Dirichletproblems

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (5.5)$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $A(x) = (a_{ij}(x))$ eine $(n \times n)$ -Matrix und $b(x) = (b_i(x)) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor seien. Wir setzen $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ voraus. Außerdem sei die Matrix $A(x)$ symmetrisch und gleichmäßig positiv definit:

Definition 5.14. Die Differentialgleichung (5.5) heißt *(gleichmäßig) elliptisch*, wenn es eine Konstante $\alpha > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\xi^T A(x)\xi \geq \alpha |\xi|^2. \quad (5.6)$$

Falls $A(x)$ symmetrisch ist, ist gleichmäßige Elliptizität gleichbedeutend damit, dass $A(x)$ gleichmäßig in x positiv definit ist. Dies bedeutet, dass die Eigenwerte von $A(x)$ positiv und durch α nach unten beschränkt sind.

Um eine Formulierung zu finden, die keine zweiten Ableitungen von u enthält, gehen wir wie in Abschnitt 5.1 vor. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ eine klassische Lösung von (5.5) und seien $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b_i, c, f \in C^0(\bar{\Omega})$. Wir multiplizieren die Gleichung mit einer Testfunktion $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ und integrieren partiell. Dies ergibt

$$\int_{\Omega} (\nabla u^T A(x)\nabla v + (b(x) \cdot \nabla u)v + c(x)uv) dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (5.7)$$

Das Randintegral verschwindet, da $v = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir nennen (5.7) mit $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$ eine *schwache Formulierung* von (5.5). Die Formulierung (5.7) ist sinnvoll, wenn wir nur $u \in H^1(\Omega)$ verlangen. Wir definieren daher:

Definition 5.15. (i) Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ heißt *klassische Lösung* von (5.5), wenn sie die Differentialgleichung für alle $x \in \Omega$ und die Randbedingung für alle $x \in \partial\Omega$ erfüllt.

(ii) Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* von (5.5), wenn sie (5.7) für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt.

Die homogenen Dirichlet-Randbedingungen sind in der Bedingung $u \in H_0^1(\Omega)$ gemäß Satz 5.7 enthalten. Die obige Rechnung zeigt, dass jede klassische Lösung eine schwache Lösung ist. Sei umgekehrt $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von (5.5) mit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ und $a_{ij} \in C^1(\Omega)$. Wir behaupten, dass dann u auch (5.5) löst. Um dies zu zeigen, sei $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wir können in (5.7) partiell integrieren und erhalten, da $v = 0$ auf $\partial\Omega$,

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u - f(x))v dx = 0.$$

Dies gilt für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Nach Lemma 1.9 folgt dann (5.5) fast überall. Die Gleichungen (5.5) gelten für alle $x \in \Omega$, wenn $A \in C^1(\overline{\Omega})$ und $b, c, f \in C^0(\overline{\Omega})$. Die Randbedingung ist erfüllt, da der Spuoperator für stetige Funktionen gleich der Auswertung der Funktion auf dem Rand ist. Wir haben gezeigt:

Proposition 5.16. Jede klassische Lösung u von (5.5) mit $u \in H^1(\Omega)$ ist auch eine schwache Lösung. Eine schwache Lösung von (5.5) ist eine klassische Lösung, wenn sie Element von $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ist und $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt.

Der erste Teil der Proposition ist ohne den Zusatz, dass u in $H^1(\Omega)$ liegt, i.A. falsch. Ein Gegenbeispiel ist $\Omega = (0, 2)$, $u(x) = \sqrt{x}$ für $x \in (0, 1)$ und $u(x)$ ist für $x \in (1, 2)$ so fortgesetzt, dass $u(2) = 0$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, denn $u'(x)^2 = 1/x$ ist auf $(0, 1)$ nicht integrierbar.

Proposition 5.16 deutet die Strategie an, mit der wir elliptische Randwertprobleme lösen. Wir zeigen zuerst, dass das Problem eine schwache Lösung besitzt. Als zweiten Schritt zeigen wir, sofern dies möglich ist, dass die schwache Lösung regulär und damit eine klassische Lösung ist.

Zunächst müssen wir allerdings die schwache Lösbarkeit sicherstellen. Dazu definieren wir die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ und das Funktional F auf $H_0^1(\Omega)$:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u^T A(x)\nabla v + (b(x) \cdot \nabla u)v + c(x)uv) dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f v dx, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Dann lautet die schwache Formulierung von (5.5) wie folgt: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass $a(u, v) = F(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt.

Um dieses Problem zu lösen, kann der Darstellungssatz von Riesz leider nicht unmittelbar angewendet werden, weil durch $a(u, v)$ i.A. kein Skalarprodukt definiert wird. Das Lemma von Lax-Milgram erweitert den Darstellungssatz auf sogenannte *koerzive* Bilinearformen.

Definition 5.17. Seien H ein Hilbertraum und $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Wir nennen a *stetig*, wenn eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass

$$|a(u, v)| \leq K \|u\|_H \|v\|_H \quad \text{für alle } u, v \in H.$$

Die Bilinearform heißt *koerziv*, wenn eine Konstante $\kappa > 0$ existiert, so dass

$$a(u, u) \geq \kappa \|u\|_H^2 \quad \text{für alle } u \in H.$$

Theorem 5.18 (Lemma von Lax-Milgram). Seien H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) , $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform und $F \in H'$. Dann existiert genau ein $u \in H$, so dass

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in H. \quad (5.8)$$

Für diese Lösung gilt

$$\|u\|_H \leq \kappa^{-1} \|F\|_{H'}. \quad (5.9)$$

Beweis. Sei $w \in H$. Dann ist die Abbildung $a(w, \cdot) : H \rightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig und daher $a(w, \cdot) \in H'$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert ein eindeutig bestimmtes $S(w) \in H$ mit

$$(S(w), v) = a(w, v) \quad \text{für alle } v \in H \quad (5.10)$$

und

$$\|S(w)\|_H = \|a(w, \cdot)\|_{H'} \leq K \|w\|_H. \quad (5.11)$$

Dies definiert eine Abbildung $S : H \rightarrow H$. Wegen der Bilinearität von a ist sie linear. Die Abschätzung (5.11) zeigt, dass sie außerdem stetig ist. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass die Inverse S^{-1} existiert und linear und stetig ist. Daraus folgt dann die Behauptung, denn ist gemäß dem Darstellungssatz von Riesz $g \in H$ die (eindeutig bestimmte) Lösung von

$$(g, v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in H$$

mit $\|g\|_H = \|F\|_{H'}$, so folgt mit (5.10)

$$a(S^{-1}(g), v) = (S(S^{-1}(g)), v) = (g, v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in H,$$

d.h., $u = S^{-1}(g)$ ist die gesuchte Lösung. Wir zeigen:

1. Schritt: S ist injektiv. Wegen der Koerzivität von a erhalten wir für alle $u \in H$:

$$\kappa \|u\|_H^2 \leq a(u, u) = (S(u), u) \leq \|S(u)\|_H \|u\|_H,$$

also

$$\kappa \|u\|_H \leq \|S(u)\|_H. \quad (5.12)$$

Dies zeigt, dass S injektiv ist (denn aus $S(u) = 0$ folgt sofort $u = 0$). Damit können wir die Inverse S^{-1} auf dem Bild von S definieren, $S^{-1} : R(S) \rightarrow H$. Diese Abbildung ist stetig, da $\|S^{-1}(v)\|_H \leq \kappa^{-1} \|v\|_H$ für $v \in R(S)$. Wir müssen zeigen, dass $R(S) = H$.

2. Schritt: $R(S)$ ist abgeschlossen. Sei $(v_n) \subset R(S)$ mit $v_n \rightarrow v$ für $n \rightarrow \infty$ und $v \in H$. Zeigen wir, dass $v \in R(S)$, dann ist $R(S)$ abgeschlossen. Nach Definition der Folgenglieder v_n existieren Elemente $u_n \in H$, so dass $v_n = S(u_n) \rightarrow v$. Aus (5.12) folgt, dass (u_n) eine Cauchy-Folge in H ist. Die Vollständigkeit von H impliziert die Konvergenz von (u_n) , $u_n \rightarrow w$ für ein $w \in H$. Da S stetig ist, ergibt sich weiter $S(u_n) \rightarrow S(w)$, also $S(w) = v$ und daher $v \in R(S)$.

3. Schritt: $R(S) = H$. Wir machen die Widerspruchsannahme $R(S) \neq H$. Da $R(S)$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von H ist, können wir den Raum H orthogonal zerlegen, d.h. $H = R(S) \oplus R(S)^\perp$ und $R(S)^\perp \neq \{0\}$. Sei $z \in R(S)^\perp$ mit $z \neq 0$. Dann ist $(S(v), z) = 0$ für alle $v \in H$. Insbesondere folgt aus der Definition (5.10) von S , dass

$$0 = (S(z), z) = a(z, z) \geq \kappa \|z\|_H^2$$

und damit $z = 0$. Dies widerspricht unserer Wahl $z \neq 0$.

Wir haben gezeigt, dass die Abbildung $S : H \rightarrow H$ invertierbar ist. Es bleibt die Ungleichung (5.9) zu zeigen. Sie folgt direkt aus (5.12), denn mit $u = S^{-1}(g)$ ergibt sich

$$\|u\|_H = \|S^{-1}(g)\|_H \leq \kappa^{-1} \|g\|_H = \kappa^{-1} \|F\|_{H'}.$$

Dies beweist das Lemma. □

Die schwache Lösbarkeit des Dirichlet-Problems folgt nun aus dem Lemma von Lax-Milgram. Zuvor beweisen wir die Young-Ungleichung, die wir in dem Beweis des Existenzsatzes benötigen.

Lemma 5.19 (Young-Ungleichung). Seien $x, y \geq 0$, $\delta > 0$ und $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt

$$xy \leq \frac{\delta}{p} x^p + \frac{1}{q \delta^{q/p}} y^q.$$

Beweis. Aus der Konvexität von $x \mapsto e^x$ ergibt sich für $\alpha, \beta > 0$

$$\alpha\beta = e^{\ln \alpha + \ln \beta} = e^{(1/p) \ln \alpha^p + (1/q) \ln \beta^q} \leq \frac{1}{p} e^{\ln \alpha^p} + \frac{1}{q} e^{\ln \beta^q} = \frac{1}{p} \alpha^p + \frac{1}{q} \beta^q,$$

und die Young-Ungleichung folgt mit $\alpha = \delta^{1/p} x$ und $\beta = \delta^{-1/p} y$. □

Theorem 5.20. Seien $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $A = (a_{ij})$ sei symmetrisch und gleichmäßig positiv definit (mit Konstante $\alpha > 0$), $c(x) \geq c_0 \geq 0$ für alle $x \in \Omega$, und $f \in L^2(\Omega)$. Ferner sei entweder $b = 0$ und $c_0 = 0$ oder $4\alpha c_0 > b_0^2$, wobei $b_0 = \|b\|_{L^\infty(\Omega)}$. Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (5.5), und es gilt

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (5.13)$$

wobei $C = (1 + C_p^2)/(\alpha - b_0^2/4c_0)$ mit der Poincaré-Konstante C_p (siehe Satz 5.11). Falls $c_0 = 0$, ist $C = (1 + C_p^2)/\alpha$.

Die Ungleichung (5.13) nennen wir eine *A-priori-Abschätzung*. Sie gibt Auskunft darüber, wie sich die Lösung ändert, wenn sich die Daten der Differentialgleichung ändern. Insbesondere hängt die Lösung in stetiger Weise von Änderungen der rechten Seite f ab.

Beweis. Wir prüfen die Voraussetzungen des Lemmas von Lax-Milgram nach. Die Bilinearform a ist stetig, denn aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} (\nabla u^T A \nabla v + (b \cdot \nabla u)v + cuv) dx \right| \\ &\leq C \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + (C \|b\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq K \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei die L^∞ -Normen von A bzw. b durch die L^∞ -Normen der Komponenten von A bzw. b definiert sind und $K = C \|A\|_{L^\infty(\Omega)} + C \|b\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}$. Ferner ist die lineare Abbildung F stetig, denn für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ ist

$$|F(v)| = \left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

und damit

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{H^1(\Omega)}=1} |F(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.14)$$

Um die Koerzivität von a zu zeigen, wenden wir die Young-Ungleichung auf $y = |\nabla u|$, $x = |u|$ und $p = q = 2$ an, wobei $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$a(u, u) \geq \int_{\Omega} (\alpha |\nabla u|^2 - b_0 |u| |\nabla u| + c_0 u^2) dx \geq \int_{\Omega} \left(\left(\alpha - \frac{b_0}{2\delta} \right) |\nabla u|^2 + \left(c_0 - \frac{\delta}{2} b_0 \right) u^2 \right) dx.$$

Im Falle $b = 0, c \geq 0$ können wir $b_0 = 0, c_0 = 0$ setzen und erhalten $c_0 - (\delta/2)b_0 = 0$ und

$$a(u, u) \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Im anderen Fall $4\alpha c_0 > b_0^2$ wählen wir $\delta = 2c_0/b_0$. Dann ist

$$a(u, u) \geq C_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \text{mit } C_1 = \alpha - \frac{b_0^2}{4c_0} > 0.$$

Aus dem Lemma 5.11 von Poincaré folgt

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (C_p^2 + 1)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

also

$$a(u, u) \geq C_1 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \kappa \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{mit } \kappa = C_1(C_p^2 + 1)^{-1},$$

wobei C_p die Poincaré-Konstante ist. Also ist a koerziv.

Das Lemma von Lax-Milgram liefert die eindeutige Lösbarkeit von (5.7), und mit (5.14) erhalten wir die Abschätzung

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \kappa^{-1} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \kappa^{-1} \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.15)$$

und damit die Behauptung des Satzes. \square

Im Folgenden betrachten wir einige Erweiterungen von Satz 5.20.

- **Allgemeinere rechte Seite.** Satz 5.20 bleibt gültig, wenn die rechte Seite f nur aus $H^{-1}(\Omega)$ ist. In diesem Fall ist die schwache Formulierung (5.7) abzuändern. Die rechte Seite von (5.7) muss nun $\langle f, v \rangle_{H^{-1}}$ lauten. Es bleibt die Stetigkeit des Funktional $F(v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}}$ nachzuprüfen. Nach der Definition der Norm in $H^{-1}(\Omega)$ ist dies der Fall:

$$|F(v)| \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

also $\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Tatsächlich können wir F und f miteinander identifizieren und $F = f$ schreiben. Entsprechend ist die Abschätzung (5.15) abzuändern. Für schwache Lösungen $u \in H_0^1(\Omega)$ ist die Voraussetzung $f \in H^{-1}(\Omega)$ optimal, da

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u \in H^{-1}(\Omega).$$

- **Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen.** Wir betrachten die elliptische Differentialgleichung mit inhomogenen Dirichlet-Bedingungen,

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (5.16)$$

Wir setzen voraus, dass die Funktion g auf Ω definiert ist, etwa $g \in H^1(\Omega)$, denn dann sind die Werte von g auf $\partial\Omega$ im Sinne des Spursatzes 5.6 definiert. Es würde genügen, g nur auf $\partial\Omega$ zu definieren und dann auf Ω fortzusetzen, aber hierfür benötigen wir spezielle Voraussetzungen, für die wir z.B. auf Adams [1] verweisen.

Die schwache Formulierung von (5.16) lautet: Finde $u \in H^1(\Omega)$, so dass $u - g \in H_0^1(\Omega)$ und $a(u, v) = F(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt. Um das Lemma von Lax-Milgram anwenden zu können, führen wir das Problem auf eines mit homogenen Dirichlet-Bedingungen zurück. Dazu definieren wir $w = u - g \in H_0^1(\Omega)$ und setzen $G(v) = F(v) - a(g, v)$. Wir suchen also $w \in H_0^1(\Omega)$, so dass $a(w, v) = G(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt ist. Dieses Problem ist lösbar, wenn G stetig ist (die Stetigkeit und Koerzivität von a haben wir ja bereits im Beweis von Satz 5.20 nachgewiesen). Dies folgt jedoch aus der Stetigkeit von a , denn

$$|G(v)| \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + K\|g\|_{H^1(\Omega)})\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

also $\|G\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + K\|g\|_{H^1(\Omega)}$. Nach dem Lemma von Lax-Milgram existiert also ein eindeutig bestimmtes $w \in H_0^1(\Omega)$, so dass für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt $a(w + g, v) = G(v) + a(g, v) = F(v)$. Dann ist $u = w + g$ die gewünschte Lösung, denn es ist $u = g$ auf $\partial\Omega$. Wir haben folgendes Resultat bewiesen:

Theorem 5.21. *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 5.20, und es sei $g \in H^1(\Omega)$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (5.16), und es gilt*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)}),$$

wobei die Konstante $C > 0$ nur von A, b, c und Ω abhängt.

Beweis. Es bleibt die A-priori-Abschätzung zu zeigen. Aus dem Beweis von Satz 5.20 und (5.15) folgt

$$\|u - g\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|G\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + K\|g\|_{H^1(\Omega)})$$

und damit die Behauptung. □

• **Neumann-Randbedingungen.** Wir suchen eine schwache Lösung des Problems

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (A(x)\nabla u) \cdot \nu = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (5.17)$$

wobei ν der äußere Normalenvektor an $\partial\Omega$ sei. Zunächst leiten wir die schwache Formulierung her. Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit $v \in H^1(\Omega)$, integrieren über Ω und integrieren partiell:

$$\int_{\Omega} (\nabla v^T A(x)\nabla u + (b(x) \cdot \nabla u)v + c(x)uv) dx = \int_{\partial\Omega} \underbrace{(A(x)\nabla u) \cdot \nu}_{=g} v ds + \int_{\Omega} f v dx.$$

Wir können die Bilinearform wie oben definieren. Die rechte Seite definiert das Funktional

$$F(v) = \int_{\partial\Omega} g v ds + \int_{\Omega} f v dx,$$

wobei das Randintegral eigentlich als $\int_{\partial\Omega} T(g)T(v)ds$ zu verstehen ist. Also lautet die schwache Formulierung wie folgt: Finde $u \in H^1(\Omega)$, so dass $a(u, v) = F(v)$ für alle $v \in H^1(\Omega)$ gilt. Interessanterweise taucht die Neumann-Bedingung $(A\nabla u) \cdot \nu = g$ in der schwachen Formulierung nicht auf; sie ist implizit enthalten, weil wir für die Testfunktionen nur $v \in H^1(\Omega)$ vorausgesetzt haben.

Im Falle regulärer Lösungen ist eine schwache Lösung auch eine klassische Lösung:

Proposition 5.22. *Seien $A \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $b, c, f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$ und $\partial\Omega \in C^1$. Jede klassische Lösung von (5.17) ist eine schwache Lösung. Ist eine schwache Lösung ein Element von $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, so ist sie eine klassische Lösung.*

Beweis. Es bleibt die zweite Aussage nachzuweisen. Seien $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine schwache Lösung von (5.17) und $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wir erhalten nach partieller Integration, weil $v = 0$ auf $\partial\Omega$:

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu - f)v dx = 0.$$

Diese Beziehung gilt für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Aus Lemma 1.9 folgt, dass $-\operatorname{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu - f = 0$ in Ω . Verwenden wir in der schwachen Formulierung als zweiten Schritt $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, so folgt nach partieller Integration

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu)v dx + \int_{\partial\Omega} (A\nabla u) \cdot \nu v ds = \int_{\partial\Omega} g v ds + \int_{\Omega} f v dx.$$

Da u die Differentialgleichung löst, folgt

$$\int_{\partial\Omega} (A\nabla u) \cdot \nu v ds = \int_{\partial\Omega} g v ds \quad \text{für alle } v \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

ähnlich wie in Lemma 1.9 erhalten wir daraus die Neumann-Bedingung. \square

Wir wenden uns nun der Lösung von (5.17) zu. Im Beweis von Satz 5.20 haben wir die Poincaré-Ungleichung benutzt, um die Koerzivität der Bilinearform zu zeigen. Für H^1 -Funktionen steht jedoch die Poincaré-Ungleichung aus Satz 5.11 nicht zur Verfügung. Wir benötigen daher eine zusätzliche Voraussetzung. Es gilt:

Theorem 5.23. *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 5.20. Ferner seien $g \in H^1(\Omega)$, $b = 0$ und $c(x) \geq c_0 > 0$ für $x \in \Omega$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (5.17), und es gilt*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|g\|_{H^1(\Omega)}),$$

wobei $C_1 = 1/\min\{\alpha, c_0\}$ und C_2 ist das Quadrat der Stetigkeitskonstante des Randoperators $T : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$.

Beweis. Die Koerzivität von a folgt aus

$$a(u, u) = \int_{\Omega} (\nabla u^T A \nabla u + cu^2) dx \geq \int_{\Omega} (\alpha |\nabla u|^2 + c_0 u^2) dx \geq \min\{\alpha, c_0\} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Da a und F stetig sind, können wir das Lemma von Lax-Milgram anwenden und erhalten eine eindeutig bestimmte schwache Lösung von (5.17). Die A-priori-Abschätzung ergibt sich aus

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \min\{\alpha, c_0\}^{-1} \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

und der Stetigkeitsabschätzung von F . □

Was geschieht, falls $c(x)$ nicht durch eine positive Konstante nach unten beschränkt ist, z.B. wenn $c = 0$? In diesem Fall können wir die Koerzivität von a nicht beweisen. Tatsächlich existiert eine Lösung nur unter einer zusätzlichen Bedingung. Ist nämlich u eine klassische Lösung von

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad (A(x)\nabla u) \cdot \nu = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (5.18)$$

und integrieren wir die Differentialgleichung, so ergibt sich nach dem Satz von Gauß:

$$\int_{\Omega} f dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(A(x)\nabla u) dx = - \int_{\partial\Omega} (A(x)\nabla u) \cdot \nu ds = - \int_{\partial\Omega} g ds.$$

Diese Bedingung ist notwendig für die Lösbarkeit von (5.18). Übrigens geht in diesem Fall auch die Eindeutigkeit verloren: Mit u ist auch $u + c$ für eine beliebige Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung. Um Eindeutigkeit zu gewährleisten, ist eine zusätzliche Bedingung notwendig, etwa die Forderung

$$\int_{\Omega} u dx = 0.$$

Unter diesen beiden Bedingungen folgt die eindeutige Lösbarkeit von (5.18).

5.4 Regularität

Unter welchen Bedingungen ist die schwache Lösung einer elliptischen Differentialgleichung regulär oder sogar eine klassische Lösung? Betrachte zur Motivation zunächst das Modellproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

mit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert Δu in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und kann durch die L^2 -Norm von f abgeschätzt werden. Wir begründen wie in Evans [7] heuristisch, dass die L^2 -Norm *aller*

zweiten partiellen Ableitungen von u durch die L^2 -Norm von f abgeschätzt werden kann. Sei u also eine klassische Lösung der Poisson-Gleichung. Wir quadrieren diese Gleichung, integrieren über \mathbb{R}^n und integrieren partiell:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx = \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i} u_{x_j x_j} dx = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i x_j} u_{x_j} dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_j} u_{x_j x_i} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^2 u|^2 dx. \end{aligned}$$

Da wir angenommen haben, dass u eine klassische Lösung ist, stellt dies keinen Beweis dar. Es ist allerdings möglich, die Regularität schwacher Lösungen rigoros zu beweisen, indem die partiellen Ableitungen durch Differenzenquotienten approximiert werden. Die entsprechenden Beweise sind technisch und lang, so dass wir auf die Literatur verweisen, z.B. Evans, Kapitel 6.3 [7] oder Gilbarg und Trudinger [8].

Das erste Resultat sagt aus, dass eine (schwache) Lösung der elliptischen Differentialgleichung

$$L(u) = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f(x) \quad \text{in } \Omega \quad (5.19)$$

bei regulären Daten im *Innern des Gebiets* auch regulär ist.

Theorem 5.24 (Regularität im Innern). Seien $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, $b_i, c \in C^k(\overline{\Omega})$ und $f \in H^k(\Omega)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ ($i, j = 1, \dots, n$). Ferner sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von (5.19) und ω ein Gebiet mit $\overline{\omega} \subset \Omega$. Dann gilt $u \in H^{k+2}(\omega)$ und, mit einer Konstante $C > 0$, die nur von ω, Ω und den Koeffizienten von L abhängt,

$$\|u\|_{H^{k+2}(\omega)} \leq C(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Die Lösung ist also immer zwei Differentiationsordnungen regulärer als die rechte Seite. Dies ist eine wesentliche Eigenschaft elliptischer Differentialgleichungen: Der Differentialoperator "glättet" die Lösungen. Bemerkenswerterweise haben die Randdaten keinen Einfluss auf die Regularität der Lösung im Innern. Regularität ist also hier eine lokale Eigenschaft.

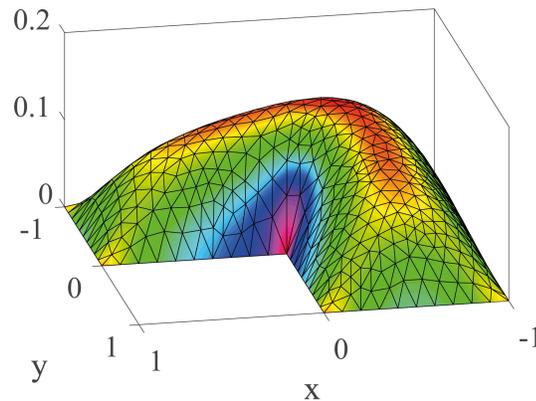
Sind die Randdaten und der Rand regulär, so ist die Lösung auch regulär bis zum Rand.

Theorem 5.25 (Regularität bis zum Rand). Es gelten die Voraussetzungen des vorigen Satzes. Zusätzlich sei $\partial\Omega \in C^{k+2}$ und $g \in H^{k+2}(\Omega)$, und es sei $u \in H^1(\Omega)$ die schwache Lösung des Dirichlet-Randwertproblems (5.19) und $u = g$ auf $\partial\Omega$. Dann gilt $u \in H^{k+2}(\Omega)$

und, mit einer Konstante $C > 0$, die nur von Ω und den Koeffizienten von L abhängt,

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|g\|_{H^{k+2}(\Omega)}).$$

Abbildung 5.6: Lösung des Problems $-\Delta u = 1$ in einem L-förmigen Gebiet Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Die Farbe gibt die Stärke des Gradienten an.



Die beiden obigen Sätze beantworten die Frage, unter welchen Bedingungen klassische Lösungen existieren. Sei nämlich $k \in \mathbb{N}$ mit $k > n/2$. Unter den Voraussetzungen von Satz 5.25 gilt $u \in H^{k+2}(\Omega)$. Der Sobolevsche Einbettungssatz 5.9 impliziert dann $u \in C^2(\overline{\Omega})$, d.h., u ist eine klassische Lösung von (5.19), $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Sind die Daten des Dirichlet-Randwertproblems aus $C^\infty(\overline{\Omega})$, so ist auch die Lösung eine $C^\infty(\overline{\Omega})$ -Funktion, denn sie ist ein Element in $H^{k+2}(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Beispielsweise ist die Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ im Innern des Lösungsgebiets immer unendlich oft differenzierbar. Ist der Rand des Gebiets C^∞ , so ist u überall unendlich oft differenzierbar.

Wenn die Glattheitsbedingung des Gebiets nicht erfüllt ist, gilt die Regularitätsaussage von Satz 5.25 im Allgemeinen nicht mehr. Ein Beispiel ist durch das L-förmige Gebiet $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus ([0, 1] \times [0, 1])$ gegeben, das keinen C^1 -Rand besitzt. Abbildung 5.6 stellt die Lösung der Poisson-Gleichung $-\Delta u = 1$ in Ω mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen dar. An der einspringenden Ecke $(0, 0)$ verliert die Lösung u an Regularität. Man kann zeigen, dass u in der Nähe des Ursprungs durch $r^{2/3} \sin((2\phi + \pi)/3)$ approximiert werden kann, wobei (r, ϕ) sphärische Koordinaten sind. Die Ableitung dieser Funktion in Radialrichtung ist unbeschränkt, d.h., u ist keine klassische Lösung (aber weiterhin eine schwache Lösung).

Ähnliche Resultate wie oben gelten auch für Lösungen von Neumann-Randwertproblemen, siehe Troianiello [13].

5.5 Maximumprinzip

Wir haben in Abschnitt 4.3 gezeigt, dass für Lösungen der Poisson-Gleichung unter bestimmten Bedingungen ein Maximumprinzip gilt. In diesem Abschnitt zeigen wir

analoge Resultate für allgemeine elliptische Differentialoperatoren der Form

$$L(u) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad x \in \Omega. \quad (5.20)$$

Beachte, dass die Differentialgleichung im vorigen Abschnitt in *Divergenzform* formuliert wurde:

$$L'(u) = -\operatorname{div}(A'(x)\nabla u) + b'(x) \cdot \nabla u + c(x)u,$$

wobei $A' = (a'_{ij})$ und $b' = (b'_i)$. Genügend Regularität vorausgesetzt, können wir solche Operatoren stets in die Form (5.20) bringen, denn durch Differentiation folgt

$$L'(u) = - \sum_{i,j=1}^n a'_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n \left(- \sum_{i=1}^n \frac{\partial a'_{ij}}{\partial x_i} + b'_j \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu,$$

und wir können $a_{ij} = a'_{ij}$ und $b_j = - \sum_i \partial a'_{ij} / \partial x_i + b'_j$ definieren.

Wir setzen in diesem Abschnitt folgendes voraus: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine offene, beschränkte Menge, (a_{ij}) ist symmetrisch, $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, und L ist gleichmäßig elliptisch, d.h., es gilt (5.6). Wir verallgemeinern zuerst das schwache Maximumprinzip.

Theorem 5.26 (Schwach Maximumprinzip für $c = 0$). Sei $c = 0$. Für $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ gelte

$$L(u) \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad L(u) \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Dann folgt

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) \quad \text{bzw.} \quad \inf_{x \in \Omega} u(x) = \inf_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Beweis. *1. Schritt:* Wir nehmen zunächst an, dass $L(u) < 0$ in Ω gilt. Wir nehmen weiterhin an, es gäbe ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \sup_{\Omega} u$. Dann ist $\nabla u(x_0) = 0$, und $D^2u(x_0)$ ist negativ semidefinit. Wir behaupten, dass daraus $(L(u))(x_0) \geq 0$ im Widerspruch zur Annahme folgt. Um dies zu zeigen, bringen wir die Matrix $A = (a_{ij}(x_0))$ auf Diagonalgestalt. Da nämlich A symmetrisch und positiv definit ist, existiert eine orthogonale Transformationsmatrix $S = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass SAS^{-1} gleich der Diagonalmatrix mit Elementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist und $\lambda_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Wir setzen $(b_{ij}) = B = D^2u(x_0) = B^T$ und erhalten

$$\begin{aligned} (L(u))(x_0) &= - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} = - \sum_{i=1}^n (AB^T)_{ii} \\ &= -\operatorname{sp}(AB^T) = -\operatorname{sp}(AB), \end{aligned}$$

wobei $\text{sp}(AB)$ die Spur der Matrix AB ist. Die Matrix B ist negativ semidefinit; daher sind alle Diagonalelemente β_i von SBS^{-1} nichtpositiv: $\beta_i \leq 0, i = 1, \dots, n$. Da die Spur einer Matrix invariant bezüglich Ähnlichkeitstransformationen ist, folgt wegen $\lambda_i > 0$

$$(L(u))(x_0) = -\text{sp}(SABS^{-1}) = -\text{sp}(SAS^{-1}SBS^{-1}) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i \geq 0.$$

Dies widerspricht der Annahme. Folglich kann das Maximum nicht im Innern des Gebiets angenommen werden.

2. Schritt: Für den allgemeinen Fall betrachten wir die Funktion $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}$, wobei $\varepsilon > 0, \lambda > 0$. Die Elliptizität von L bedeutet, dass $z^T A(x)z \geq \alpha|z|^2$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \Omega$ gilt. Ist z der erste Einheitsvektor des \mathbb{R}^n , so folgt $a_{11}(x) \geq \alpha$ für $x \in \Omega$. Außerdem haben wir vorausgesetzt, dass b beschränkt ist; es existiert also ein $b_0 > 0$, so dass $|b_1(x)| \leq b_0$ für $x \in \Omega$. Damit erhalten wir

$$L(u_\varepsilon) = L(u) + L(\varepsilon e^{\lambda x_1}) \leq \varepsilon L(e^{\lambda x_1}) = \varepsilon(-\lambda^2 a_{11} + \lambda b_1)e^{\lambda x_1} \leq \lambda \varepsilon(-\lambda \alpha + b_0)e^{\lambda x_1} < 0,$$

wenn wir $\lambda > b_0/\alpha$ wählen. Der erste Schritt impliziert

$$\sup_{x \in \Omega} (u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}) = \sup_{x \in \partial\Omega} (u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}),$$

und der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert die Behauptung des Satzes.

3. Schritt: Das Minimumprinzip folgt, wenn wir das Maximumprinzip auf die Funktion $-u$ anwenden. \square

Auch im Fall $c \geq 0$ kann ein schwaches Maximumprinzip bewiesen werden.

Theorem 5.27 (Schwachtes Maximumprinzip für $c \geq 0$). Sei $c \geq 0$ in Ω . Für $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ gelte

$$L(u) \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad L(u) \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Dann folgt

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) \leq \max \left\{ 0, \sup_{x \in \partial\Omega} u(x) \right\} \quad \text{bzw.} \quad \inf_{x \in \Omega} u(x) \geq \min \left\{ 0, \inf_{x \in \partial\Omega} u(x) \right\}.$$

Beweis. Wir beweisen nur den Fall $L(u) \leq 0$. Sei $\Omega_+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$. Falls Ω_+ die leere Menge ist, folgt sofort $u(x) \leq 0$ für alle $x \in \Omega$. Anderenfalls folgt in Ω_+

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \leq -cu \leq 0.$$

Aus dem vorigen Satz folgt, da Ω_+ offen ist, dass die Funktion u ihr Maximum an $x_0 \in \partial\Omega_+$ annimmt. Der Rand $\partial\Omega_+$ setzt sich zusammen aus Randpunkten von Ω und Punkten, an denen u verschwindet. Im ersteren Fall ist $u(x_0) = \sup_{x \in \Omega} u(x)$, im letzteren Fall $u(x_0) = 0$. Dies zeigt die Behauptung. \square

Das starke Maximumprinzip kann ebenfalls auf allgemeinere elliptische Differentialoperatoren übertragen werden. Hierfür benötigen wir zuerst ein Hilfsresultat über die Normalenableitung an einem Randpunkt. Für dieses Resultat muss der Rand eine gewisse Regularitätsforderung erfüllen, nämlich die innere Kugelbedingung.

Definition 5.28. Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt an $x_0 \in \partial\Omega$ die *innere Kugelbedingung*, wenn es eine offene Kugel $B \subset \Omega$ gibt, so dass $x_0 \in \partial B$.

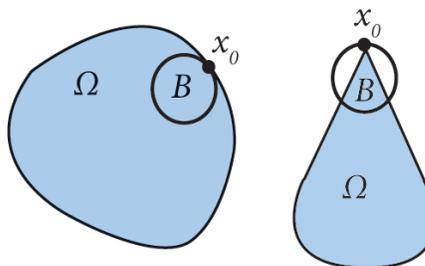


Abbildung 5.7: Das linke Gebiet erfüllt die innere Kugelbedingung an x_0 , das rechte Gebiet nicht.

Gebiete mit einem Rand $\partial\Omega \in C^2$ erfüllen die innere Kugelbedingung. Für Eckpunkte von Rechtecken im \mathbb{R}^2 oder Quader im \mathbb{R}^3 existiert keine Kugel, die vollständig im Gebiet liegt und den Eckpunkt enthält, so dass diese Gebiete die innere Kugelbedingung nicht erfüllen (siehe auch Abbildung 5.7).

Lemma 5.29 (Hopf). Wir setzen voraus:

- (i) Es gelte $L(u) \leq 0$ in Ω für ein $u \in C^2(\Omega)$.
- (ii) Seien $x_0 \in \partial\Omega$, u stetig differenzierbar an x_0 und $u(x_0) > u(x)$ für alle $x \in \Omega$.
- (iii) Es sei entweder $c = 0$ oder $c \geq 0$ in Ω (mit $c \in L^\infty(\Omega)$) und $u(x_0) \geq 0$.
- (iv) Die Menge Ω erfülle an x_0 die innere Kugelbedingung und der äußere Normaleneinheitsvektor v existiere an x_0 .

Dann folgt

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) > 0.$$

Die entscheidende Behauptung des Lemmas ist die strikte Ungleichung. Da u an x_0 maximal wird, ist $\partial u / \partial v(x_0) \geq 0$ klar.

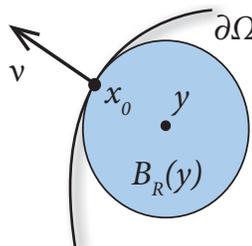


Abbildung 5.8: Illustration für den Beweis des Lemmas von Hopf.

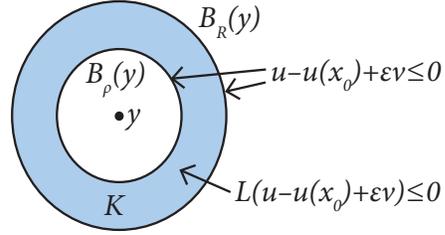


Abbildung 5.9: Illustration des Kreisrings
 $K = B_R(y) \setminus B_\rho(y)$.

Beweis. Die innere Kugelbedingung impliziert die Existenz einer Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $y \in \Omega$, so dass $x_0 \in \partial B_R(y)$ (siehe Abbildung 5.8). Wir definieren ferner für beliebige $\lambda > 0$

$$v(x) = e^{-\lambda r^2} - e^{-\lambda R^2}, \quad x \in B_R(y), \quad r = |x - y|.$$

Das Ziel ist die Anwendung des schwachen Maximumprinzips auf v in einem geeigneten Gebiet. Es gilt

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = -2\lambda(x_i - y_i)e^{-\lambda r^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) = (4\lambda^2(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\lambda\delta_{ij})e^{-\lambda r^2},$$

wobei $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{ii} = 1$ das Kronecker-Symbol ist. Die gleichmäßige Elliptizität von L impliziert dann

$$\begin{aligned} L(v) &= - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} + c v \\ &= -4\lambda^2 e^{-\lambda r^2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i - y_i)(x_j - y_j) + 2\lambda e^{-\lambda r^2} \sum_{i=1}^n a_{ii} - 2\lambda e^{-\lambda r^2} \sum_{i=1}^n b_i (x_i - y_i) + c v \\ &\leq e^{-\lambda r^2} \left(-4\lambda^2 \alpha r^2 + 2\lambda(\text{sp}(A) + |b| r) + c \right). \end{aligned}$$

Definiere den Kreisring $K = B_R(y) \setminus B_\rho(y)$ für $\rho < R$ (Abbildung 5.9). Wählen wir λ hinreichend groß, können wir erreichen, dass $L(v) \leq 0$ in K gilt. Nach Voraussetzung ist $u(x) - u(x_0) < 0$ für alle $x \in \partial B_\rho(y)$, so dass es ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0$ auf $\partial B_\rho(y)$ gibt. Dies gilt auch auf $\partial B_R(y)$, weil v dort verschwindet. Insgesamt haben wir also $L(u - u(x_0) + \varepsilon v) = L(u) - L(u(x_0)) + \varepsilon L(v) \leq -cu(x_0) \leq 0$ in K und $u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0$ auf $\partial K = \partial B_R(y) \cup \partial B_\rho(y)$ bewiesen. Aus dem schwachen Maximumprinzip (Satz 5.27) folgt $u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0$ in K . Da die Funktion $u - u(x_0) + \varepsilon v$ an der Stelle x_0 verschwindet, muss die Normalenableitung an dieser Stelle nichtnegativ sein:

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial \nu}(u - u(x_0) + \varepsilon v)(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0).$$

Daraus folgt wegen $\nabla v(x_0) = -2\lambda(x_0 - y)e^{-\lambda R^2}$ und $\nu = (x_0 - y)/|x_0 - y| = (x_0 - y)/R$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = -\varepsilon \nabla v(x_0) \cdot \nu = 2\varepsilon \lambda R e^{-\lambda R^2} > 0,$$

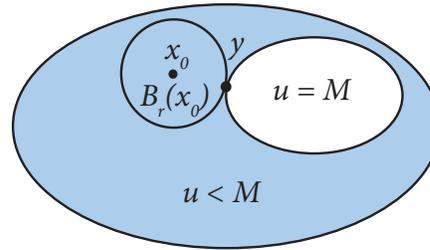


Abbildung 5.10: Illustration für den Beweis des starken Maximumprinzips.

also die Behauptung. □

Aus dem Lemma von Hopf folgt nun das starke Maximumprinzip.

Theorem 5.30 (Starkes Maximumprinzip). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Seien $c = 0$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $L(u) \leq 0$ (bzw. $L(u) \geq 0$ in Ω). Wenn u den maximalen (bzw. minimalen) Wert in Ω annimmt, dann ist u konstant. Die Aussage bleibt gültig für $c \geq 0$ in Ω , wenn u ein nichtnegatives Maximum (bzw. nichtpositives Minimum) in Ω annimmt.

Beweis. Wir machen die Widerspruchsannahme, dass u nicht konstant ist und das Maximum M in Ω annimmt. Definiere $U = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ und $V = \{x \in \Omega : u(x) < M\}$. Sei $x_0 \in V$ mit $\text{dist}(x_0, U) < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ und sei $B_r(x_0)$ die größte Kugel mit Mittelpunkt x_0 , deren Inneres noch in V liegt (siehe Abbildung 5.10). Dann existiert ein Punkt $y \in U$ mit $y \in \partial B_r(x_0)$. Außerdem gilt $u < M$ in $B_r(x_0)$. Damit sind die Voraussetzungen des Lemmas von Hopf erfüllt, und wir erhalten $\partial u / \partial \nu(y) > 0$. Andererseits nimmt u das Maximum in $y \in \Omega$ an, also $\nabla u(y) = 0$; Widerspruch. □

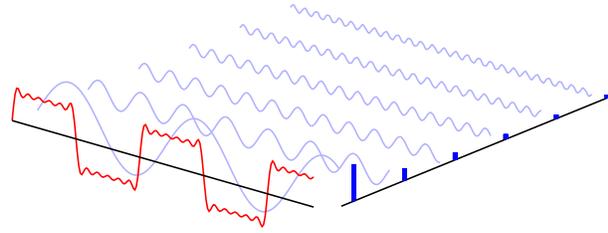


Abbildung 6.1: Zerlegung eines Signals (rot) in seine harmonischen Bestandteile (blau).

6 Parabolische Gleichungen

6.1 Fourier-Transformation und Wärmeleitungsgleichung

Die Fourier-Transformation ist ein nützliches Hilfsmittel zur Lösung linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten im \mathbb{R}^n . Wir werden sie auf die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (6.1)$$

anwenden. Die Fourier-Transformation kann als eine Verallgemeinerung einer Fourier-Reihe für nichtperiodische Funktionen interpretiert werden. Mit ihrer Hilfe kann ein Signal in seine Frequenzen zerlegt werden; siehe Abbildung 6.1.

Definition 6.1. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n) = L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Dann ist die *Fourier-Transformation* von f definiert durch

$$\widehat{f}(k) = F[f](k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx, \quad k \in \mathbb{R}^n.$$

Wir nennen die folgende Funktion die *Fourier-Kotransformation* von f :

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(k) e^{ik \cdot x} dk, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Integrale sind wohldefiniert, da $|e^{\pm ik \cdot x}| = 1$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wegen

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{k \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ik \cdot x}| |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

folgt, dass F den Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$ nach $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ abbildet. Man kann sogar zeigen, dass $F : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^0(\mathbb{R}^n) = \{g \in C^0(\mathbb{R}^n) : g(k) \rightarrow 0 \text{ für } |k| \rightarrow \infty\}$ abbildet.

Beispiel 6.2. Betrachte die Gauß-Funktion $\phi(x) = e^{-|x|^2/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und $\widehat{\phi}$ ist definiert. Unser Ziel ist die Berechnung von $\widehat{\phi}$. Dazu bemerken wir,

dass ϕ die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung

$$\nabla\phi + x\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(0) = 1,$$

ist. Wir wenden auf diese Gleichung die Fourier-Transformation an. Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} F[\phi_{x_j}](k) &= - \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{-ik \cdot x}) dx = ik_j F[\phi](k), \\ F[x_j \phi](k) &= i \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \frac{\partial}{\partial k_j} (e^{-ik \cdot x}) dx = i \frac{\partial}{\partial k_j} F[\phi](k). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Daher ist

$$0 = F[\nabla\phi + x\phi] = ik\widehat{\phi} + i\nabla_k\widehat{\phi}.$$

Die Fourier-Transformierte $\widehat{\phi}$ löst also dieselbe Differentialgleichung wie ϕ . Außerdem gilt

$$\widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2/2} dx_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2/2} dx_n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \right)^n = (2\pi)^{n/2}.$$

Da die Lösung der Differentialgleichung mit Anfangswert eindeutig bestimmt ist, muss also $\widehat{\phi}$ das $(2\pi)^{n/2}$ -Vielfache von ϕ sein. Wir erhalten

$$\widehat{e^{-|x|^2/2}} = \widehat{\phi}(k) = (2\pi)^{n/2} e^{-|k|^2/2}, \quad k \in \mathbb{R}^n. \quad (6.3)$$

Die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion ist also wieder ein Vielfaches der Gauß-Funktion. \square

Im Allgemeinen ist die Fourier-Transformierte \widehat{f} nicht integrierbar, so dass wir nicht notwendigerweise die Fourier-Kotransformierte von \widehat{f} berechnen können. Wenn diese Eigenschaft erfüllt ist, entspricht die Fourier-Kotransformierte der inversen Fourier-Transformation.

Theorem 6.3 (Inversionsformel). Sei $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Fourier-Transformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\widehat{f} = F[f]$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = F^{-1}[\widehat{f}](x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk,$$

und F^{-1} ist die Inverse von F .

Der Beweis ist in Abschnitt 8.4 zu finden. Wir benötigen noch folgendes Resultat.

Lemma 6.4. Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}. \quad (6.4)$$

Beweis. Wir verwenden die Inversionsformel:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(k) \widehat{g}(k) e^{ik \cdot x} dk &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(k) e^{ik \cdot x} e^{-ik \cdot y} dk \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy = (f * g)(x). \end{aligned}$$

Also ist die Fourier-Transformation von $f * g$ gleich $\widehat{f} \widehat{g}$. \square

Bemerkung. Die Einschränkung der Fourier-Transformation auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen, deren Fourier-Transformierte auch in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt, ist zuweilen unpraktisch. Daher wird die Fourier-Transformation häufig zunächst auf sogenannte *Schwartz-Räume* $S(\mathbb{R}^n)$ definiert. (Dies sind Räume, deren Funktionen samt ihren Ableitungen rasch abklingen.) Die Fourier-Transformation F ist dann eine Abbildung von $S(\mathbb{R}^n)$ nach $S(\mathbb{R}^n)$. Man kann zeigen, dass diese Abbildung zu einer (surjektiven und isometrischen) Abbildung von $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden kann. Die Inverse F^{-1} bildet $L^2(\mathbb{R}^n)$ ebenfalls nach $L^2(\mathbb{R}^n)$ ab.

Wir kehren zum Anfangswertproblem der Wärmeleitungsgleichung (6.1) zurück. Dazu nehmen wir an, dass dieses Problem eine Lösung u besitzt, so dass für alle $t \geq 0$ $u(\cdot, t), u_t(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt. Dann können wir die Wärmeleitungsgleichung Fourier-transformieren. Wir haben bereits in (6.2) gezeigt, dass die Fourier-Transformation Ableitungen in Produkte transformiert: $F[\nabla u](k) = ikF[u](k)$. Daraus folgt $\widehat{\Delta u} = -|k|^2 \widehat{u}$ und

$$0 = F[u_t - \Delta u](k) = \widehat{u}_t + |k|^2 \widehat{u}, \quad k \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\widehat{u}(k, \cdot)$, die der Anfangsbedingung $\widehat{u}(k, 0) = \widehat{u}_0$ genügt. Eine Integration ergibt

$$\widehat{u}(k, t) = \widehat{u}_0 e^{-|k|^2 t}.$$

Wenden wir die Inversionsformel an, so erhalten wir:

$$u(x, t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|k|^2 t} \widehat{u}_0(k) e^{ik \cdot x} dk.$$

Wir können diese Formel vereinfachen. Sei dafür $w = F^{-1}[e^{-|k|^2 t}]$. Dann impliziert (6.4)

$$u(x, t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{w}(k, t) \widehat{u}_0(k) e^{ik \cdot x} dk = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{w * u_0}(k, t) e^{ik \cdot x} dk = (w * u_0)(x, t). \quad (6.5)$$

Es bleibt w auszurechnen. Wir transformieren $y = \sqrt{2t}k$ und verwenden (6.3):

$$\begin{aligned} w(x, t) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|k|^2 t} e^{ik \cdot x} dk = (2\pi)^{-n} (2t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/2} e^{iy \cdot x/\sqrt{2t}} dy \\ &= (4\pi t)^{-n/2} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi)^{n/2} e^{-|y|^2/2} e^{iy \cdot x/\sqrt{2t}} dy \\ &= (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t} \Big|_{k=x/\sqrt{2t}} = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Beziehung in (6.5) ein, so erhalten wir eine Kandidatin für eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Das folgende Resultat zeigt, dass diese Funktion die Wärmeleitungsgleichung tatsächlich löst.

Proposition 6.5. *Die Funktion*

$$u(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} u_0(y) dy \quad (6.6)$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert $u(\cdot, 0) = u_0$ in \mathbb{R}^n .

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass durch (6.6) eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung gegeben ist. Da $G(x, t) := (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$ eine Approximation der Delta-Distribution ist, $G(\cdot, t) \rightarrow \delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, folgt $u(\cdot, t) = G(\cdot, t) * u_0 \rightarrow \delta * u_0 = u_0$ zuerst für Testfunktionen u_0 und dann für alle $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Für Details siehe Evans, Seiten 49ff. [7].

Da die *Fundamentallösung* $w(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$ für $t \geq 0$ und $w(x, t) = 0$ für $t \leq 0$ (außer an $(0, 0)$) beliebig oft differenzierbar ist und die Lösung u eine Konvolution der Fundamentallösung und der Anfangsbedingung ist, können wir $u(\cdot, t)$ für $t > 0$ unendlich oft ableiten. Dies deutet auf eine erstaunliche Regularitätseigenschaft hin: Selbst bei nicht differenzierbaren Anfangsdaten ist die Lösung für alle positiven Zeiten unendlich oft differenzierbar.

Außerdem besitzt die Lösung eine *unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit*. Darunter verstehen wir die folgende Tatsache. Sei $u_0 \geq 0$ (aber nicht identisch gleich null). Die Formel (6.6) zeigt, dass $u(x, t)$ strikt positiv für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und *für alle* $t > 0$ ist. Selbst für kleine Zeiten ist die Lösung überall positiv, obwohl sie zur Zeit $t = 0$ nur nichtnegativ ist.

6.2 Symmetrische und kompakte Operatoren

Unser Ziel ist der Beweis der Existenz von Lösungen für das Anfangsrandwertproblem

$$u_t - \operatorname{div}(A\nabla u) + cu = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad (6.7)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, \infty). \quad (6.8)$$

Um die Existenz einer Lösung zu zeigen, interpretieren wir die obige Differentialgleichung als eine gewöhnliche Differentialgleichung mit Werten $u(t) = u(\cdot, t)$ in einem Banachraum,

$$u_t + L(u) = 0.$$

Wäre L eine Matrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$, so würde es sich um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen handeln. Um dieses Problem zu lösen, könnten wir die Matrix diagonalisieren und die entkoppelten Probleme analysieren. Dazu nehmen wir an, dass die Matrix L symmetrisch ist. Dann sind die Eigenwerte von L reell und es existiert eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n aus Eigenvektoren von L . Sei (v_1, \dots, v_n) eine solche Basis mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wir machen nun den Lösungsansatz

$$u(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t)v_k.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert wegen $Lv_k = \lambda_k v_k$

$$0 = u_t + L(u) = \sum_{k=1}^n (u'_k + \lambda_k u_k)v_k.$$

Da (v_1, \dots, v_n) eine Basis des \mathbb{R}^n ist, folgt für alle $k = 1, \dots, n$:

$$u'_k + \lambda_k u_k = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet $u_k(t) = c_k e^{-\lambda_k t}$, so dass die allgemeine Lösung des Systems als

$$u(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-\lambda_k t} v_k \tag{6.9}$$

geschrieben werden kann. Hierbei ist $u(t)$ eine Abkürzung von $u(\cdot, t)$, d.h., $u(t)$ ist eine Funktion des Ortes. Die Koeffizienten c_k kann man aus der Anfangsbedingung $u(0) = u_0$ berechnen: Aus $u_0 = \sum_k d_k v_k$ folgt $u_0 \cdot v_j = \sum_k d_k v_k \cdot v_j = d_j$, denn die Vektoren (v_k) sind orthonormal. Andererseits ist $u(0) = \sum_k c_k v_k$, also muss

$$c_k = u_0 \cdot v_k$$

gelten. Wir sehen: Die Lösung des Differentialgleichungssystems lässt sich als die Linearkombination der Eigenvektoren von L schreiben. Die zeitliche Entwicklung wird durch die Eigenwerte bestimmt. Es liegt nahe, diese Formulierung auf Differentialoperatoren $L(u) = -\operatorname{div}(A \nabla u) + cu$ zu übertragen. Hierfür müssen wir klären, was "Symmetrie" bedeutet und wie das Eigenwertproblem genau formuliert werden kann. Dazu benötigen wir einige Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis, die wir im Folgenden bereit stellen.

Sei H ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) . In unendlichdimensionalen Hilberträumen wird die Summe (6.9) eine unendliche Reihe sein, so dass wir kurz auf die Konvergenz von Banachraumwertigen unendlichen Reihen eingehen müssen.

Definition 6.6. Eine Folge $(v_n) \subset H$ heißt *vollständiges Orthonormalsystem*, wenn alle Elemente aus (v_n) paarweise orthogonal zueinander und normiert sind und wenn für $\phi \in H$ aus $(v_n, \phi) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\phi = 0$.

Lemma 6.7. Sei (v_n) ein vollständiges Orthonormalsystem in H und $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$$

gegen ein $v \in H$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergiert. In diesem Fall gilt $a_k = (v, v_k)$ und die *Parseval-Gleichung*

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \quad (6.10)$$

Beweis. Der Beweis ist nicht schwer. Wir definieren die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k v_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$$

und rechnen für $m > n$

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^m a_k v_k, \sum_{j=n+1}^m a_j v_j \right) = \sum_{j,k=n+1}^m a_k a_j (v_k, v_j) = \sum_{k=n+1}^m a_k^2 = t_m - t_n.$$

Also ist (s_n) eine Cauchy-Folge in H genau dann, wenn (t_n) eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} ist. Aus der Vollständigkeit von H und \mathbb{R} folgt die erste Aussage. Die zweite Aussage haben wir bereits weiter oben gezeigt. Die Parseval-Gleichung ergibt sich schließlich aus der Orthonormalität von (v_n) . \square

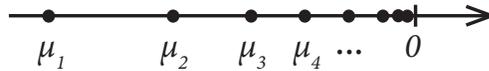
Wir betrachten als nächstes spezielle lineare Operatoren auf H .

Definition 6.8. Seien $L : D(L) \subset H \rightarrow H$ und $K : H \rightarrow H$ lineare Operatoren. Wir definieren:

- (i) Der Operator L heißt *symmetrisch*, wenn für alle $u, v \in D(L)$ gilt $(Lu, v) = (u, Lv)$.
- (ii) Der Operator K heißt *kompakt*, wenn er beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet, d.h., wenn für alle Folgen $(u_n) \subset H$ mit $\|u_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für ein $C > 0$ eine konvergente Teilfolge von (Ku_n) existiert.

Jeder kompakte Operator ist beschränkt, denn der Abschluss des Bildes $\overline{K(B)}$ ist für jede Kugel B kompakt, also beschränkt.

Abbildung 6.2: Beispiel einer Eigenwertverteilung eines symmetrischen, kompakten Operators.



Beispiel 6.9. (i) Es gelte $\partial\Omega \in C^1$, $A, |\nabla A|, c \in L^\infty(\Omega)$, und sei A symmetrisch. Seien $H = L^2(\Omega)$ und $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Der Operator $L : D(L) \rightarrow H$, definiert durch $Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu$ für $u \in D(L)$ ist wohldefiniert (d.h. $Lu \in H$) und symmetrisch, denn für alle $u, v \in D(L)$ gilt $u = 0$ und $v = 0$ auf $\partial\Omega$ und nach partieller Integration (siehe Satz 5.8)

$$(Lu, v) = \int_{\Omega} (-\operatorname{div}(A\nabla u) + cu)v dx = \int_{\Omega} (\nabla v^T A \nabla u + cuv) dx = (u, Lv). \quad (6.11)$$

(ii) In endlichdimensionalen Vektorräumen ist jeder lineare Operator beschränkt und kompakt, weil in solchen Räumen jede beschränkte Menge eine konvergente Teilfolge besitzt. Allgemeiner ist jeder lineare, stetige Operator, dessen Bild $K(H)$ endlichdimensional ist, kompakt.

Für die Eigenvektoren und Eigenwerte eines symmetrischen Operators gilt das folgende Resultat aus der Funktionalanalysis.

Proposition 6.10. Sei $L : D(L) \rightarrow H$ ein symmetrischer, linearer Operator. Dann sind alle Eigenwerte von L reell, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.

Für symmetrische Operatoren, die zusätzlich kompakt sind, können wir die Eigenwerte genauer charakterisieren (siehe Abbildung 6.2).

Theorem 6.11 (Entwicklungssatz symmetrischer, kompakter Operatoren). Sei $K : H \rightarrow H$ ein linearer, injektiver, symmetrischer, kompakter Operator. Dann gilt:

1. Der Operator K hat höchstens abzählbar viele Eigenwerte μ_k , $k \in I$, mit endlicher Vielfachheit. Die Eigenwerte seien entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach gezählt, und $|\mu_k|$ sei monoton fallend angeordnet.
2. Im Falle $I = \mathbb{N}$ bildet (μ_k) eine Nullfolge.
3. Es existiert ein vollständiges Orthonormalsystem (v_k) aus Eigenvektoren von K und für alle $u \in H$ gilt

$$Ku = \sum_{k \in I} \mu_k (u, v_k) v_k.$$

6.3 Existenz von Lösungen homogener Probleme

Nach den Vorbereitungen des vorigen Abschnitts kehren wir wieder zum Anfangsrandwertproblem (6.7)-(6.8) zurück. Wir setzen voraus, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt ist, $\partial\Omega \in C^1$ gilt, die Koeffizienten $A(x) = (a_{ij}(x))$ und $c(x) \geq 0$ in der parabolischen Gleichung (6.7) nur vom Ort abhängen und beschränkt in Ω sind, $|\nabla A|$ beschränkt ist und dass die Matrix A symmetrisch und gleichmäßig positiv definit ist.

Entscheidend für die Lösungsformel ist die Bestimmung eines vollständigen Orthonormalsystems, in dem die Lösung entwickelt werden kann. Seien $H = L^2(\Omega)$ und $K : H \rightarrow H$ definiert durch $Kf = u$, $f \in H$, wobei u die eindeutig bestimmte schwache Lösung des stationären Problems $-\operatorname{div}(A\nabla u) + cu = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$ ist, also des Problems

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega), \quad (6.12)$$

wobei

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u^T A \nabla v + cuv) dx, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Aus $u = 0$ folgt sofort $f = 0$, d.h., der Operator $K : H \rightarrow H$ ist injektiv. Daher können wir die Inverse $L = K^{-1}$ auf dem Bild $D(L) := K(H)$ definieren. Beachte, dass der Operator $K : H \rightarrow K(H)$ invertierbar ist, möglicherweise aber nicht der Operator $K : H \rightarrow H$. Es gilt $D(L) \subset H_0^1(\Omega)$.

Wir diskutieren im Folgenden den Unterschied zwischen den Operatoren

- ▶ $L : D(L) \rightarrow H$, $Lu = f$ oder $(Lu, v) = a(u, v)$ für $u \in D(L)$, $v \in H_0^1(\Omega)$;
- ▶ $\tilde{L} : D(\tilde{L}) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\tilde{L}(u) = -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu$ für $u \in D(\tilde{L})$.

Wir können für $u \in D(\tilde{L})$ und $v \in H_0^1(\Omega)$ auch schreiben:

$$(\tilde{L}u, v) = \int_{\Omega} (-\operatorname{div}(A\nabla u) + cu)v dx = \int_{\Omega} (\nabla v^T A \nabla u + cuv) dx = a(u, v) \quad \text{für } v \in H_0^1(\Omega).$$

Falls $u \in D(\tilde{L}) \subset D(L)$ (diese Inklusion wird in Lemma 6.13 bewiesen), so ist

$$(Lu, v) = a(u, v) = (\tilde{L}u, v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega),$$

also $Lu = \tilde{L}u$. Die Operatoren L und \tilde{L} stimmen auf dem "kleineren" Definitionsbereich $D(\tilde{L})$ überein. Der Operator L ist jedoch für eine "größere Menge von Funktionen" definiert, nämlich für solche aus $D(L)$. In diesem Sinne können wir L als eine Erweiterung von \tilde{L} interpretieren. Diese Erweiterung ist notwendig, weil wir ansonsten keinen kompakten Operator $K = L^{-1} : H \rightarrow H$ definieren können.

Das Hauptresultat ist der folgende Existenzsatz.

Theorem 6.12 (Existenz von Lösungen homogener Probleme). Sei $u_0 \in L^2(\Omega)$. Es existiert ein vollständiges Orthonormalsystem (v_n) von $L^2(\Omega)$ (die Eigenfunktionen von

$L : D(L) \rightarrow L^2(\Omega)$ sind) und eine monoton wachsende Folge (λ_n) positiver Zahlen mit $\lambda_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ (die die Eigenwerte von L sind), so dass

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2} v_k \quad (6.13)$$

die eindeutig bestimmte Lösung von (6.7)-(6.8) im folgenden Sinne ist: Es gilt

$$u \in C^0([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0, \infty); L^2(\Omega)), \quad u(t) \in D(L) \text{ für alle } t > 0, \quad (6.14)$$

und die Differentialgleichung $u_t(t) + L(u(t)) = 0$ ist für alle $t > 0$ erfüllt. Ferner gilt die A-priori-Abschätzung

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1 t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \quad (6.15)$$

Unter $C^k([0, \infty); L^2(\Omega))$ ($k \in \mathbb{N}_0$) verstehen wir den Raum aller Funktionen $u(t) = u(\cdot, t)$, für die gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u^{(j)}(t+h) - u^{(j)}(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } t \geq 0, j = 0, \dots, k.$$

In welchem Sinne sind die Anfangs- und Randbedingungen erfüllt? Die Regularität von u impliziert, dass $t \mapsto u(\cdot, t)$ an der Stelle $t = 0$ im Sinne von $L^2(\Omega)$ stetig ist, d.h., die Anfangsbedingung $u(\cdot, 0) = u_0$ gilt im $L^2(\Omega)$ -Sinn. Andererseits ist $u(\cdot, t) \in D(L) \subset H_0^1(\Omega)$, d.h., die Randbedingung $u = 0$ gilt im Sinne des $H_0^1(\Omega)$.

Den Beweis des obigen Satzes führen wir in mehreren Schritten.

- 1. Schritt. Eigenschaften der Operatoren K und L .

Lemma 6.13. Für die oben definierten Operatoren gilt:

1. L ist symmetrisch und $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset D(L) \subset H_0^1(\Omega)$.
2. Falls $\partial\Omega \in C^2$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ und $c \in C^0(\overline{\Omega})$, dann gilt $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
3. K ist symmetrisch und kompakt.

Beweis. 1. Die Symmetrie von L folgt aus $(Lu, v)_{L^2} = a(u, v) = a(v, u) = (u, Lv)_{L^2}$ für alle $u, v \in D(L)$. Für jede Funktion $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ können wir $L(u)$ definieren, also ist $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset D(L)$.

2. Unter den Regularitätsvoraussetzungen an $\partial\Omega$, a_{ij} und c erfüllt die Lösung u von (6.12) die Regularität $Kf = u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (siehe Satz 5.25). Dies zeigt $D(L) = K(H) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und damit Gleichheit zwischen beiden Mengen.

3. Die Symmetrie von K folgt aus der von L , denn für $f, g \in H$ mit $u = Kf \in D(L)$, $v = Kg \in D(L)$ folgt $Lu = f$, $Lv = g$ und daher

$$(Kf, g)_{L^2} = (u, Lv)_{L^2} = (Lu, v)_{L^2} = (f, Kg)_{L^2}.$$

Nach dem Existenzsatz für schwache Lösungen elliptischer Probleme (Satz 5.20) gilt die Abschätzung

$$\|Kf\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

die zeigt, dass K als Operator von H nach $H_0^1(\Omega)$ beschränkt ist. Die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H$ ist gemäß Satz 5.10 von Rellich-Kondrachov kompakt. Also ist die Abbildung $K : H \rightarrow H_0^1(\Omega) \rightarrow H$ als Komposition einer stetigen und einer kompakten Abbildung kompakt. \square

• **2. Schritt.** Entwicklung von L in Eigenfunktionen. Nach Satz 6.11 können wir den symmetrischen, kompakten Operator $K : H \rightarrow H$ in Eigenfunktionen entwickeln. Es existiert ein vollständiges Orthonormalsystem $(v_n) \subset H$ aus Eigenfunktionen von K mit dazugehörigen Eigenwerten (μ_n) , für die $\mu_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ erfüllt ist. Insbesondere ist

$$u = Kf = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (f, v_k)_{L^2} v_k. \quad (6.16)$$

Die Gleichung $Kv_n = \mu_n v_n$ impliziert $v_n \in K(H) = D(L)$. Daher können wir L auf die Eigenwertgleichung anwenden und erhalten $Lv_n = \mu_n^{-1} v_n$. Beachte, dass wegen der Injektivität von K stets $\mu_n \neq 0$ gilt. Also ist $\lambda_n = \mu_n^{-1}$ ein Eigenwert von L mit Eigenvektor v_n .

Lemma 6.14. *Es gilt für alle $u \in D(L)$:*

$$Lu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, v_k)_{L^2} v_k. \quad (6.17)$$

Außerdem ist (λ_n) eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen mit $\lambda_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Schließlich gilt für alle $u \in H$: $u \in D(L)$ gilt genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (u, v_k)^2$ konvergiert.

Beweis. Aus (6.16) folgt für $u \in D(L)$:

$$(u, v_j) = \mu_j (f, v_j) = \lambda_j^{-1} (Lu, v_j)_{L^2},$$

woraus sich sofort (6.17) ergibt. Die Rechnung

$$\lambda_n \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = (Lv_n, v_n)_{L^2} = a(v_n, v_n) \geq \kappa \|v_n\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq \kappa \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2$$

(κ ist die Elliptizitätskonstante von A) impliziert $\lambda_n \geq \kappa > 0$. Da $(\mu_n) = (\lambda_n^{-1})$ eine monoton fallende Nullfolge ist, folgt $\lambda_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Um die Äquivalenz zu zeigen, sei zuerst $u \in D(L) = K(H)$. Dann existiert ein $f \in H$, so dass $f = Lu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, v_k)_{L^2} v_k$ (siehe die Darstellung (6.17)). Nach Lemma 6.7 folgt mit $a_k = \lambda_k (u, v_k)_{L^2}$, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (u, v_k)^2$ konvergiert. Konvergiert umgekehrt diese Reihe, definieren wir $\tilde{u} := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, v_k)_{L^2} v_k \in H$. Aus $Kv_k = \lambda_k^{-1} v_k$ folgt dann $K\tilde{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, v_k)_{L^2} Kv_k = \sum_{k=1}^{\infty} (u, v_k)_{L^2} v_k = u$ und damit $u \in K(H) = D(L)$. \square

Bemerkung. Im Beweis haben wir gezeigt, dass der Differentialoperator L , versehen mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen, ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen v_n mit zugehörigen Eigenwerten λ_n besitzt. Wir haben also nebenbei das Eigenwertproblem

$$Lu = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

gelöst. Die Eigenwerte λ_n sind monoton wachsend in n und unbeschränkt für $n \rightarrow \infty$, d.h. $\lambda_n \rightarrow \infty$. In Abbildung 6.3 illustrieren wir die ersten drei Eigenfunktionen für den Laplace-Operator $L = -\Delta$ mit homogenen Dirichlet-Bedingungen auf einem L-förmigen Gebiet Ω . \square

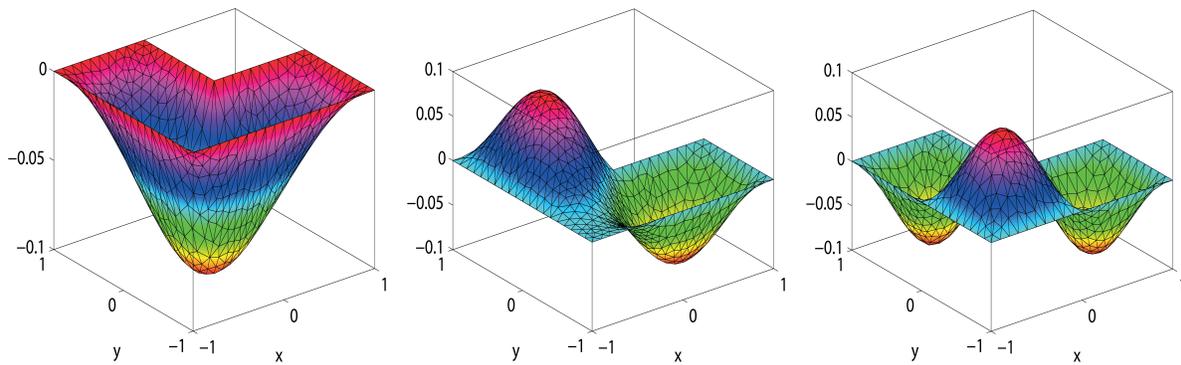


Abbildung 6.3: Die ersten drei Eigenfunktionen von $L = -\Delta$ auf einem L-förmigen Gebiet mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Die entsprechenden Eigenwerte sind näherungsweise gleich $\lambda_1 = 9.746$, $\lambda_2 = 15.303$ und $\lambda_3 = 19.924$.

• **3. Schritt.** Eigenschaften der Lösungsformel (6.13). Wir benötigen zuerst folgenden Spezialfall des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz.

Lemma 6.15. Seien $a_k : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, Funktionen mit den Eigenschaften

1. $a_k(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.
2. Es existieren $b_k > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und $h \in (-1, 1)$ gilt $|a_k(h)| \leq b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ konvergiert.

Dann gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(h)^2 = 0.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und wähle $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sum_{k=m+1}^{\infty} b_k^2 < \varepsilon/2$. Sei außerdem $|h|$ so klein, dass $\sum_{k=1}^m a_k(h)^2 < \varepsilon/2$. Dann erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(h)^2 \leq \sum_{k=1}^m a_k(h)^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} b_k^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Wir beweisen nun folgende Eigenschaften von u .

Lemma 6.16. Sei u durch die Reihenentwicklung (6.13) definiert, also

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2} v_k.$$

Dann gilt:

1. $u \in C^0([0, \infty); L^2(\Omega))$;
2. $u(t) \in D(L)$ für alle $t > 0$;
3. $u \in C^1((0, \infty); L^2(\Omega))$ und u löst $u_t + L(u) = 0$ für alle $t > 0$.

Beweis. 1. Aus $u_0 \in L^2(\Omega)$ und der Parsevalschen Gleichung (6.10) folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_0, v_k)_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty. \quad (6.18)$$

Außerdem ist $e^{-\lambda_k t} \leq 1$, so dass wir $u(t) \in L^2(\Omega)$ und

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, v_k)_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

für alle $t \geq 0$ erhalten. Um die Stetigkeit von u zu zeigen, betrachten wir für $t > 0$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $t + h \geq 0$ oder $t = 0$ und $h > 0$

$$\|u(t+h) - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-\lambda_k(t+h)} - e^{-\lambda_k t})^2 (u_0, v_k)_{L^2}^2.$$

Wir wenden Lemma 6.15 auf $a_k(h) = (e^{-\lambda_k(t+h)} - e^{-\lambda_k t})(u_0, v_k)_{L^2}$ an. Die Voraussetzungen des Lemmas sind mit $b_k = |(u_0, v_k)_{L^2}|$ erfüllt. Also ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u(t+h) - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0.$$

Dies beweist die Stetigkeit von u .

2. Aus Lemma 6.14 folgt, dass $u(t) \in D(L)$ genau dann gilt, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (e^{-\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2})^2 < \infty.$$

Dies ist eine Konsequenz aus der elementaren Ungleichung $|\lambda_k e^{-\lambda_k t}| \leq 1/(et)$ und aus (6.18), denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (e^{-\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2})^2 \leq \frac{1}{(et)^2} \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, v_k)_{L^2}^2 = \frac{1}{(et)^2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty.$$

Diese Abschätzung kann i.a. nur für $t > 0$ gelten, da $u(\cdot, 0) = u_0$ nur eine $L^2(\Omega)$ -Funktion ist.

3. Die Differenzierbarkeit von u nach t sowie die Gleichung $u_t + L(u) = 0$ ist bewiesen, wenn wir

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{h} (u(t+h) - u(t)) + L(u(t)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{h} (e^{-\lambda_k(t+h)} - e^{-\lambda_k t}) (u_0, v_k)_{L^2} v_k + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{-\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2} v_k \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{h} (e^{-\lambda_k(t+h)} - e^{-\lambda_k t}) + \lambda_k e^{-\lambda_k t} \right)^2}_{=a_k(h)^2} (u_0, v_k)_{L^2}^2 = 0 \end{aligned}$$

zeigen. Für die erste Gleichheit haben wir (6.17) und die Orthonormalität von (v_k) benutzt. Für die zweite Gleichheit verwenden wir Lemma 6.15. Wegen $a_k(h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$ und

$$\left| \frac{1}{h} (e^{-\lambda_k(t+h)} - e^{-\lambda_k t}) + \lambda_k e^{-\lambda_k t} \right| = \left| \underbrace{\lambda_k e^{-\lambda_k t}}_{\leq 1/(et)} \left(\underbrace{-\frac{e^{-\lambda_k h} - 1}{-\lambda_k h}}_{\in(0,1)} + 1 \right) \right| \leq \frac{1}{et},$$

falls $h > 0$, sowie

$$\left| \frac{1}{h} (e^{-\lambda_k(t+h)} - e^{-\lambda_k t}) + \lambda_k e^{-\lambda_k t} \right| = \left| \underbrace{\lambda_k e^{-\lambda_k t/2}}_{\leq 2/(et)} \left(\underbrace{-\frac{e^{-\lambda_k h} - 1}{-\lambda_k h}}_{\in(-1,0)} + 1 \right) e^{\lambda_k h} \underbrace{e^{-\lambda_k(t/2+h)}}_{\leq 1} \right| \leq \frac{2}{et},$$

falls $-t/2 < h < 0$, sind die Voraussetzungen des Lemmas mit $b_k = (2/et)|(u_0, v_k)_{L^2}|$ erfüllt, und es folgt die Behauptung. Die Stetigkeit von u_t bzw. $L(u(t))$ wird analog zum ersten Teil des Beweises gezeigt. \square

• **4. Schritt.** A-priori-Abschätzung. Wir folgern aus der Lösungsformel (6.13) und der Parsevalschen Gleichung (6.10)

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2}^2 \leq e^{-2\lambda_1 t} \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, v_k)_{L^2}^2 = e^{-2\lambda_1 t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

denn $\lambda_k \geq \lambda_1 > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

• **5. Schritt.** Eindeutigkeit der Lösung. Seien u und v zwei Lösungen im Sinne von Satz 6.12. Dann löst $u - v$ dasselbe Problem mit homogener Anfangsbedingung. Multiplikation der Differentialgleichung für $u - v$ und Integration über Ω liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (u - v, (u - v)_t)_{L^2} = -(u - v, L(u - v))_{L^2} \\ &= -(L(u - v), u - v)_{L^2} = -a(u - v, u - v) \leq 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit gilt sicherlich für Funktionen aus $C^1((0, \infty); \mathcal{D}(\Omega))$ und daher wegen der Dichtheit von $C^1((0, \infty); \mathcal{D}(\Omega))$ in $C^1((0, \infty); L^2(\Omega))$ auch für $C^1((0, \infty); L^2(\Omega))$ -Funktionen. Wir schließen $u - v = 0$, was die Eindeutigkeit zeigt.

Damit ist Satz 6.12 vollständig bewiesen.

6.4 Existenz von Lösungen inhomogener Probleme

Wir behandeln in diesem Abschnitt inhomogene Anfangswertprobleme der Form

$$u_t + L(u) = f(\cdot, t) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad (6.19)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad (6.20)$$

wobei $L(u) = -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu$ und die Voraussetzungen an A und c wie im vorigen Abschnitt seien. Ähnlich wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen können wir inhomogene Probleme mit Hilfe der Formel der Variation der Konstanten lösen. Wir definieren für festes $t \geq 0$ den Operator $e^{-Lt} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ durch

$$e^{-Lt}v = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} (v, v_k)_{L^2} v_k, \quad v \in L^2(\Omega), \quad (6.21)$$

wobei λ_k die Eigenwerte von L mit zugehörigen Eigenvektoren v_k sind (siehe den vorigen Abschnitt). Die Schreibweise e^{-Lt} ist symbolisch zu verstehen; man kann ihr im Rahmen der Halbgruppentheorie aber auch einen Sinn geben.

Theorem 6.17 (Existenz von Lösungen inhomogener Probleme). *Seien $u_0 \in L^2(\Omega)$ und $f \in C^0([0, \infty); L^2(\Omega))$. Dann ist*

$$u(t) = e^{-Lt}u_0 + \int_0^t e^{-L(t-s)}f(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (6.22)$$

die eindeutig bestimmte Lösung von (6.19)-(6.20) mit den Regularitätseigenschaften (6.14).

Außerdem gilt die A-priori-Abschätzung

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1 t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda_1} \sup_{0 < s < t} \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Wir motivieren zuerst die Lösungsformel (6.22). Da (v_n) ein vollständiges Orthonormalsystem des $L^2(\Omega)$ ist und $u(t) \in L^2(\Omega)$ für alle $t \geq 0$ gilt, können wir $u(t)$ in der Form

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n \quad \text{mit } u_n(t) = (u(t), v_n)_{L^2}$$

schreiben. Setzen wir diese Beziehung in die Differentialgleichung ein und setzen $f_k = (f, v_k)_{L^2}$, erhalten wir für $k \in \mathbb{N}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= (u_t + L(u) - f, v_k)_{L^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (u'_n v_n + u_n L(v_n), v_k)_{L^2} - (f, v_k)_{L^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (u'_n v_n + \lambda_n u_n v_n, v_k)_{L^2} - (f, v_k)_{L^2} = u'_k + \lambda_k u_k - f_k \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u_k(0) = (u(0), v_k)_{L^2} = (u_0, v_k)_{L^2}.$$

Dieses Anfangswertproblem kann mit der Variation der Konstanten gelöst werden:

$$u_k(t) = e^{-\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f_k(s) ds.$$

Der erste Summand stellt einen Fourier-Koeffizienten von $e^{-L t} u_0$ dar, der zweite Summand einen Fourier-Koeffizienten von $\int_0^t e^{-L(t-s)} f(s) ds$, denn

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t e^{-L(t-s)} f(s) ds, v_k \right)_{L^2} &= \int_0^t (e^{-L(t-s)} f(s), v_k)_{L^2} ds \\ &= \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j(t-s)} (f(s), v_j)_{L^2} v_j, v_k \right)_{L^2} ds \\ &= \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j(t-s)} f_j(s) (v_j, v_k)_{L^2} ds = \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f_k(s) ds. \end{aligned}$$

Das Zeitintegral darf nach dem Satz von Fubini mit dem Ortsintegral vertauscht werden. Es folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$(u(t), v_k)_{L^2} = u_k(t) = \left(e^{-L t} u_0 + \int_0^t e^{-L(t-s)} f(s) ds, v_k \right)_{L^2},$$

und damit

$$u(t) = e^{-Lt} u_0 + \int_0^t e^{-L(t-s)} f(s) ds.$$

Dies ist gerade die Lösungsformel (6.22).

Beweis von Satz 6.17. Die Regularität der Lösung folgt aus der Regularität von $e^{-Lt} u_0$ (siehe Satz 6.12). Indem wir die obige Rechnung in umgekehrter Reihenfolge durchführen, sehen wir, dass u eine Lösung von $u_t + L(u) = f$ ist. Die Eindeutigkeit folgt wie im letzten Schritt des Beweises von Satz 6.12.

Es bleibt die A-priori-Abschätzung zu zeigen. Wir verwenden die Dreiecksungleichung und die Abschätzung (6.15), also $\|e^{-Lt} u_0\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1 t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|e^{-Lt} u_0\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \int_0^t e^{-L(t-s)} f(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq e^{-\lambda_1 t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \int_0^t e^{-L(t-s)} f(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Der zweite Summand kann gemäß der Parseval-Ungleichung geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-L(t-s)} f(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-L(t-s)} f(s) ds, v_k \right)_{L^2} \right)^2 \Big)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f_k(s) ds \right)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei $f_k(s) = (f(s), v_k)_{L^2}$. Wir schätzen ab, indem wir $\lambda_1 \leq \lambda_k$ für $k \geq 1$ verwenden:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-L(t-s)} f(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{0 < s < t} f_k(s)^2 \left(\int_0^t e^{-\lambda_1(t-s)} ds \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{0 < s < t} f_k(s)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\lambda_1} \sup_{0 < s < t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(s)^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\lambda_1} \sup_{0 < s < t} \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz können wir die unendliche Summe und das Supremum im vorletzten Schritt vertauschen. Dies zeigt die Behauptung. \square

6.5 Regularität und Langzeitverhalten

• **Regularität.** Wie bei elliptischen Differentialgleichungen gilt, dass die Lösung umso regulärer ist, je regulärer die Daten $\partial\Omega$, A und c (aber nicht notwendigerweise u_0) sind. Sei u die Lösung des homogenen Anfangsrandwertproblems

$$u_t + L(u) = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad (6.23)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, \infty), \quad (6.24)$$

wobei $L(u) = -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu$. Die Darstellungen

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2} v_k, \quad Lu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{-\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2} v_k \quad (6.25)$$

(siehe (6.13) und (6.17)) legen die Vermutung nahe, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^m e^{-\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2} v_k$$

gleich $L^m u$ und dies gleich $(-1)^m d^m u / dt^m$ ist. Dies ist richtig, und der Beweis ist ähnlich wie der Beweis von $du/dt = Lu$ in Lemma 6.16. Wir fassen zusammen:

Theorem 6.18 (Regularität). Seien $u_0 \in L^2(\Omega)$ und u die Lösung von (6.23)-(6.24). Dann gilt

$$u \in C^\infty((0, \infty); L^2(\Omega)), \quad u(t) \in D(L^m) \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } m \in \mathbb{N}.$$

Falls der Rand des Gebiets und die Koeffizienten von L regulär sind, ist die Lösung u regulär im Ort. Seien $\partial\Omega \in C^\infty$, $a_{ij}, c \in C^\infty(\bar{\Omega})$ und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Dann gilt:

$$u(t) \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad \text{für alle } t > 0.$$

Die Lösung ist also bis zum Rand von Ω unendlich oft differenzierbar, obwohl der Anfangswert nur als quadratintegrierbar vorausgesetzt wurde. Dies zeigt eine erstaunliche Regularisierungseigenschaft parabolischer Gleichungen.

Regularität in $[0, \infty)$ können wir nur erwarten, wenn der Anfangswert hinreichend glatt ist und einer Kompatibilitätsbedingung genügt. Um dies einzusehen, nehmen wir an, dass $u \in C^1(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$. Wegen $u(0) = 0$ auf $\partial\Omega$ erhalten wir $Lu_0 = -(\partial u / \partial t)(\cdot, 0) = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir müssen also $Lu_0 = 0$ auf $\partial\Omega$ fordern. Allgemein gilt für $L = -\Delta$ (siehe Brézis, Théorème X.2 [4]), dass für $u_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $\Delta^n u_0 = 0$ auf $\partial\Omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Regularität $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ folgt.

Auch für inhomogene Probleme vom Typ $u_t + L(u) = f$ sind Regularitätsaussagen möglich, sofern zusätzlich f hinreichend glatt ist. Wir verweisen auf die Literatur, z.B. Evans [7] oder Ladyženskaya, Solonnikov, Ural'ceva [11].

Die Lösung des homogenen Problems in einem Quadrat $\Omega = (-1, 1)^2$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen ist in Abbildung 6.4 für mehrere Zeiten dargestellt. Der Anfangswert ist $u_0 = 1$ in $B_{0,4}(0)$ und $u_0 = 0$ sonst, also unstetig. Wir sehen die Glättungseigenschaft auch für sehr kleine Zeiten.

• **Langzeitverhalten.** Die Abschätzung (6.15) für die Lösung des homogenen Anfangsrandwertproblems,

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1 t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

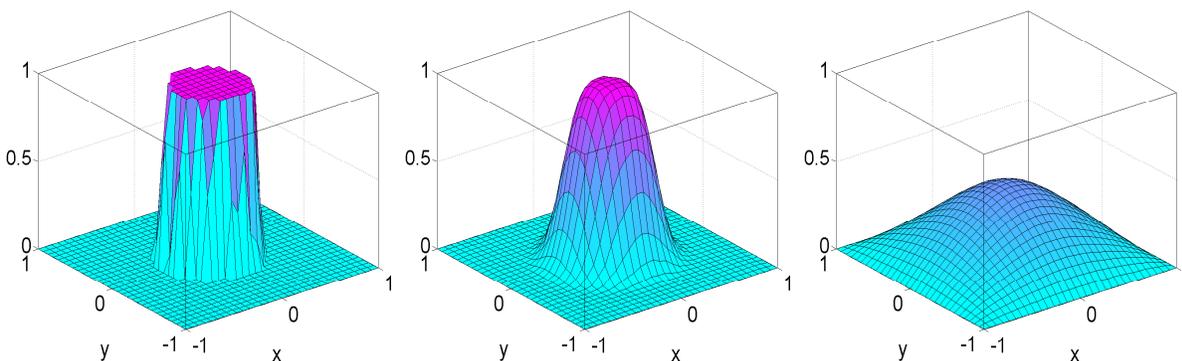


Abbildung 6.4: Lösung der parabolischen Gleichung $u_t - \Delta u = 1$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$ für $t = 0$ (links), $t = 0.005$ (Mitte) und $t = 0.1$ (rechts).

zeigt, dass wegen $\lambda_1 > 0$ die Lösung $u(t)$ für $t \rightarrow \infty$ exponentiell schnell gegen die Nullfunktion konvergiert. Konvergiert auch die Lösung des inhomogenen Problems gegen eine stationäre Lösung? Im Folgenden beantworten wir diese Frage. Eine notwendige Voraussetzung für eine positive Antwort ist, dass die Inhomogenität für $t \rightarrow \infty$ gegen eine Grenzfunktion konvergiert. Unter dieser Bedingung und einer Regularitätsannahme können wir die Frage bejahen. Genauer gilt das folgende Resultat.

Theorem 6.19 (Langzeitverhalten). Sei $u_0 \in L^2(\Omega)$. Ferner sei $f : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Hölderstetig in t , d.h., es existieren Konstanten $\beta \in (0, 1]$ und $C_H > 0$, so dass für alle $s, t \geq 0$ gilt

$$\|f(\cdot, s) - f(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_H |s - t|^\beta,$$

und es existiere

$$f_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} f(\cdot, t) \in L^2(\Omega).$$

Dann gilt für die Lösung des inhomogenen Anfangsrandwertproblems (6.19)-(6.20):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = K(f_\infty), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t) = 0,$$

wobei K der zu Beginn von Abschnitt 6.3 definierte Lösungsoperator ist und die Grenzwerte im $L^2(\Omega)$ -Sinn zu verstehen sind.

Die Funktion $u_\infty = K(f_\infty)$ ist die eindeutig bestimmte schwache Lösung des elliptischen Problems

$$-\operatorname{div}(A\nabla u_\infty) + cu_\infty = f_\infty \quad \text{in } \Omega, \quad u_\infty = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Für den Beweis des Satzes benötigen wir eine Aussage über das asymptotische Verhalten der Lösung des homogenen Problems.

Lemma 6.20. Sei $u_{\text{hom}}(t) = e^{-Lt}u_0$ die Lösung des homogenen Problems (6.23)-(6.24) und $\delta > 0$. Dann existiert ein $C(\delta) > 0$, so dass für alle $t > 0$

$$\|Lu_{\text{hom}}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C(\delta)}{t} e^{(-\lambda_1 + \delta)t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis. Gleichung (6.25) (also $Lu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e^{-\lambda_k t} (u_0, v_k)_{L^2} v_k$) zeigt, dass

$$\|Lu_{\text{hom}}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k e^{-\lambda_k t})^2 (u_0, v_k)_{L^2}^2.$$

Wenn wir die Ungleichung

$$\lambda_k e^{-\lambda_k t} \leq \frac{C(\delta)}{t} e^{(-\lambda_1 + \delta)t}$$

für alle $\delta > 0$ gezeigt haben, folgt die Behauptung des Lemmas, denn dann ist

$$\|Lu_{\text{hom}}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C(\delta)}{t} e^{(-\lambda_k + \delta)t} \sum_{k=1}^{\infty} (u_0, v_k)_{L^2}^2 = \frac{C(\delta)}{t} e^{(-\lambda_k + \delta)t} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Wir definieren

$$F(t) = C(\delta) e^{(-\lambda_1 + \lambda_k + \delta)t} - \lambda_k t.$$

Dann ist $F(t) \geq 0$ zu zeigen. Diese Ungleichung gilt für $t = 0$ und wegen $\lambda_1 \leq \lambda_k$ für $t \rightarrow \infty$. Wir bestimmen das Minimum von F in $[0, \infty)$. Wir erhalten aus

$$0 = F'(t_m) = C(\delta)(-\lambda_1 + \lambda_k + \delta) e^{(-\lambda_1 + \lambda_k + \delta)t_m} - \lambda_k$$

den Wert

$$t_m = \frac{1}{-\lambda_1 + \lambda_k + \delta} \ln \frac{\lambda_k}{C(\delta)(-\lambda_1 + \lambda_k + \delta)}.$$

Damit

$$0 \leq F(t_m) = \frac{\lambda_k}{-\lambda_1 + \lambda_k + \delta} \left(1 - \ln \frac{\lambda_k}{C(\delta)(-\lambda_1 + \lambda_k + \delta)} \right)$$

erfüllt ist, muss für $C(\delta)$ die Bedingung

$$C(\delta) \geq \frac{\lambda_k}{e^{(-\lambda_1 + \lambda_k + \delta)t}}$$

gelten. Wegen $\lambda_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ ist die rechte Seite gleichmäßig in k beschränkt, und wir können ein $C(\delta)$ unabhängig von k finden, so dass die Ungleichung für alle k erfüllt ist. Dies zeigt das Lemma. \square

Beweis von Satz 6.19. Die Lösung u des inhomogenen Problems kann gemäß (6.22) in der Form

$$u(t) = e^{-L(t-\tau)}u(\tau) + \int_{\tau}^t e^{-L(t-s)}f(s)ds$$

geschrieben werden (verwende $u(\tau)$ als Anfangswert). Da $u(t)$ differenzierbar ist, erhalten wir

$$\partial_t(e^{-L(t-\tau)}u(\tau)) = \partial_t u_{\text{hom}}(t) = -Lu_{\text{hom}}(t) = -Le^{L(t-\tau)}u(\tau)$$

und damit

$$\begin{aligned} u_t(t) &= \partial_t(e^{-L(t-\tau)}u(\tau)) + \partial_t\left(\int_{\tau}^t e^{-L(t-s)}f(s)ds\right) \\ &= -Le^{-L(t-\tau)}u(\tau) - \int_{\tau}^t Le^{-L(t-s)}f(s)ds + f(t) \\ &= -Le^{-L(t-\tau)}u(\tau) - \int_{\tau}^t Le^{-L(t-s)}(f(s) - f(t))ds - \int_{\tau}^t Le^{-L(t-s)}f(t)ds + f(t). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Wir erinnern, dass Parameterintegrale gemäß der Leibniz-Regel für hinreichend reguläre Funktionen wie folgt abgeleitet werden:

$$\frac{d}{dt} \int_{b(t)}^{a(t)} F(s, t)ds = a'(t)F(a(t), t) - b'(t)F(b(t), t) + \int_{b(t)}^{a(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(s, t)ds.$$

Wegen

$$-\int_{\tau}^t Le^{-L(t-s)}f(t)ds = -\int_{\tau}^t \frac{\partial}{\partial s} e^{-L(t-s)}f(t)ds = -f(t) + e^{-L(t-\tau)}f(t)$$

sind die letzten beiden Terme in (6.26) gleich $e^{-L(t-\tau)}f(t)$, und wir erhalten

$$u_t(t) = -Le^{-L(t-\tau)}u(\tau) - \int_{\tau}^t Le^{-L(t-s)}(f(s) - f(t))ds + e^{-L(t-\tau)}f(t). \quad (6.27)$$

Wir schätzen die rechte Seite termweise ab. Es gilt für hinreichend großes $t \geq \tau$, dass $\|f(t) - f_{\infty}\|_{L^2(\Omega)} < \eta(\tau)$, wobei $\eta(\tau) \rightarrow 0$ für $\tau \rightarrow \infty$. Für den zweiten Summanden verwenden wir die Hölderstetigkeit von f für hinreichend großes $s, t \geq \tau$,

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|f(s) - f(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} (\|f(s) - f_{\infty}\|_{L^2(\Omega)} + \|f(t) - f_{\infty}\|_{L^2(\Omega)})^{1/2} \\ &\leq \sqrt{C_H}|s - t|^{\beta/2} (\|f(s) - f_{\infty}\|_{L^2(\Omega)} + \|f(t) - f_{\infty}\|_{L^2(\Omega)})^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2\eta(\tau)}\sqrt{C_H}|s - t|^{\beta/2}. \end{aligned}$$

Aus Lemma 6.20 folgt dann

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\tau}^t L e^{-L(t-s)} (f(s) - f(t)) ds \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \int_{\tau}^t \frac{C(\delta)}{t-s} e^{(-\lambda_1 + \delta)(t-s)} \|f(s) - f(t)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq C(\delta) \sqrt{2\eta(\tau)} \sqrt{C_H} \int_{\tau}^t |t-s|^{\beta/2-1} e^{(-\lambda_1 + \delta)(t-s)} ds. \end{aligned}$$

Wählen wir $0 < \delta < \lambda_1$, so ist das Integral auf der rechten Seite gleichmäßig in $t \in (0, \infty)$ beschränkt (denn $(-\lambda_1 + \delta)(t-s) < 0$). Wir wählen nun τ so groß, dass die rechte Seite kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ wird.

Für den ersten Summanden auf der rechten Seite von (6.27) folgt aus der elementaren Ungleichung $|\lambda_k e^{-\lambda_k t}| \leq 1/et$, dass

$$\|L e^{-L(t-\tau)} u(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k e^{-\lambda_k(t-\tau)})^2 (u(\tau), v_k)_{L^2}^2 \leq \frac{1}{e^2(t-\tau)^2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Schließlich erhalten wir für den dritten Summanden in (6.27) wegen (6.15)

$$\|e^{-L(t-\tau)} f(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1(t-\tau)} \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Die beiden Summanden werden für hinreichend großes $t - \tau$ (τ ist bereits für die Abschätzung des ersten Summanden fest gewählt) jeweils kleiner als ε . Damit ist

$$\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq 3\varepsilon$$

für hinreichend groß gewähltes $\tau > 0$ und $t \geq \tau$. Dies beweist $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_t\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

Um die verbleibende Behauptung, nämlich $u(t) \rightarrow Kf_{\infty}$ für $t \rightarrow \infty$, zu zeigen, verwenden wir die stetige Abhängigkeit der Lösung u von den Daten (Satz 5.20), woraus $\|Kf\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ und daher

$$\begin{aligned} \|u(t) - K(f_{\infty})\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|K(Lu(t) - f(t))\|_{L^2(\Omega)} + \|K(f(t) - f_{\infty})\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\|Lu(t) - f(t)\|_{L^2(\Omega)} + C\|f(t) - f_{\infty}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\| -u_t(t)\|_{L^2(\Omega)} + C\|f(t) - f_{\infty}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

folgt. Die Behauptung ergibt sich im Grenzwert $t \rightarrow \infty$. □

6.6 Galerkin-Methode

In den vorigen Abschnitten haben wir ausschließlich parabolische Gleichungen betrachtet, bei denen die Koeffizienten nur vom Ort abhängen. In diesem Abschnitt betrachten wir Differentialoperatoren, deren Koeffizienten auch von der Zeit abhängen können und erlauben Terme mit ersten Ortsableitungen:

$$u_t + L(u) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad (6.28)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T), \quad (6.29)$$

wobei

$$L(u) = -\operatorname{div}(A(x, t)\nabla u) + b(x, t) \cdot \nabla u + c(x, t)u.$$

Wir nehmen an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und die Matrix $A = (a_{ij})$ symmetrisch und gleichmäßig positiv definit ist und dass $A, b, c \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ gilt. In diesem Abschnitt gehen wir ähnlich vor wie Evans, Kapitel 7.1 [7].

Ähnlich wie in den vorigen Abschnitten suchen wir eine schwache Lösung. Wir suchen Lösungen, die bezüglich der Zeit nicht unbedingt stetig, sondern nur quadratintegrierbar sind. Dafür benötigen wir Hilbertraumwertige Lebesgue-Räume (sogenannte Bochner-Räume), die wir im Folgenden definieren.

Definition 6.21. Seien H ein Hilbertraum und $T > 0$. Der Raum $L^p(0, T; H)$, $1 \leq p \leq \infty$, ist die Menge aller (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen $u : (0, T) \rightarrow H$, für die gilt

$$\|u\|_{L^p(0, T; H)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt \right)^{1/p} < \infty \quad \text{für } p < \infty \text{ und}$$

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; H)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} \|u(t)\|_H < \infty.$$

Diese Definition erfordert die Erweiterung der Begriffe der Messbarkeit und Integrierbarkeit auf Hilbertraumwertige Funktionen $u : (0, T) \rightarrow H$. Wir erwähnen nur, dass eine (meßbare) Funktion $u : (0, T) \rightarrow H$ genau dann integrierbar ist, wenn $t \mapsto \|u(t)\|_H$ integrierbar ist. Für Details siehe die Theorie der Bochner-Integrale (Kapitel X, Abschnitt 2 in [3]). Es gelten die folgenden Eigenschaften.

Theorem 6.22. Sei $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ mit $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

(i) Dann gilt $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ (ggf. nach Auswahl eines geeigneten Repräsentanten), und es existiert eine von u unabhängige Konstante $C > 0$, so dass

$$\sup_{0 < t < T} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C (\|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|u_t\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))})$$

(ii) Die Abbildung $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}$ ist absolut stetig (also insbesondere fast überall differenzierbar), und es gilt

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 2 \langle u_t(t), u(t) \rangle_{H^{-1}} \quad \text{für fast alle } 0 < t < T.$$

Für einen Beweis verweisen wir auf Evans, Seite 287 [7].

Wir können nun den Begriff der schwachen Lösung definieren. Sei dazu zunächst u eine klassische Lösung von (6.28)-(6.29). Multiplizieren wir die Differentialgleichung

mit einer Testfunktion $v \in \mathcal{D}(\Omega \times (0, T))$, integrieren über $\Omega \times (0, T)$ und integrieren partiell, so folgt

$$\int_0^T (u_t, v)_{L^2} dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\nabla u^T A \nabla v + (b \cdot \nabla u)v + cuv) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f v dx dt.$$

Eine schwache Lösung sollte also einmal schwach bezüglich des Ortes differenzierbar sein, $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. In welchem Raum liegt dann die Zeitableitung u_t ? Wegen $u_t = -L(u) + f$ kann höchstens $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ gelten, d.h., die Zeitableitung ist eine Distribution, keine Funktion. Das Produkt $(u_t, v)_{L^2}$ können wir dann als das Dualitätsprodukt $\langle u_t, v \rangle_{H^{-1}}$ interpretieren. Wir erhalten somit die folgende Definition.

Definition 6.23. Eine Funktion u heißt *schwache Lösung* von (6.28)-(6.29), wenn gilt:

- (i) $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ und $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$;
- (ii) für alle $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ gilt

$$\int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}} dt + \int_0^T a(u, v; t) dt = \int_0^T \int_{\Omega} f v dx dt,$$

wobei

$$a(u, v; t) = \int_{\Omega} (\nabla u^T A(x, t) \nabla v + (b(x, t) \cdot \nabla u)v + c(x, t)uv) dx.$$

- (iii) $u(0) = u_0$ fast überall in Ω .

Die Eigenschaft (iii) macht Sinn, denn nach Satz 6.22 liegt die Lösung im Raum $C^0([0, T]; L^2(\Omega))$, so dass $u(0)$ definiert ist. Das Hauptresultat ist der folgende Existenz- und Eindeutigkeitsatz.

Theorem 6.24. Es gelten die zu Beginn dieses Abschnitts genannten Voraussetzungen. Ferner seien $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte schwache Lösung von (6.28)-(6.29).

• **1. Schritt: Galerkin-Approximation.** Wir lösen zuerst das Anfangsrandwertproblem in endlichdimensionalen Räumen. Dazu wählen wir Funktionen $v_k \in H_0^1(\Omega)$, die orthogonale Funktionen in $H_0^1(\Omega)$ und eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega)$ bilden. Beispielsweise können wir die bezüglich $L^2(\Omega)$ normierten Eigenfunktionen des Operators $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$ wählen (siehe Bemerkung 6.3). Dann existieren Eigenwerte λ_k , so dass $-\Delta v_k = \lambda_k v_k$ in Ω . Die Eigenfunktionen v_k sind orthogonal bezüglich des Skalarproduktes in $L^2(\Omega)$. Daher gilt

$$\int_{\Omega} \nabla v_k \cdot \nabla v_j dx = - \int_{\Omega} \Delta v_k v_j dx = \lambda_k \int_{\Omega} v_k v_j dx = 0, \quad k \neq j,$$

d.h., die Funktionen v_k sind auch bezüglich des Skalarproduktes in $H_0^1(\Omega)$ orthogonal.

Wir suchen approximative Lösungen im Raum $\text{span}(v_1, \dots, v_N)$,

$$u_N(t) = \sum_{k=1}^N a_k(t)v_k, \quad (6.30)$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten a_k . Setzen wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung $u_{N,t} = -L(u_N) + f$ ein, so folgt nach Multiplikation mit v_j und Integration über Ω

$$\begin{aligned} a_j' &= \sum_{k=1}^N a_k'(v_k, v_j)_{L^2} = (u_{N,t}, v_j)_{L^2} = \langle -L(u_N) + f, v_j \rangle \\ &= - \sum_{k=1}^N a_k \langle L(v_k), v_j \rangle + (f, v_j)_{L^2} = - \sum_{k=1}^N a_k a(v_k, v_j; t) + (f, v_j)_{L^2}. \end{aligned}$$

Dies ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Koeffizienten a_k mit Anfangswerten

$$a_j(0) = (u_0, v_j)_{L^2}.$$

Da die rechte Seite der Differentialgleichung linear und stetig ist, existiert nach einer Verallgemeinerung des Satzes von Picard-Lindelöf eine eindeutig bestimmte Lösung (a_1, \dots, a_N) auf $[0, T]$, die fast überall differenzierbar ist. Aus elliptischer Regularität und der Voraussetzung $f(t) \in L^2(\Omega)$ folgt $u_N(t) \in H^2(\Omega)$. Wir haben bewiesen:

Lemma 6.25. Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $u_N : [0, T] \rightarrow H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ von

$$(u_{N,t}, v_j)_{L^2} + a(u_N, v_j; t) = (f, v_j)_{L^2}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (6.31)$$

die die Darstellung (6.30) besitzt.

• **2. Schritt: A-priori-Abschätzungen.** Wir zeigen, dass die approximativen Lösungen u_N gleichmäßig in N in gewissen Normen beschränkt sind.

Lemma 6.26. Sei u_N die Lösung von (6.31). Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von Ω, T und den Koeffizienten von L abhängt, so dass

$$\|u_N\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|u_{N,t}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C (\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}).$$

Beweis. Wir multiplizieren (6.31) mit a_j und summieren von $j = 1, \dots, N$:

$$\left(u_{N,t}, \sum_{j=1}^N a_j v_j \right)_{L^2} + a \left(u_N, \sum_{j=1}^N a_j v_j; t \right) = \left(f, \sum_{j=1}^N a_j v_j \right)_{L^2},$$

woraus sich ergibt:

$$(u_{N,t}, u_N)_{L^2} + a(u_N, u_N; t) = (f, u_N)_{L^2}. \quad (6.32)$$

Der erste Summand kann gemäß Satz 6.22 (ii) geschrieben werden als

$$(u_{N,t}, u_N)_{L^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_N\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Für den Term auf der rechten Seite verwenden wir die Youngsche Ungleichung (siehe Lemma 5.19):

$$(f, u_N)_{L^2} \leq \frac{1}{2} \|u_N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Es bleibt der zweite Summand $a(u_N, u_N; t)$ in (6.32) abzuschätzen. Hierzu verwenden wir eine Variante der Koerzivität von a und die Beschränktheit der anderen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a(u_N, u_N; t) &\geq \alpha \|\nabla u_N\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|b\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \|\nabla u_N\|_{L^2(\Omega)} \|u_N\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - \|c\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \|u_N\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Mit der Youngschen Ungleichung erhalten wir für den zweiten Term auf der rechten Seite:

$$\|b\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \|\nabla u_N\|_{L^2(\Omega)} \|u_N\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\alpha}{2} \|\nabla u_N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|b\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))}^2 \|u_N\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

Der erste Term wird von der rechten Seite von (6.33) absorbiert. Damit ist

$$a(u_N, u_N; t) \geq \frac{\alpha}{2} \|\nabla u_N\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(\frac{1}{2\alpha} \|b\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))}^2 + \|c\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \right) \|u_N\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Aus der Poincaré-Ungleichung folgt, dass die Normen $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2}$ und $\|\cdot\|_{H^1}$ äquivalent sind. Es existieren also Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass aus (6.32) folgt

$$\frac{d}{dt} \|u_N\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \|u_N\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_2 \|u_N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (6.34)$$

wobei $C_2 > 0$ nur von α, b und c abhängt. Setzen wir $U(t) = \|u_N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ und $F(t) = \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$, so erhalten wir die Differentialungleichung

$$\frac{dU}{dt} \leq C_2 U + F \quad \text{in } (0, T).$$

Wir erinnern an das Lemma von Gronwall:

Lemma 6.27 (Gronwall). Seien $U : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ absolut stetig und $F, G : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ integrierbar, und es gelte für fast alle $t \in (0, T)$

$$\frac{dU}{dt} \leq G(t)U + F(t).$$

Dann ist für alle $t \in [0, T]$

$$U(t) \leq \exp\left(\int_0^t G(s) ds\right) \left(U(0) + \int_0^t F(s) ds\right).$$

Ein Beweis ist etwa in Evans, Seite 624 [7] zu finden. Wenden wir dieses Lemma auf die obige Ungleichung mit $U(t) = \|u_N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ an, so erhalten wir:

$$\|u_N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{C_2 t} \left(\|u_N(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right).$$

Das Supremum über $(0, T)$ liefert die Abschätzung

$$\sup_{0 < t < T} \|u_N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{C_2 T} \left(\|u_N(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right). \quad (6.35)$$

Integrieren wir (6.34) über $(0, t)$, so erhalten wir

$$\|u_N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \int_0^t \|u_N(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \leq \|u_N(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \int_0^t \|u_N(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|f\|_{L^2(0, t; L^2(\Omega))}^2.$$

Wir wenden das Supremum über $t \in (0, T)$ an und verwenden (6.35):

$$\sup_{0 < t < T} \|u_N(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \|u_N\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 \leq C_3 \left(\|u_N(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right), \quad (6.36)$$

wobei $C_3 > 0$ nur von C_2 und T abhängt.

Es bleibt die Abschätzung für $u_{N,t}$ zu zeigen. Sei dafür $w \in H_0^1(\Omega)$ mit $\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$. Wir schreiben $w = w_N + w_N^\perp$, wobei $w_N \in \text{span}(v_1, \dots, v_N)$ und $(w_N^\perp, v_k)_{H_0^1(\Omega)} = 0$ für alle $k = 1, \dots, N$. Da die Funktionen v_k nach Konstruktion orthogonal in $H_0^1(\Omega)$ sind, erhalten wir

$$\|w_N\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = (w_N, w - w_N^\perp)_{H_0^1} = (w_N, w)_{H_0^1} \leq \|w_N\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)},$$

also $\|w_N\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1$. Mit (6.31) folgt

$$\langle u_{N,t}, w \rangle_{H^{-1}} = (u_{N,t}, w)_{L^2} = (u_{N,t}, w_N)_{L^2} \stackrel{(6.31)}{=} -a(u_N, w_N; t) + (f, w_N)_{L^2}$$

und damit nach ähnlichen Abschätzungen wie für $\|u_N\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}$

$$\|u_{N,t}\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} |\langle u_{N,t}, w \rangle_{H^{-1}}|$$

$$\leq C_4 \sup_{\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} (\|u_N\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \|w\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Integration über $(0, T)$ liefert

$$\int_0^T \|u_{N,t}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \leq 2C_4^2 (\|u_N\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2),$$

und mit der Abschätzung (6.36) folgt das Ergebnis. \square

• **3. Schritt: Grenzwert $N \rightarrow \infty$.** Lemma 6.26 zeigt, dass (u_N) beschränkt in $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ und $(u_{N,t})$ beschränkt in $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ ist. Daher existiert eine Teilfolge (u_{N_k}) von (u_N) , so dass (u_{N_k}) in diesen Räumen schwach konvergiert,

$$\begin{aligned} u_{N_k} &\rightharpoonup u \quad \text{schwach in } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ u_{N_k,t} &\rightharpoonup u_t \quad \text{schwach in } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \text{ für } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

und es gilt $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ und $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Wir erinnern, dass eine Folge (x_n) aus einem Hilbertraum *schwach konvergiert*, wenn $(y, x_n)_H \rightarrow (y, x)_H$ für $n \rightarrow \infty$ für alle $y \in H$. Genau genommen konvergiert $(u_{N_k,t})$ gegen eine Funktion v , aber wegen

$$\int_0^T \langle u_{N_k,t}, \phi \rangle_{H^{-1}} dt = - \int_0^T \langle u_{N_k}, \phi_t \rangle_{H^{-1}} dt \rightarrow - \int_0^T \langle u, \phi_t \rangle_{H^{-1}} dt = \int_0^T \langle u_t, \phi \rangle_{H^{-1}} dt$$

für alle $\phi \in C_0^1((0, T); H_0^1(\Omega))$ folgt sofort $v = u_t$.

Sei nun $v = \sum_{j=1}^N b_j v_j$, wobei $b_j \in C^1([0, T])$. Dann gilt $v \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega))$. Multiplizieren wir Gleichung (6.31) für u_N mit b_j , summieren über $j = 1, \dots, N$ und integrieren über $(0, T)$, so ergibt sich

$$\int_0^T \langle u_{N_k,t}, v \rangle_{H^{-1}} dt + \int_0^T a(u_{N_k}, v; t) dt = \int_0^T (f, v)_{L^2} dt. \quad (6.37)$$

Die obige schwache Konvergenz erlaubt den Grenzwert $N_k \rightarrow \infty$ in dieser Gleichung:

$$\int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}} dt + \int_0^T a(u, v; t) dt = \int_0^T (f, v)_{L^2} dt. \quad (6.38)$$

Diese Gleichung gilt für alle v , die endliche Linearkombinationen der Funktionen v_k sind. Diese Linearkombinationen sind jedoch dicht im Raum $C^1([0, T]; H_0^1(\Omega))$, so dass die obige Gleichung für alle $v \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega))$ erfüllt ist. Aus Dichtheitsgründen gilt die Gleichung auch für alle $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Dies zeigt, dass u eine Lösung der schwachen Formulierung ist.

• **4. Schritt: Anfangsdaten.** Wir zeigen, dass $u(0) = u_0$ gilt. Wir wählen $v \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega))$ mit $v(T) = 0$ in (6.38) und integrieren partiell im ersten Summanden (man kann zeigen, dass diese partielle Integration auch für Funktionen in Sobolev-Räumen gilt):

$$-\int_0^T \langle u, v_t \rangle_{H^{-1}} dt - (u(0), v(0))_{L^2} + \int_0^T a(u, v; t) dt = \int_0^T (f, v)_{L^2} dt. \quad (6.39)$$

Andererseits folgt aus (6.37) mit derselben Testfunktion

$$-\int_0^T \langle u_{N_k}, v_t \rangle_{H^{-1}} dt - (u_{N_k}(0), v(0))_{L^2} + \int_0^T a(u_{N_k}, v; t) dt = \int_0^T (f, v)_{L^2} dt.$$

Führen wir den Grenzwert $N_k \rightarrow \infty$ durch und beachten, dass $u_{N_k}(0) = \sum_{k=1}^N (u_0, v_k)_{L^2} v_k \rightarrow u_0$ in $L^2(\Omega)$, so folgt

$$-\int_0^T \langle u, v_t \rangle_{H^{-1}} dt + (u_0, v(0))_{L^2} + \int_0^T a(u, v; t) dt = \int_0^T (f, v)_{L^2} dt.$$

Ein Vergleich dieser Beziehung mit (6.39) zeigt, dass $u(0) = u_0$, da $v(0)$ beliebig gewählt werden kann.

• **5. Schritt: Eindeutigkeit.** Seien u und v zwei schwache Lösungen von (6.28)-(6.29) und sei $t \in (0, T)$. Wir können $u - v$ als Testfunktion in der schwachen Formulierung der Differenz

$$\int_0^t \langle (u - v)_t, u - v \rangle_{H^{-1}} ds + \int_0^t a(u - v, u - v; s) ds = 0$$

wählen. Satz 6.22 und einige Abschätzungen ähnlich wie in Schritt 2 ergeben

$$\frac{d}{dt} \|(u - v)(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \|(u - v)(s)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

für eine Konstante $c > 0$, die von den Koeffizienten von L abhängt, und wegen $(u - v)(0) = 0$ folgt mit dem Lemma von Gronwall $\|(u - v)(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$, also $u = v$.

Damit ist Satz 6.24 vollständig bewiesen.

6.7 Maximumprinzip

Wir beweisen das schwache Maximumprinzip für parabolische Gleichungen der Form

$$u_t + L(u) = f \quad \text{in } G = \Omega \times (0, T],$$

wobei $T > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet seien. Der Ortsoperator sei gegeben durch

$$L(u) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u.$$

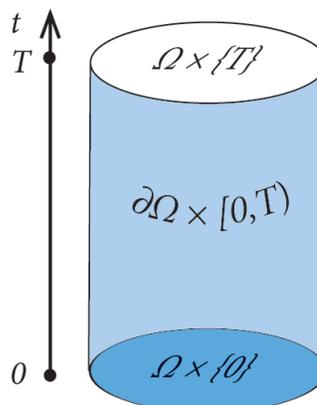


Abbildung 6.5: Der parabolische Rand besteht aus dem hellblauen Mantel und dem blauen Boden, ohne dem weißen Deckel.

Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass die Koeffizienten a_{ij}, b_i und c in G beschränkt sind, $A = (a_{ij})$ ist symmetrisch und gleichmäßig positiv definit und $c \geq 0$ in G . Wir setzen ferner voraus, dass eine klassische Lösung existiert. Darunter verstehen wir eine Funktion, die bezüglich t einmal und bezüglich x zweimal stetig differenzierbar ist. Es ist zweckmäßig, hierfür die folgende Notation einzuführen (siehe Evans [7]):

$$C_1^2(G) = \{u : G \rightarrow \mathbb{R} : u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \in C^0(G) \forall i, j\}.$$

Die Funktion u und ihre Ableitungen sind also stetig bis $t = T$. Eine klassische Lösung existiert, wenn der Rand $\partial\Omega$ und die Koeffizienten von L regulär sind.

Für das Maximumprinzip definieren wir weiterhin den *parabolischen Rand*

$$\Gamma = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T]).$$

Der parabolische Rand besteht aus dem Boden und dem Mantel des Zylinders $G = \Omega \times (0, T)$, beinhaltet aber nicht den Deckel $D = \overline{\Omega} \times \{T\}$. Es gilt insbesondere $\partial G = \Gamma \cup D$ (siehe Abbildung 6.5).

Theorem 6.28 (Schwachtes Maximumprinzip für $c = 0$). Sei $u \in C_1^2(G) \cap C^0(\overline{G})$, $c = 0$ in G und

$$u_t + L(u) \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad u_t + L(u) \geq 0 \quad \text{in } G.$$

Dann folgt

$$\sup_{(x,t) \in G} u(x,t) = \sup_{(x,t) \in \Gamma} u(x,t) \quad \text{bzw.} \quad \inf_{(x,t) \in G} u(x,t) = \inf_{(x,t) \in \Gamma} u(x,t).$$

Beweis. 1. Schritt: ähnlich wie beim Beweis des schwachen Maximumprinzips für elliptische Gleichungen setzen wir zunächst $u_t + L(u) < 0$ in G voraus. Wir machen die

Widerspruchsannahme, dass $(x_0, t_0) \in G$ existiert mit $u(x_0, t_0) = \sup_{(x,t) \in G} u$. Wir unterscheiden die beiden Fälle $0 < t_0 < T$ und $t_0 = T$.

Im ersten Fall liegt (x_0, t_0) im Innern von G und insbesondere ist $u_t(x_0, t_0) = 0$, da u das Maximum an diesem Punkt annimmt. Im Beweis des schwachen Maximumprinzips für den elliptischen Operator L (Satz 5.26) haben wir gezeigt, dass aus der Eigenschaft $u(x_0, t_0) = \sup_G u$ dann $L(u)(x_0, t_0) \geq 0$ folgt. (Dies folgt im Wesentlichen aus der Tatsache, dass die erste Ableitung nach x in diesem Punkt verschwindet und die Hesse-Matrix bezüglich x negativ semidefinit ist.) Wir erhalten wegen $(u_t + L(u))(x_0, t_0) \geq 0$ einen Widerspruch zur Annahme.

Im zweiten Fall $t_0 = T$ muss $u_t(x_0, t_0) \geq 0$ gelten, da u das Maximum auf dem Deckel des Zylinders G annimmt. Da weiterhin $L(u)(x_0, t_0) \geq 0$ gültig ist, folgt der Widerspruch $(u_t + L(u))(x_0, t_0) \geq 0$.

2. Schritt: Sei nun $u_t + L(u) \leq 0$ in G . Wir definieren die Funktion $u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$. Dann ist wegen $c = 0$

$$\partial_t u_\varepsilon + L(u_\varepsilon) = u_t + L(u) - \varepsilon < 0 \quad \text{in } G,$$

und nach dem ersten Schritt gilt

$$\sup_{(x,t) \in G} (u(x, t) - \varepsilon t) = \sup_{(x,t) \in G} u_\varepsilon(x, t) = \sup_{(x,t) \in \Gamma} u_\varepsilon(x, t) = \sup_{(x,t) \in \Gamma} (u(x, t) - \varepsilon t).$$

Mit Hilfe der gleichmäßigen Stetigkeit von u_ε auf \bar{G} können wir den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durchführen und erhalten die Behauptung.

3. Schritt: Das Minimumprinzip folgt, wenn wir das Maximumprinzip auf $-u$ anwenden. \square

Der folgende Satz erlaubt nicht-verschwindende Koeffizienten $c \geq 0$.

Theorem 6.29 (Schwaches Maximumprinzip für $c \geq 0$). Sei $u \in C_1^2(G) \cap C^0(\bar{G})$, $c \geq 0$ in G und

$$u_t + L(u) \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad u_t + L(u) \geq 0 \quad \text{in } G.$$

Dann folgt

$$\sup_{(x,t) \in G} u(x, t) \leq \max \left\{ 0, \sup_{(x,t) \in \Gamma} u(x, t) \right\} \quad \text{bzw.} \quad \inf_{(x,t) \in G} u(x, t) \geq \min \left\{ 0, \inf_{(x,t) \in \Gamma} u(x, t) \right\}.$$

Insbesondere folgt aus $u_t + L(u) = 0$ in G im Falle $c = 0$, dass

$$\sup_G |u| = \sup_\Gamma |u|.$$

Die Funktionswerte der Lösung sind also beschränkt durch die Randwerte und die Anfangswerte.

Beweis. Wir beweisen nur das Maximumprinzip. Falls $u_t + L(u) < 0$ in G und u ein *positives* Maximum an der Stelle $(x_0, t_0) \in G$ annimmt, so folgt wie im vorigen Beweis wegen $(cu)(x_0, t_0) \geq 0$ ein Widerspruch. Gilt $u_t + L(u) \leq 0$ in G , dann definieren wir wieder $u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$ und leiten $\partial_t u_\varepsilon + L(u_\varepsilon) < 0$ in G her. Nimmt u ein positives Maximum an einer Stelle $(x_0, t_0) \in G$ mit $u(x_0, t_0) > \sup_{(x,t) \in \Gamma} u(x, t)$ an, dann nimmt auch u_ε ein positives Maximum in G an, wenn wir $\varepsilon > 0$ hinreichend klein wählen. Dies liefert wieder einen Widerspruch zu $\partial_t u_\varepsilon + L(u_\varepsilon) < 0$ in G . (Alternativ könnten wir den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durchführen und darüber zu demselben Schluss kommen.) \square

Es gibt auch ein starkes Maximumprinzip für parabolische Gleichungen. Der Beweis ist elementar, aber technisch aufwendig und lang. Da wir das starke Maximumprinzip später nicht benötigen, zitieren wir das Resultat nur und verweisen für einen Beweis auf Evans, Abschnitt 7.1.4 [7].

Theorem 6.30 (Starkes Maximumprinzip). Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, beschränkte und zusammenhängende Menge, $c = 0$ und $u \in C_1^2(G) \cap C^0(\bar{G})$ mit $u_t + L(u) \leq 0$ (bzw. $u_t + L(u) \geq 0$) in G . Wenn u den maximalen (bzw. minimalen) Wert an $(x_0, t_0) \in G$ annimmt, dann ist u konstant auf $\bar{\Omega} \times [0, t_0]$. Die Aussage bleibt gültig für $c \geq 0$ in G , wenn u ein nichtnegatives Maximum (bzw. nichtpositives Minimum) in G annimmt.

7 Hyperbolische Gleichungen

7.1 Die Wellengleichung im \mathbb{R}^n

Wir betrachten zunächst die eindimensionale Wellengleichung. Die Schwingungen einer unendlich langen Saite können beschrieben werden durch die eindimensionale homogene Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1 \quad \text{in } \mathbb{R}. \quad (7.1)$$

Wir haben bereits in Abschnitt 1.4 gesehen, dass die klassische Lösung der homogenen Gleichung durch

$$u_{\text{hom}}(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(z) dz, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (7.2)$$

gegeben ist, falls die Anfangsdaten zweimal stetig differenzierbar sind. Diese Darstellung wird auch *d'Alembertsche Formel* genannt. Interessanterweise können auch Anfangsdaten, die nicht stetig differenzierbar sind, als Lösungen interpretiert werden. Es gilt das folgende Resultat.

Proposition 7.1. Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Dann ist $u(x, t) = f(x \pm ct)$ eine schwache Lösung von (7.1) mit Anfangsdaten $u_0 = f$ und $u_1 = \pm cf'$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(\phi_{tt} - c^2 \phi_{xx}) dx dt = 0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2). \quad (7.3)$$

Der Anfangswert $u_1 = \pm cf'$ ist im Sinne der Distributionentheorie zu verstehen. Er wird im folgenden Beweis nicht verwendet.

Beweis. Wir setzen $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$ bzw. $x = (\eta + \xi)/2$, $t = (\eta - \xi)/(2c)$ und $\psi(\xi, \eta) = \phi(x, t) = \phi(\frac{1}{2}(\eta + \xi), \frac{1}{2c}(\eta - \xi))$. Dann folgt

$$\psi_{\xi\eta} = \left(\frac{1}{2} \phi_x - \frac{1}{2c} \phi_t \right)_\eta = \frac{1}{4} \phi_{xx} + \frac{1}{4c} \phi_{xt} - \frac{1}{4c} \phi_{tx} - \frac{1}{4c^2} \phi_{tt} = \frac{1}{4c^2} (c^2 \phi_{xx} - \phi_{tt}).$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix von $(\xi, \eta) \mapsto (x, t)$ ist

$$\det \begin{pmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta \\ \partial t / \partial \xi & \partial t / \partial \eta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/(2c) & 1/(2c) \end{pmatrix} = \frac{1}{2c}.$$

Dies ergibt $dx dt = (1/2c) d\xi d\eta$ und

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x + ct) (\phi_{tt}(x, t) - c^2 \phi_{xx}(x, t)) dx dt = -2c \int_{\mathbb{R}^2} f(\eta) \psi_{\xi\eta}(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$= -2c \int_{\mathbb{R}} f(\eta) \left(\int_{\mathbb{R}} \psi_{\xi\eta}(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta.$$

Da ψ eine Testfunktion ist, verschwindet das Integral nach ξ , woraus (7.3) folgt. Der Beweis verläuft analog für $f(x - ct)$. \square

Aus den obigen Bemerkungen folgen einige wesentliche Eigenschaften der Wellengleichung:

- ▶ Die Lösung ist im Allgemeinen nur so regulär wie die Anfangsdaten, d.h., die Wellengleichung "glättet" im Gegensatz zu parabolischen Gleichungen die Lösung nicht.
- ▶ Störungen der Anfangsdaten werden mit der Geschwindigkeit $\pm c$ fortgepflanzt, während Lösungen der Wärmeleitungsgleichung eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzen.
- ▶ Die Lösung existiert für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$, während die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung nur für $t > 0$ existieren.

Als nächstes betrachten wir die inhomogene Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1 \quad \text{in } \mathbb{R}. \quad (7.4)$$

Um dieses Anfangswertproblem zu lösen, bestimmen wir zuerst die Fundamentallösung. Wir erinnern, dass die Heaviside-Funktion H durch $H(x) = 1$ für $x > 0$ und $H(x) = 0$ für $x \leq 0$ definiert ist.

Lemma 7.2. Eine Fundamentallösung von $L(u) = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ ist gegeben durch $U_0(x, t) = H(ct - |x|)/(2c)$, d.h., U_0 ist eine distributionelle Lösung von

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \delta \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ gilt:

$$I := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2c} H(ct - |x|) (\phi_{tt} - c^2 \phi_{xx}) dx dt = \phi(0, 0).$$

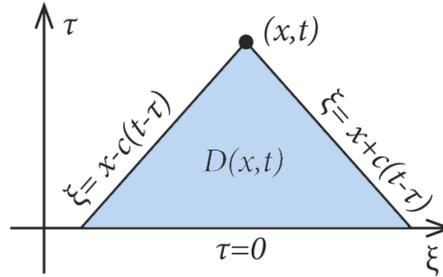
Wir haben im Beweis von Proposition 7.1 bereits gezeigt, dass die Substitution $x = (\eta + \xi)/2$, $t = (\eta - \xi)/(2c)$ auf die äquivalente Formulierung

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} H(ct - |x|) (-\phi_{\eta\xi}) d\xi d\eta = - \int_{\mathbb{R}^2} H\left(\frac{1}{2}(\eta - \xi) - \frac{1}{2}|\eta + \xi|\right) \phi_{\xi\eta} d\xi d\eta$$

führt. Die Heaviside-Funktion ist genau dann ungleich null, wenn $(\eta - \xi) - |\eta + \xi| > 0$ oder

$$-(\eta - \xi) < \eta + \xi < \eta - \xi \quad \text{bzw.} \quad -2\eta < 0 < -2\xi.$$

Abbildung 7.1: Illustration des Dreiecks $D(x, t)$.



Wir können den Integrationsbereich \mathbb{R}^2 also ersetzen durch $\{\xi < 0, \eta > 0\}$ und erhalten

$$I = - \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} 1 \cdot \phi_{\xi\eta}(\xi, \eta) d\eta d\xi = \int_{-\infty}^0 \phi_{\xi}(\xi, 0) d\xi = \phi(0, 0).$$

Dies beweist das Lemma. \square

Mit Hilfe der Fundamentallösung können wir das inhomogene Anfangswertproblem für die Wellengleichung lösen.

Theorem 7.3. Seien $u_0, u_1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$. Dann ist die Funktion $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, definiert durch

$$u(x, t) = u_{\text{hom}}(x, t) + \frac{1}{2c} \int_{D(x, t)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

wobei u_{hom} in (7.2) definiert ist, eine distributionelle Lösung von (7.4). Hierbei ist $D(x, t) = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \tau < t, |x - \xi| < c(t - \tau)\}$ das Dreieck, das in der (ξ, τ) -Ebene durch die Geraden $\tau = 0$, $\xi = x - c(t - \tau)$ und $\xi = x + c(t - \tau)$ begrenzt ist (siehe Abbildung 7.1).

Beweis. Gemäß einer Variante von Satz 3.20 ist eine distributionelle Lösung der inhomogenen Gleichung mit $u_0 = 0$ und $u_1 = 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (U_0 * f)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} U_0(x - \xi, t - s) f(\xi, s) d\xi ds \\ &= \frac{1}{2c} \int_{\mathbb{R}^2} H(c(t - s) - |x - \xi|) f(\xi, s) d\xi ds. \end{aligned}$$

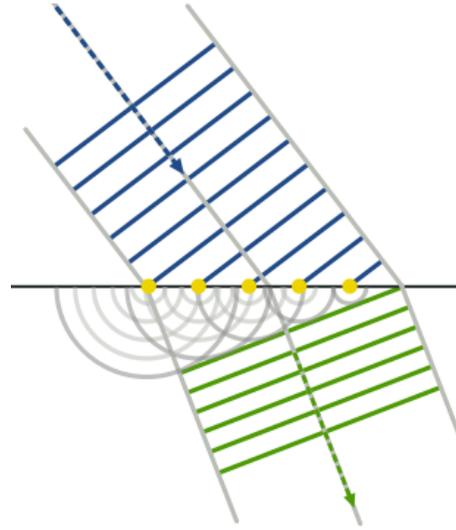
Wir setzen $f(\cdot, s) = 0$ für $s < 0$, damit das Integral über \mathbb{R}^2 definiert ist. Die Heaviside-Funktion ist genau dann ungleich null, wenn

$$-c(t - s) < x - \xi < c(t - s) \quad \text{bzw.} \quad x - c(t - s) < \xi < x + c(t - s).$$

Also erhalten wir

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\xi, s) d\xi ds = \frac{1}{2c} \int_{D(x, t)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Abbildung 7.2: Brechung einer Wellenfront. Nach dem Huygens-Prinzip ist jeder gelbe Punkt auf der Grenzoberfläche Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Die Elementarwellen weiter links sind größer als die weiter rechts, weil die Wellenfront früher auf die Oberfläche trifft. Die Überlagerung der Elementarwellen ergibt die grüne Wellenfront. (Quelle: Arne Nordmann (norro), Wikipedia.de, Creative-Common-Lizenz.)



Die Lösung von (7.4) ist nun die Summe aus der homogenen Lösung (7.2) und der obigen Lösung. \square

Bemerkung. Das Huygens-Prinzip besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront im \mathbb{R}^3 als Ausgangspunkt einer neuen Welle, der sogenannten Elementarwelle, betrachtet werden kann. Durch Überlagerung aller Elementarwellen ergibt sich dann die neue Lage der Wellenfront (siehe Abbildung 7.2). Dieses Prinzip gilt nur im Dreidimensionalen, nicht im Ein- oder Zweidimensionalen. Um dies einzusehen, notieren wir (ohne Beweis) die explizite Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = c^2 \Delta u$ im \mathbb{R}^3 mit Anfangsdaten $u(\cdot, 0) = u_0$ und $u_t(\cdot, 0) = u_1$:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-\xi|=ct} u_1(\xi) d\sigma_\xi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-\xi|=ct} u_0(\xi) d\sigma_\xi \right).$$

Es hängt also $u(x, t)$ nur von den Daten auf der Sphäre um x mit Radius ct ab, *nicht* von den Daten im Innern. Dies ist die mathematische Formulierung des Huygens-Prinzips.

Das Prinzip gilt *nicht* im Ein- oder Zweidimensionalen, denn die Lösungen des entsprechenden Wellengleichungsproblems sind gegeben durch

$$n = 1: u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{|x-\xi|\leq ct} u_1(\xi) d\xi,$$

$$n = 2: u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|x-\xi|\leq ct} \frac{u_1(\xi)}{\sqrt{(ct)^2 - |x-\xi|^2}} d\xi + \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|x-\xi|\leq ct} \frac{u_0(\xi)}{\sqrt{(ct)^2 - |x-\xi|^2}} d\xi.$$

Hier hängt $u(x, t)$ von den Daten in der Kugel um x mit Radius ct ab, also insbesondere von den Daten im Innern. \square

7.2 Existenz von Lösungen

In diesem Abschnitt betrachten wir allgemeinere Wellengleichungen der Form

$$u_{tt} + L(u) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (7.5)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1 \quad \text{in } \Omega, \quad (7.6)$$

wobei $L(u) = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + c(x)u$ ein symmetrischer elliptischer Differentialoperator sei. Wir setzen voraus, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ ist, die Matrix $A = (a_{ij})$ sei symmetrisch und gleichmäßig positiv definit, für die Koeffizienten gelte $a_{ij}, c \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $c \geq 0$ in Ω , und es seien $u_0, u_1 \in L^2(\Omega)$ und $f \in C^0(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$.

Wir leiten im Folgenden eine Lösungsformel für das Anfangsrandwertproblem (7.5)-(7.6) her. Wir haben im Beweis von Satz 6.12 bewiesen, dass der Operator L , definiert auf $H_0^1(\Omega)$, positive Eigenwerte λ_k ($k \in \mathbb{N}$) besitzt, und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem (v_k) in $L^2(\Omega)$. Daher können wir den Lösungsansatz

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)v_k$$

mit zu bestimmenden Funktionen u_k machen. Setzen wir ihn in die Differentialgleichung ein, so folgt nach Multiplikation mit v_j

$$u_{j,tt} = (u_{tt}, v_j)_{L^2} = -(L(u), v_j)_{L^2} + (f, v_j)_{L^2} = -(u, L(v_j))_{L^2} + (f, v_j)_{L^2} = -\lambda_j u_j + f_j,$$

wobei wir $f_j = (f, v_j)_{L^2}$ gesetzt haben. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den Anfangsbedingungen

$$u_j(0) = (u_0, v_j)_{L^2}, \quad u_{j,t}(0) = (u_1, v_j)_{L^2}.$$

Da die Eigenwerte λ_j positiv sind, erhalten wir trigonometrische Funktionen als Lösung:

$$u_j(t) = \cos(\sqrt{\lambda_j}t)(u_0, v_j)_{L^2} + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}t)}{\sqrt{\lambda_j}}(u_1, v_j)_{L^2} + \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}(t-s))}{\sqrt{\lambda_j}} f_j(s) ds.$$

Dies motiviert die Lösungsformel

$$\begin{aligned} u(\cdot, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\sqrt{\lambda_k}t)(u_0, v_k)_{L^2} v_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}} (u_1, v_k)_{L^2} v_k \\ &\quad + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}(t-s))}{\sqrt{\lambda_k}} f_k(s) v_k ds. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Wir haben in Abschnitt 6.4 den Operator e^{-Lt} definiert durch

$$e^{-Lt}v = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} (v, v_k)_{L^2} v_k \quad \text{für } v \in L^2(\Omega)$$

(siehe (6.21)). Im Hinblick auf die obige Lösungsformel ist es naheliegend, allgemein für Funktionen g

$$g(Lt)v = \sum_{k=1}^{\infty} g(\lambda_k t)(v, v_k)_{L^2} v_k$$

zu definieren. Der Definitionsbereich dieses Operators hängt von g ab. Damit können wir Formel (7.7) kompakter formulieren als

$$u(x, t) = \cos(\sqrt{L}t)u_0(x) + \frac{\sin(\sqrt{L}t)}{\sqrt{L}}u_1(x) + \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{L}(t-s))}{\sqrt{L}}f(x, s)ds, \quad (7.8)$$

wobei $x \in \Omega$ und $t \in \mathbb{R}$. Wir zeigen nun, in welchem Sinne dies eine Lösung von (7.5)-(7.6) ist.

Theorem 7.4. *Es gelten die zu Beginn des Abschnitts gemachten Voraussetzungen. Dann ist die durch (7.8) definierte Funktion ein Element aus $C^0(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ und eine schwache Lösung (im Sinne von: lokal integrierbare distributionelle Lösung) von*

$$u_{tt} + L(u) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}, \quad u(\cdot, 0) = u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1 \quad \text{in } \Omega.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Regularitätsaussage. Genauer zeigen wir, dass für beschränkte, stetige Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $v \in L^2(\Omega)$ die Eigenschaft $g(\sqrt{L}t)v \in C^0(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ gilt. Seien $t, h \in \mathbb{R}$. Es ist für $\mu_k = \sqrt{\lambda_k} > 0$

$$\|g(\sqrt{L}(t+h))v - g(\sqrt{L}t)v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (g(\mu_k(t+h)) - g(\mu_k t))^2 (v, v_k)_{L^2}^2.$$

Außerdem konvergiert $(g(\mu_k(t+h)) - g(\mu_k t))^2 (v, v_k)_{L^2}^2$ für $h \rightarrow 0$ punktweise gegen null, es gilt die gleichmäßige Abschätzung

$$|g(\mu_k(t+h)) - g(\mu_k t)| |(v, v_k)_{L^2}| \leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| |(v, v_k)_{L^2}|,$$

und die Summe von $(v, v_k)_{L^2}^2$ für $k = 1, 2, \dots$ existiert (und ist gleich $\|v\|_{L^2(\Omega)}^2$). Nach Lemma 6.15 können wir den Grenzwert $h \rightarrow 0$ und das Summenzeichen vertauschen und erhalten

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|g(\sqrt{L}(t+h))v - g(\sqrt{L}t)v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} (g(\mu_k(t+h)) - g(\mu_k t))^2 (v, v_k)_{L^2}^2 = 0.$$

Dies beweist $g(\sqrt{L}t)v \in C^0(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$. Wählen wir nun $g(x) = \cos(x)$ und $g(x) = \sin(x)/x$, so folgt, dass die ersten beiden Summanden in (7.8) Elemente aus $C^0(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ sind.

Für den dritten Summanden, den wir mit u_{inhom} bezeichnen, gilt

$$\begin{aligned} & \|u_{\text{inhom}}(t+h) - u_{\text{inhom}}(t)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\| \int_0^{t+h} \frac{\sin(\sqrt{L}(t+h-s))}{\sqrt{L}} f(s) ds - \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{L}(t-s))}{\sqrt{L}} f(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left\| \int_t^{t+h} \frac{\sin(\sqrt{L}(t+h-s))}{\sqrt{L}} f(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{L}(t+h-s)) - \sin(\sqrt{L}(t-s))}{\sqrt{L}} f(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Wir können die Operatornorm von $\sin(\sqrt{L}t)$ durch eins abschätzen, denn für $v \in L^2(\Omega)$ ist

$$\|\sin(\sqrt{L}t)v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\mu_k t)^2 (v, v_k)_{L^2}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (v, v_k)_{L^2}^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (7.9)$$

Analog kann man zeigen, dass die Operatornorm von $1/\sqrt{L}$ durch $1/\sqrt{\lambda_1}$ nach oben abgeschätzt werden kann. Nach dem Mittelwertsatz gilt für ein ξ zwischen $t+h-s$ und $t-s$:

$$\frac{\sin(\mu_k(t+h-s)) - \sin(\mu_k(t-s))}{\mu_k} = \cos(\mu_k \xi) h,$$

so dass nach ähnlicher Rechnung wie in (7.9) die Operatornorm von

$$\frac{\sin(\sqrt{L}(t+h-s)) - \sin(\sqrt{L}(t-s))}{\sqrt{L}}$$

durch ein Vielfaches von h abgeschätzt werden kann. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|u_{\text{inhom}}(t+h) - u_{\text{inhom}}(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \int_t^{t+h} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} ds + Ch \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq \frac{h}{\sqrt{\lambda_1}} \sup_{t < s < t+h} \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} + Ch t \sup_{0 < s < t} \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Im Grenzwert $h \rightarrow 0$ folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_{\text{inhom}}(t+h) - u_{\text{inhom}}(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

und damit die Stetigkeit des dritten Summanden.

Wir zeigen, dass u die Wellengleichung im distributionellen Sinn erfüllt. Seien $U_n = \sum_{k=1}^n u_k v_k$ und $F_n = \sum_{k=1}^n f_k v_k$ die Partialsummen von u und f . Wir haben weiter oben gezeigt, dass u_k die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u_{k,tt} + \lambda_k u_k = f_k,$$

erfüllt. Multiplizieren wir diese Gleichung mit v_k und summieren über $k = 1, \dots, n$, so folgt wegen $\lambda_k v_k = L v_k$

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^n u_k v_k + \sum_{k=1}^n u_k L v_k = \sum_{k=1}^n f_k v_k,$$

also $U_{n,tt} + L U_n = F_n$. Man kann zeigen, dass die Partialsummen U_n und F_n gegen die entsprechenden Fourier-Reihen in $L^2(\Omega)$ gleichmäßig in t konvergieren und damit im distributionellen Sinne. Nach einer Variante von Lemma 3.12 konvergieren dann auch die Ableitungen im distributionellen Sinne, und wir erhalten im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ aus $U_{n,tt} + L U_n = F_n$ und $U_n \rightarrow u, F_n \rightarrow f$ die Gleichung $u_{tt} + L(u) = f$.

Schließlich folgt direkt aus der Darstellung (7.8), dass die Anfangswerte erfüllt sind. \square

Der obige Satz lässt offen, ob die Randbedingungen erfüllt sind und ob die durch (7.8) definierte Lösung eindeutig ist. Wir beantworten diese Fragen im nächsten Abschnitt.

7.3 Energieintegral und Regularität

Für die Herleitung des Energieintegrals nehmen wir zunächst an, dass das Anfangsrandwertproblem der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta u &= f(x, t) \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times \mathbb{R}, \\ u(\cdot, 0) &= u_0, \quad u_t(\cdot, 0) = u_1 \quad \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

eine klassische Lösung besitzt. Dann können wir die Differentialgleichung mit u_t multiplizieren und integrieren und erhalten

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t^2 dx = \int_{\Omega} u_{tt} u_t dx = c^2 \int_{\Omega} \Delta u u_t dx + \int_{\Omega} f u_t dx.$$

Wir können die Ableitung nach t und das Integralzeichen wegen der angenommenen Regularität vertauschen. Partielle Integration im ersten Integral auf der rechten Seite ergibt

$$\int_{\Omega} \Delta u u_t dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t dx = - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Das Randintegral verschwindet, da mit $u = 0$ auch $u_t = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt. Folglich ist

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx = \int_{\Omega} f u_t dx.$$

Wir nennen das Integral auf der linken Seite die *Energie* des Systems,

$$E(t) = \int_{\Omega} (u_t(x, t)^2 + c^2 |\nabla u(x, t)|^2) dx.$$

Falls $f = 0$, so ist die Energie konstant und gleich der Anfangsenergie

$$E_0 = \int_{\Omega} (u_1^2 + c^2 |\nabla u_0|^2) dx.$$

Dies motiviert, dass die Lösung im Raum $C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ liegt. Natürlich ist dies kein Beweis, da wir ja angenommen haben, dass die Lösung regulär ist. Es gilt allerdings folgendes Resultat:

Theorem 7.5. Seien $T > 0$, Ω und L wie im vorigen Abschnitt, $f \in C^0([-T, T]; L^2(\Omega))$ und u die durch (7.8) definierte Funktion. Sei ferner $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Dann löst u das Anfangsrandwertproblem (7.5)-(7.6) im folgenden Sinne: Es gilt

$$u_t \in L^\infty(-T, T; L^2(\Omega)), \quad u(t) \in H_0^1(\Omega) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

und u löst die Differentialgleichung im distributionellen Sinne.

Beweis. Seien $v_k \in D(L) \subset H_0^1(\Omega)$ die bezüglich der $L^2(\Omega)$ -Norm normalisierten Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ_k des Operators $Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu$. Gemäß Proposition 6.10 sind die Funktionen v_k paarweise orthogonal. Daher bildet (v_k) ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2(\Omega)$, die orthogonal bezüglich des Skalarprodukts

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u^T A(x) \nabla v + c(x)uv) dx$$

ist, denn

$$a(v_j, v_k) = (Lv_j, v_k)_{L^2} = \lambda_j (v_j, v_k)_{L^2} = \lambda_j \delta_{jk}.$$

Sei $U_n(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t)v_k$ die Partialsumme der Fourier-Reihe von $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)v_k$. Dann ist $a(U_n(0), U_n(0))$ beschränkt:

$$\begin{aligned} a(U_n(0), U_n(0)) &= \sum_{j,k=1}^n u_j(0)u_k(0)a(v_j, v_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k(0)^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(0)^2 \\ &= a(u(0), u(0)) = a(u_0, u_0) \leq C \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Die Partialsumme U_n löst die Gleichung $U_{n,tt} + L(U_n) = F_n$, wobei F_n die Partialsumme der Fourier-Reihe von f ist. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $U_{n,t}$ und integrieren wir bezüglich x , so folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U_{n,tt} U_{n,t} dx + \int_{\Omega} (\nabla U_n^T A(x) \nabla U_{n,t} + c(x)U_n U_{n,t}) dx \\ = \int_{\Omega} F_n U_{n,t} dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} F_n^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} U_{n,t}^2 dx. \end{aligned}$$

Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (U_{n,t}^2) &= U_{n,tt} U_{n,t}, & U_n U_{n,t} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (U_n^2) \\ \nabla U_n^T A(x) \nabla U_{n,t} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \nabla U_n^T A(x) \nabla U_n\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (U_{n,t}^2 + \nabla U_n^T A(x) \nabla U_n + c(x) U_n^2) dx \leq \int_{\Omega} F_n^2 dx + \int_{\Omega} U_{n,t}^2 dx. \quad (7.10)$$

Definieren wir $G = \int_{\Omega} (U_{n,t}^2 + \nabla U_n^T A(x) \nabla U_n + c(x) U_n^2) dx$ und $H = \int_{\Omega} F_n^2 dx$, so ergibt sich die Differentialungleichung $dG/dt \leq H + G$, die mit dem Lemma von Gronwall (siehe Lemma 6.27) die Abschätzung

$$\int_{\Omega} (U_{n,t}^2 + \nabla U_n^T A(x) \nabla U_n + c(x) U_n^2) dx = G(t) \leq e^t \left(G(0) + \int_0^t H(s) ds \right), \quad t > 0,$$

liefert. Das Integral $G(0) = \|U_{n,t}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(U_n(0), U_n(0))$ ist gemäß der Rechnung zu Beginn des Beweises unabhängig von n . Kehren wir die Zeitrichtung mit $t \mapsto -t$ um, können wir eine ähnliche Ungleichung auch für $t < 0$ zeigen, so dass für alle $t \in (-T, T)$ gilt

$$\int_{\Omega} (U_{n,t}^2 + \nabla U_n^T A(x) \nabla U_n + c(x) U_n^2) dx \leq C(T),$$

wobei die Konstante $C(T) > 0$ von T , den Anfangsdaten und der L^2 -Norm von F_n oder f abhängt. Die Koerzivität von $A(x)$ ergibt

$$\begin{aligned}\sup_{-T < t < T} \int_{\Omega} (U_{n,t}(t)^2 + \alpha |\nabla U_n(t)|^2) dx \\ \leq \sup_{-T < t < T} \int_{\Omega} (U_{n,t}(t)^2 + \nabla U_n^T A(x) \nabla U_n + c(x) U_n^2) dx \leq C(T).\end{aligned}$$

Dies liefert eine von n unabhängige Abschätzung.

Im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ folgt, dass $u_t \in L^\infty(-T, T; L^2(\Omega))$ und $u \in L^2(-T, T; H_0^1(\Omega))$. Ferner gilt $U_n(t) = \sum_{k=1}^n u_k(t) v_k \in H_0^1(\Omega)$, woraus wir im Grenzwert $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ für fast alle $t \in (-T, T)$ schließen. Wegen (7.8) (Darstellung von $u(t)$) gilt dies dann auch für alle $t \in \mathbb{R}$. \square

Der folgende Satz zeigt, dass die Lösung regulärer ist, wenn die Anfangsdaten regulärer gewählt werden.

Theorem 7.6. Es gelten die Voraussetzungen von Satz 7.5 sowie $f \in C^0(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$. Ferner seien $u_0 \in D(L)$ und $u_1 \in H_0^1(\Omega)$. Dann gilt für die Lösung u von (7.5)-(7.6): $u_{tt} \in L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ und $u(t) \in D(L)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung ist insbesondere punktweise erfüllt.

Der Beweis dieses Satzes ist ähnlich wie der Beweis von Satz 7.5 und wird daher nicht ausgeführt. Wir bemerken, dass die Voraussetzung $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ in Satz 7.5 wesentlich für die Regularitätsaussage ist, wie das folgende Beispiel zeigt.

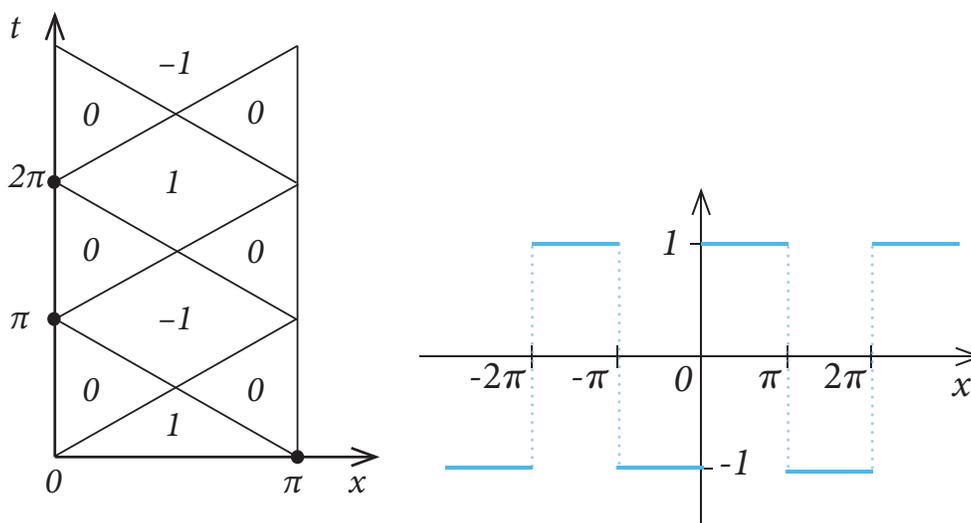


Abbildung 7.3: Links: Lösung von (7.11). Die Geraden sind die Unstetigkeitskurven der Lösung. Rechts: Illustration der Funktion v_0 .

Beispiel 7.7. Betrachte das eindimensionale Anfangsrandwertproblem

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0. \quad (7.11)$$

Der Anfangswert $u_0 = 1$ ist keine Funktion aus $H_0^1(0, \pi)$, so dass Satz 7.5 nicht anwendbar ist. Die (normierten) Eigenfunktionen und Eigenwerte von $L(u) = -u_{xx}$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen sind gegeben durch $v_k(x) = (2/\pi) \sin(kx)$, $\lambda_k = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$). Aus der Lösungsformel (7.7) folgt daher

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\sqrt{\lambda_k t}) (u_0, v_k)_{L^2} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) \sin(kx), \quad x, t \in \mathbb{R},$$

und die Koeffizienten a_k berechnen sich aus

$$1 = u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx), \quad x \in (0, \pi). \quad (7.12)$$

Mit der Identität

$$\cos(kt) \sin(kx) = \frac{1}{2} \sin(k(x+t)) + \frac{1}{2} \sin(k(x-t))$$

erhalten wir

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\sin(k(x+t)) + \sin(k(x-t))).$$

Wir können die Summe umformulieren. Dazu bemerken wir, dass für $x \in (-\pi, 0)$ aus (7.12) die Beziehung $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) = -1$ folgt, da der Sinus eine ungerade Funktion ist. Definieren wir also (siehe Abbildung 7.3 rechts)

$$v_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \in (0, \pi) \\ -1 & : x \in (-\pi, 0), \end{cases} \quad 2\pi\text{-periodisch sonst,}$$

so können wir

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

schreiben. Setzen wir $u_0 = 1$ auf $(0, \pi)$ ungerade auf $(-\pi, \pi)$ und 2π -periodisch auf \mathbb{R} fort, so erhalten wir gerade v_0 . Damit lautet die Lösung

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (v_0(x+t) + v_0(x-t)).$$

Dies entspricht der d'Alembertschen Formel (7.2). Die Lösung ist also stückweise konstant und nimmt nur die Werte $-1, 0$ und 1 an. Die Sprungunstetigkeitsstellen verlaufen entlang von Geraden (die Charakteristiken). Die Funktion ist in Abbildung 7.3 (links) illustriert. Dies zeigt, dass die Voraussetzung $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ in Satz 7.6 wesentlich ist, um die Regularität der Lösung sicherzustellen. \square

Eine Konsequenz von Satz 7.6 ist die Eindeutigkeit von Lösungen.

Proposition 7.8. Seien $u, v \in C^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ zwei Lösungen von (7.5)-(7.6). Dann folgt $u = v$ in $\Omega \times \mathbb{R}$.

Mit etwas mehr Aufwand kann bewiesen werden, dass die Eindeutigkeit auch für Lösungen aus $C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ gilt.

Beweis. Die Differenz $u - v$ löst die homogene Gleichung $(u - v)_{tt} + L(u - v) = 0$ mit

Anfangsdaten $(u - v)(0) = 0$ und $(u - v)_t(0) = 0$ in Ω . Da die Differentialgleichung punktweise erfüllt ist, können wir sie mit $(u - v)_t$ multiplizieren und dann integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u - v)_t^2 dx &= \int_{\Omega} (u - v)_{tt} (u - v)_t dx = - \int_{\Omega} L(u - v) (u - v)_t dx \\ &= - \int_{\Omega} (\nabla(u - v))^T A \nabla(u - v)_t + c(u - v)(u - v)_t dx. \end{aligned}$$

Weil die Matrix A symmetrisch ist und nicht von t abhängt, können wir

$$\int_{\Omega} \nabla(u - v)^T A \nabla(u - v)_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \nabla(u - v)^T A \nabla(u - v) dx$$

schreiben. Außerdem ist $(u - v)(u - v)_t = \frac{1}{2} \partial_t((u - v)^2)$, und wir erhalten

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} ((u - v)_t^2 + \nabla(u - v)^T A \nabla(u - v) + c(u - v)^2) dx = 0.$$

Daher ist der Integrand konstant für alle t und wegen $(u - v)_t(0) = 0$ und $(u - v)(0) = 0$ folgt $(u - v)(t) = 0$ in Ω für alle $t \in \mathbb{R}$. \square

Ein Eindeutigkeitsresultat kann auch für schwache Lösungen bewiesen werden, aber der Beweis ist wesentlich aufwendiger. Wir verweisen auf Evans, Seite 385 [7].

Die numerische Lösung der homogenen Wellengleichung $u_{tt} - \Delta u = 0$ in einem Quadrat, wobei die Lösung an zwei gegenüber liegenden Seiten fixiert (Dirichlet-Bedingung) und an den anderen beiden Seiten frei (Neumann-Bedingung) ist, ist in Abbildung 7.4 für verschiedene Zeiten dargestellt. Die Schwingungen der Lösung sind gut erkennbar.

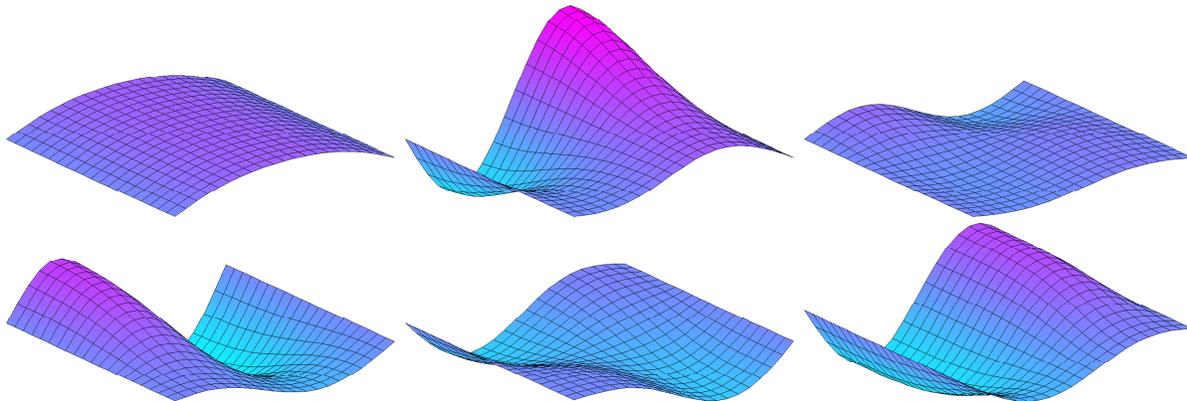


Abbildung 7.4: Lösungen der homogenen Wellengleichung zu den Zeiten $t = 0, 0.5, 1$ (obere Reihe) und $t = 1.5, 2, 2.5$ (untere Reihe).

8 Ergänzungen

In diesem Kapitel geben wir einige Ergänzungen zu einzelnen Themen.

8.1 Die Ritz-Galerkin-Methode

Die Ritz-Galerkin-Methode liefert einen alternativen Existenzbeweis für Variationsprobleme der Form

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in H, \quad (8.1)$$

wobei H ein Hilbertraum, $F \in H'$ und $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische, koerzive Bilinearform sind,

$$|a(u, v)| \leq K \|u\|_H \|v\|_H, \quad a(u, u) \geq \kappa \|u\|_H^2 \quad \text{für alle } u, v \in H,$$

sowie $K > 0$ und $\kappa > 0$. Außerdem liefert diese Technik die Grundlage für eine Methode, numerische Approximationen von Lösungen elliptischer Probleme zu finden, die sogenannte Methode der Finiten Elemente.

Die Idee lautet, den (i.a. unendlichdimensionalen) Raum H durch eine Familie endlichdimensionaler Unterräume $V_h \subset H$ ($h > 0$) zu ersetzen. Die *Ritz-Galerkin-Approximation* $u_h \in V_h$ ist definiert als die Lösung des abstrakten diskreten Problems

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in V_h. \quad (8.2)$$

Wir zeigen, dass dieses Problem eine Lösung besitzt. Sei dafür (v_1, \dots, v_N) eine Basis von V_h . Dann ist (8.2) äquivalent zu dem Problem

$$a(u_h, v_i) = F(v_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Setzen wir die Entwicklung $u_h = \sum_{i=1}^N x_i v_i$ in diese Gleichung ein, so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^N x_k a(v_k, v_i) = F(v_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

mit den Unbekannten $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$. Definieren wir $A = (a(v_i, v_j))_{ij}$, $b = (F(v_i))_i$ und $x = (x_i)_i$, so lautet das lineare Gleichungssystem in Matrixform, weil a symmetrisch ist,

$$Ax = b.$$

Es ist eindeutig lösbar, da aus der Koerzivität von a die positive Definitheit von A folgt: Seien $x \in \mathbb{R}^N$ und $w = \sum_{i=1}^N x_i v_i$. Dann ist

$$x^T Ax = \sum_{i,j=1}^N a(v_i, v_j) x_i x_j = a(w, w) \geq \kappa \|w\|_H^2.$$

Ist nun $Ax = 0$, so folgt unmittelbar $w = 0$ und damit $x = 0$. Dies bedeutet, dass A injektiv und folglich bijektiv ist. Wir haben bewiesen:

Proposition 8.1. Seien H ein Hilbertraum, a eine stetige, symmetrische, koerzive Bilinearform auf H , $F \in H'$ und $V_h \subset H$ ein endlichdimensionaler Unterraum. Dann besitzt das diskrete Problem (8.2) eine eindeutig bestimmte Lösung $u_h \in V_h$.

Wir können sogar abschätzen, wie gut die diskrete Lösung u_h die kontinuierliche Lösung u approximiert.

Lemma 8.2 (Céa). Seien H ein Hilbertraum, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, symmetrische, koerzive Bilinearform, $F \in H'$ und $u \in H$ die Lösung von (8.1). Seien ferner $V_h \subset H$ ein Unterraum und $u_h \in V_h$ die Lösung von (8.2). Dann gilt

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{K}{\kappa} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_H, \quad (8.3)$$

wobei K die Stetigkeitskonstante und κ die Koerzivitätskonstante von a sind.

Beweis. Wir subtrahieren (8.1) und (8.2). Dann ist $a(u - u_h, v) = 0$ für alle $v \in V_h$. Insbesondere gilt

$$a(u - u_h, v - u_h) = 0 \quad \text{für alle } v \in V_h$$

und daher

$$\begin{aligned} \kappa \|u - u_h\|_H^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v) + \underbrace{a(u - u_h, v - u_h)}_{=0} \\ &\leq K \|u - u_h\|_H \|u - v\|_H. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{K}{\kappa} \|u - v\|_H \quad \text{für alle } v \in V_h,$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Da a symmetrisch ist, definiert a ein Skalarprodukt auf H , denn $a(u, u) = 0$ impliziert wegen der Koerzivität $u = 0$. Damit können wir das Lemma von Céa geometrisch interpretieren. Die Gleichung $a(u - u_h, v) = 0$ für alle $v \in V_h$ bedeutet, dass $u - u_h$ orthogonal zu V_h ist, d.h., u_h ist dasjenige Element in V_h , das u "am nächsten" kommt (siehe Abbildung 8.1). Mit anderen Worten: u_h ist die Bestapproximation von u im Raum V_h .

Um Konvergenz von u_h gegen die Lösung u für $h \rightarrow 0$ zu erhalten, benötigen wir eine Eigenschaft der Familie (V_h) , nämlich dass sie gegen H konvergiert, und zwar im folgenden Sinn:

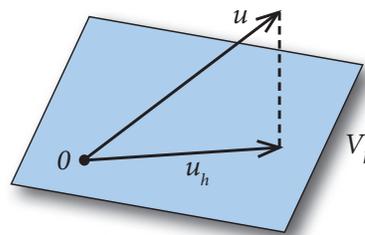


Abbildung 8.1: Die Approximation u_h kommt u in V_h am "nähesten".

Proposition 8.3. Es gelten die Voraussetzungen von Lemma 8.2 und

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{dist}(v, V_h) = 0 \quad \text{für alle } v \in H.$$

Dann folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_H = 0.$$

Unter "dist" verstehen wir den kleinsten Abstand eines Vektors an den Unterraum, d.h. $\text{dist}(v, V_h) = \inf\{\|v - v_h\|_H : v_h \in V_h\}$.

Beweis. Seien $\varepsilon > 0$ und $u \in H$. Dann existiert nach Voraussetzung ein $h_0 > 0$, so dass für alle $0 < h < h_0$ gilt: $\text{dist}(u, V_h) < \kappa\varepsilon/K$. Aus Lemma 8.2 ergibt sich dann

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{K}{\kappa} \text{dist}(u, V_h) < \varepsilon,$$

und die Behauptung folgt. \square

Wie bereits zu Beginn des Abschnitts bemerkt, kann die Ritz-Galerkin-Methode zur *numerischen Approximation* der Lösung von (8.1) verwendet werden. Dazu muss lediglich das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = (a(v_i, v_j))_{ij}$, $b = (F(v_i))_i$ gelöst werden. Die Funktion $u_h = \sum_i x_i v_i$ ist dann die gewünschte Approximation. Für die praktische Berechnung ist es wünschenswert, wenn die Berechnung der Matrixelemente möglichst einfach und die Matrix dünn besetzt ist, da in diesem Fall effiziente Techniken zur Lösung des linearen Gleichungssystems zur Verfügung stehen.

Falls die Bilinearform symmetrisch ist, könnte man mittels des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt bezüglich des durch die Bilinearform gegebenen Skalarprodukts eine Orthonormalbasis von V_h bestimmen. Dann ist A die Einheitsmatrix und die Lösung des linearen Gleichungssystems ist trivial. Leider ist die Bestimmung der Orthonormalbasis genauso aufwendig wie die Lösung des Gleichungssystems und liefert daher kein brauchbares Verfahren.

Eine andere Idee lautet, Basisfunktionen v_i zu verwenden, die auf Teilbereichen von Ω mit Polynomen übereinstimmen (damit die Berechnung von $a(v_i, v_j)$ möglichst einfach ist) und einen möglichst kleinen Träger besitzen (damit die Matrix dünn besetzt ist).

Hierzu wird zuerst Ω in Polyeder (z.B. Dreiecke im \mathbb{R}^2 oder Tetraeder im \mathbb{R}^3) zerlegt. Der maximale Durchmesser aller Polyeder sei $h > 0$, und die Ecken der Polyeder seien mit x_1, \dots, x_N bezeichnet. Dann definiert man für jedes x_i eine polynomielle Basisfunktion v_i , so dass $v_i(x_i) = 1$ gilt und der Träger von v_i möglichst wenige Polyeder umfasst (z.B. nur die an x_i angrenzenden Polyeder). Dies definiert den endlichdimensionalen Raum $V_h = \text{span}(v_1, \dots, v_N)$, wobei "span" die lineare Hülle bezeichne. Der Grenzwert $h \rightarrow 0$ bedeutet dann, dass die Zerlegung in Teilbereiche von Ω immer feiner wird. Diese Technik wird die *Methode der Finiten Elemente* genannt.

Nach Proposition 8.3 konvergiert die Folge der approximativen Lösungen u_h für $h \rightarrow 0$ gegen die Lösung u von (8.1). Für die Praxis sind jedoch genauere Abschätzungen für die Differenz $u - u_h$ erwünscht. Diese Fehlerabschätzungen können mit dem Lemma von Céa bewiesen werden. Dazu wird eine Projektion $\Pi_h u$ von u auf V_h durch $\Pi_h u = \sum_i u(x_i)v_i \in V_h$ definiert. Aus dem Lemma von Céa folgt

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{K}{\kappa} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_H \leq \frac{K}{\kappa} \|u - \Pi_h u\|_H.$$

Es genügt also, die Differenz $u - \Pi_h u$ mit Hilfe der Approximationstheorie zu berechnen. Typische Ergebnisse sind Abschätzungen von der Form $\|u - \Pi_h u\|_H \leq Ch^\beta$ für Konstanten $C > 0$ und $\beta > 0$, die nicht von h oder u , aber von der Wahl des Raums H abhängen. Dann ergibt sich die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{CK}{\kappa} h^\beta.$$

Dies bedeutet, dass die approximative Lösung *mit der Ordnung β* gegen die Lösung u konvergiert. Je größer β ist, desto schneller ist die Konvergenz. Für Details verweisen wir auf Bücher über Finite Elemente, z.B. Ciarlet [6] oder Großmann/ Roos [9].

8.2 Eine Konsequenz aus dem Maximumprinzip für elliptische Gleichungen

Wir beweisen wir eine Folgerung aus dem schwachen Maximumprinzip für elliptische Gleichungen, siehe Abschnitt 8.2.

Theorem 8.4. Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ eine Lösung von

$$L(u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $g \in C^0(\partial\Omega)$, $f \in C^0(\bar{\Omega})$, und sei $c \geq 0$ in Ω . Dann gilt

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq \sup_{x \in \partial\Omega} |g(x)| + C \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, \tag{8.4}$$

wobei $C > 0$ nur von α , $\sup_{\Omega} |b|$ und dem Durchmesser von Ω abhängt. Hierbei ist $\alpha > 0$ die Elliptizitätskonstante von L (siehe (5.6)).

Man nennt (8.4) eine *A-priori-Abschätzung*. Im Unterschied zu der Ungleichung (5.13) haben wir hier eine L^∞ -Abschätzung der Lösung.

Beweis. Da Ω als beschränkt vorausgesetzt wurde, existiert eine Konstante $d > 0$, so dass Ω (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) in dem Streifen $0 < x_1 < d$ liegt. Definiere für beliebige $\lambda > 0$ die sogenannte Vergleichsfunktion

$$v(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} |g(x)| + (e^{\lambda d} - e^{\lambda x_1}) \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \geq 0.$$

Mit $b_0 = \sup_{\Omega} |b_1|$ und $a_{11} \geq \alpha$ folgt

$$L(v) = (\lambda^2 a_{11} - \lambda b_1) e^{\lambda x_1} \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + cv \geq \lambda(\alpha\lambda - b_0) \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Wählen wir λ hinreichend groß, so ist $L(v) \geq \sup_{\Omega} |f|$. Daraus ergibt sich

$$L(u - v) \leq f - \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leq 0 \quad \text{in } \Omega$$

und $u - v \leq 0$ auf $\partial\Omega$. Das schwache Maximumprinzip impliziert $u - v \leq 0$ in Ω . (Dies erklärt die Bezeichnung "Vergleichsfunktion" für v .) Analog kann man $u + v \geq 0$ in Ω beweisen. Daher ist

$$|u| \leq v \leq \sup_{x \in \partial\Omega} |g(x)| + (e^{\lambda d} - 1) \sup_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

woraus die Behauptung folgt. □

8.3 Konsequenzen aus dem Maximumprinzip für parabolische Gleichungen

Im Folgenden beweisen wir einige Korollare aus dem schwachen Maximumprinzip aus Abschnitt 6.7. Hierzu betrachten wir das inhomogene Anfangsrandwertproblem

$$u_t + L(u) = f(x, t) \quad \text{in } G, \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad (8.5)$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T). \quad (8.6)$$

Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein beschränktes Gebiet. Das erste Resultat beweist die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten.

Theorem 8.5 (Stetige Abhängigkeit von den Daten). Sei $u \in C_1^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ eine Lösung von (8.5)-(8.6). Dann ist

$$\sup_G |u| \leq \max \left\{ \sup_{\Omega} |u_0|, \sup_{\partial\Omega \times (0,T)} |g| \right\} + C \sup_G |f|,$$

wobei $C > 0$ nur von Ω und den Koeffizienten von L abhängt.

Beweis. Der Beweis ist ähnlich wie der entsprechende Beweis für elliptische Gleichungen. Da Ω beschränkt ist, existiert ein $d > 0$, so dass Ω (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) in dem Streifen $0 < x_1 < d$ liegt. Wir definieren die Vergleichsfunktion

$$v(x, t) = \max \left\{ \sup_{\Omega} |u_0|, \sup_{\partial\Omega \times (0,T)} |g| \right\} + (e^{\lambda d} - e^{\lambda x_1}) \sup_G |f| \geq 0,$$

wobei $\lambda > 0$. Die Funktion ist konstant bezüglich t . Mit $b_0 = \sup_G |b_1|$ und $a_{11} \geq \alpha$ folgt wie im elliptischen Fall

$$L(v) = (\lambda^2 a_{11} - \lambda b_1) e^{\lambda x_1} \sup_G |f| + cv \geq \lambda(\alpha\lambda - b_0) \sup_G |f| \geq \sup_G |f|,$$

wenn wir λ hinreichend groß wählen. Wegen

$$(u - v)_t + L(u - v) = u_t + L(u) - L(v) \leq f - \sup_G |f| \leq 0 \quad \text{in } G$$

können wir das schwache Maximumprinzip auf $u - v$ anwenden. Es gilt $(u - v)(\cdot, 0) \leq u_0 - \sup_{\Omega} |u_0| \leq 0$ in Ω und $u - v \leq g - \sup_{\partial\Omega \times (0,T)} |g| \leq 0$ auf $\partial\Omega \times (0, T)$. Daher erhalten wir $u - v \leq 0$ in G und damit die Behauptung. Die Abschätzung für die untere Schranke wird analog gezeigt. \square

Aus dem schwachen Maximumprinzip folgt die Eindeutigkeit klassischer Lösungen des Problems (8.5)-(8.6), denn sind u und v zwei solche Lösungen, so erfüllen sie $u - v = 0$ zur Zeit $t = 0$ und auf dem Rand sowie $(u - v)_t + L(u - v) = f - f = 0$ in G . Das Maximumprinzip impliziert $u - v = 0$ in G . Damit kann nur höchstens eine klassische Lösung existieren.

Abschließend zeigen wir, dass jede klassische Lösung von (8.5)-(8.6) mit homogener rechter Seite und homogenen Randdaten exponentiell schnell gegen null konvergiert, falls $\inf_G c > 0$.

Proposition 8.6. Sei $u \in C_1^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ eine Lösung von (8.5)-(8.6) mit $f = 0$ und $g = 0$.

Dann gilt für alle $(x, t) \in G$

$$|u(x, t)| \leq \sup_{\Omega} |u_0| e^{-\lambda t}, \quad \text{wobei } \lambda = \inf_G c.$$

Beweis. Wir setzen $v(x, t) = \sup_{\Omega} |u_0| e^{-\lambda t}$ und verwenden diese Funktion als Vergleichsfunktion. Dann ist v unabhängig von x und

$$(u - v)_t + L(u - v) = -v_t - L(v) = \lambda v - cv = \left(\inf_G c - c \right) v \leq 0.$$

Ferner ist nach Konstruktion $u - v \leq 0$ zur Zeit $t = 0$ und $u - v = -v \leq 0$ am Rand. Das schwache Maximumprinzip impliziert $u - v \leq 0$ in G . Analog können wir $v + u \geq 0$ in G beweisen. Wir schließen $|u| \leq v$ in G . \square

8.4 Inverse der Fourier-Transformation

Wir wollen zeigen, dass die Fourier-Kotransformation gleich der inversen Fourier-Transformation ist, sofern die Fourier-Transformierte in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt. Zuerst zeigen wir ein Hilfesresultat.

Lemma 8.7. Seien $G_\varepsilon(x) = (2\pi\varepsilon^2)^{-n/2} e^{-|x|^2/2\varepsilon^2}$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten folgende Eigenschaften:

- (1) $\widehat{G}_\varepsilon(k) = e^{-\varepsilon^2|k|^2/2},$
- (2) $G_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{G}_\varepsilon(k) e^{ik \cdot x} dk,$
- (3) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (G_\varepsilon * f) = f$ in \mathbb{R}^n .

Die Funktion G_ε kann als eine Approximation der Delta-Distribution interpretiert werden (siehe Abbildung 8.2), da für Testfunktionen $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nach einer Transformation $y = x/\varepsilon$ (also $dy = \varepsilon^{-n} dx$) folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} G_\varepsilon(x) \phi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi\varepsilon^2)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2\varepsilon^2} \phi(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/2} \phi(\varepsilon y) dy \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/2} \phi(0) dy = \phi(0). \end{aligned}$$

Für den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ haben wir den Satz von der dominierten Konvergenz benutzt.

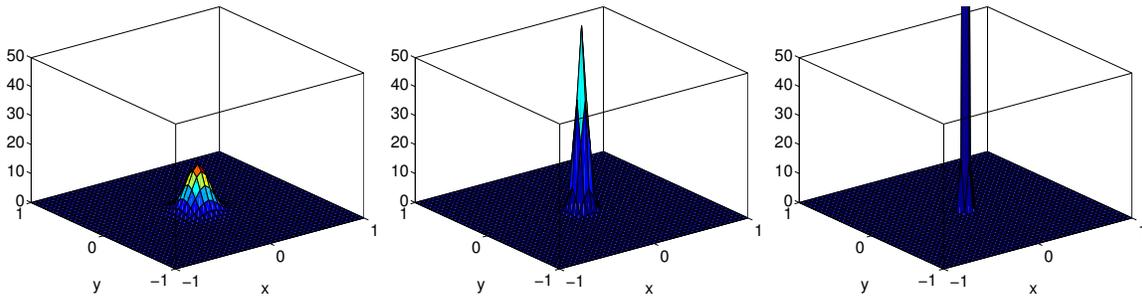


Abbildung 8.2: Funktion G_ε für $\varepsilon = 0.1$ (links), $\varepsilon = 0.05$ (Mitte), $\varepsilon = 0.02$ (rechts).

Beweis. Die erste Behauptung wird durch Rechnung nachgewiesen:

$$\begin{aligned}\widehat{G}_\varepsilon(k) &= (2\pi\varepsilon^2)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2\varepsilon^2} e^{-ik \cdot x} dx = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2/2} e^{-i\varepsilon k \cdot y} dy \\ &= (2\pi)^{-n/2} \widehat{\phi}(\varepsilon k) = e^{-\varepsilon^2 |k|^2/2},\end{aligned}$$

wobei wir (6.3) verwendet haben. Die zweite Behauptung folgt nach einer ähnlichen Rechnung. Wir weisen die dritte Aussage zunächst für Funktionen $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nach:

$$(G_\varepsilon * f)(x) = (2\pi\varepsilon^2)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/2\varepsilon^2} f(y) dy = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2/2} f(x - \varepsilon z) dz.$$

Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz können wir den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ mit dem Integralzeichen vertauschen und erhalten

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (G_\varepsilon * f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2/2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x - \varepsilon z) dz = f(x).$$

Da $L^1(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen durch Testfunktionen approximiert werden, folgt die Aussage auch für solche Funktionen. \square

Theorem 8.8 (Inversionsformel). Sei $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Fourier-Transformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, d.h. $\widehat{f} = F[f]$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = F^{-1}[\widehat{f}](x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk,$$

und F^{-1} ist die Inverse von F .

Beweis. Nach der Definition der Fourier-Transformation und wegen $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{G}_\varepsilon(k) = 1$, dem Satz von der dominierten Konvergenz und dem Satz von Fubini können wir die rechte Seite der obigen Gleichung umformulieren:

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{G}_\varepsilon(k) \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{G}_\varepsilon(k) \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{G}_\varepsilon(k) f(y) e^{-ik \cdot y} e^{ik \cdot x} dy dk \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\widehat{G}_\varepsilon(k) e^{ik \cdot (x-y)} dk \right) f(y) dy \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} G_\varepsilon(x-y) f(y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (G_\varepsilon * f)(x) = f(x),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus Lemma 8.7 (3) folgt. \square

8.5 Dispersion und Schrödinger-Gleichung

In den vorherigen Kapiteln haben wir die Phänomene Diffusion und (Wellen-) Transport kennengelernt. Es gibt noch einen anderen Effekt, die *Dispersion*. Dazu betrachten wir zunächst die Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}.$$

Die komplexwertige Funktion $u(x, t) = \exp(i(k \cdot x - \omega t))$ mit $k \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung, wenn

$$0 = u_{tt} - \Delta u = -(\omega^2 - |k|^2)u, \quad \text{also } \omega = \pm |k|.$$

Interpretieren wir x als den Ort und t als die Zeit, so hat $|k|$ die Dimension $1/m$ und ω die Dimension $1/s$. Der Quotient $\omega/|k|$ hat also die Dimension einer Geschwindigkeit. Wir nennen

$$v = \frac{\omega}{|k|}$$

die *Phasengeschwindigkeit*. Für die obige Lösung der Wellengleichung gilt $v = \pm 1$, d. h., die Welle breitet sich mit der Geschwindigkeit ± 1 aus.

In der Quantenmechanik wird postuliert, dass die Evolution eines Quantensystems aus Elementarteilchen (z.B. Elektronen) durch die Schrödinger-Gleichung

$$iu_t + \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R},$$

beschrieben wird. Die komplexwertige Lösung $u(x, t)$ wird Wellenfunktion genannt. Sie beschreibt den quantenmechanischen Zustand des Teilchensystems. Das Integral

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx$$

wird als die Wahrscheinlichkeit interpretiert, bei einer Messung das Teilchensystem in Ω zu finden. Damit dies Sinn macht, sollte u normiert sein:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = 1,$$

denn dies bedeutet, dass das Teilchensystem mit Sicherheit im \mathbb{R}^n zu finden ist. Die Funktion $u(x, t) = \exp(i(k \cdot x - \omega t))$ löst die Schrödinger-Gleichung, wenn

$$0 = iu_t + \Delta u = (\omega - |k|^2)u, \quad \text{also} \quad \omega = |k|^2.$$

(Allerdings ist diese spezielle Lösung nicht normiert; um eine physikalisch sinnvolle Lösung zu erhalten, sollten wir Wellenpakete betrachten.) Die Phasengeschwindigkeit $v = \omega/|k| = |k|$ hängt vom Vektor k (der sogenannten *Wellenzahl*) ab, d. h., “Wellen” mit unterschiedlicher Wellenzahl k breiten sich unterschiedlich schnell aus (die Phasengeschwindigkeit hängt also von k ab). Dieses Phänomen nennt man *Dispersion*. Dispersion spielt auch bei klassischen Ereignissen, etwa bei Wasserwellen, eine wichtige Rolle.

Ist der Anfangswert $u(0) = u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so können wir die Schrödinger-Gleichung explizit lösen:

$$u(x, t) = \frac{e^{i|x|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y/2t + i|y|^2/4t} u_0(y) dy$$

für $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. (Für einen Beweis siehe die Vorlesung “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen”.) Insbesondere gilt

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (4\pi|t|)^{-n/2} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für } t \neq 0,$$

d. h., die “Welle” “zerfließt” im Laufe der Zeit. Beachte allerdings, dass die L^2 -Norm konstant in der Zeit ist:

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

In gewisser Weise ähnelt die Schrödinger-Gleichung sowohl der Wärmeleitungs- als auch der Wellengleichung. Ihre Lösungen besitzen wie die der Wellengleichung Wellencharakter; allerdings regularisiert die Schrödinger-Gleichung wie die Wärmeleitungsgleichung, aber nicht so stark. Ist $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so gilt $u(t) \in H_{\text{loc}}^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ (siehe das Buch von Cazenave [5] für einen Beweis). Wir gewinnen also für fast alle $t \in \mathbb{R}$ lokal im Ort eine “halbe” Ableitung.

8.6 Maschinelernen und partielle Differentialgleichungen

Wir haben in dieser Vorlesung zwei Techniken kennengelernt, mit denen partielle Differentialgleichungen gelöst werden können:

- ▶ analytische Lösungsformeln, etwa mit Hilfe der Greenschen Funktion;
- ▶ Approximationstechniken, etwa die Galerkin-Methode.

Weitere Approximationstechniken stellen z.B. Finite-Differenzen- und Finite-Elemente-Methoden in der numerischen Analysis dar. Methoden des Maschinlernens stellen

eine dritte, relativ neue Technik dar. Die Idee lautet, einen physikalischen Prozess mittels einer zunächst unbekannt partiellen Differentialgleichung mathematisch zu modellieren. Beispielsweise sind die grundlegenden Terme bekannt (Diffusion, Transport, Drift), aber die Koeffizienten müssen noch bestimmt werden. Diese können etwa aus einer großen Anzahl von Daten (aus Experimenten oder anderen numerischen Approximationen) "gelernt" werden. Andere Aspekte, die "gelernt" werden können, sind

- ▶ Transformationen einer nichtlinearen auf eine lineare Gleichung (wie die Hopf-Cole-Transformation);
- ▶ Modelle reduzierter Ordnung: Bewegt sich die Lösung auf einer niedrigdimensionalen Mannigfaltigkeit?;
- ▶ Konstruktion (nichtlokaler) neuraler Operatoren, die etwa die Greensche Funktion repräsentieren.

Maschinelles Lernen wird mittels sogenannter künstlicher neuronaler Netzwerke realisiert. Neuronale Netzwerke können mathematisch als ein Graph veranschaulicht werden, dessen Knoten die Neuronen und Kanten die Verbindungen in verschiedenen Schichten darstellen. Wir unterscheiden:

- ▶ Eingangsschicht $x(0)$ mit N_0 Neuronen;
- ▶ verdeckte Zwischenschichten $x(\ell)$ mit N_ℓ Neuronen, wobei $\ell = 1, \dots, L - 1$;
- ▶ Ausgangsschicht $x(L)$ mit N_L Neuronen.

Die Informationen der Schicht ℓ werden gewichtet auf die Neuronen der nächsten Schicht $\ell + 1$ vermittelt, indem man die Werte zunächst affin transformiert,

$$s_i(\ell) = \sum_{j=1}^{N_\ell} w_{ij}(\ell)x_j(\ell) + b_i(\ell),$$

und dann von einer nichtlinearen Aktivierungsfunktion σ_i ausgewertet,

$$x_i(\ell + 1) = \sigma_i(s_i(\ell)), \quad i = 1, \dots, N_{\ell+1}, \quad \ell = 0, \dots, L - 1.$$

Die Gewichte $w_{ij}(\ell)$ und Biaswerte $b_i(\ell)$ werden durch Training des Netzwerks bestimmt. Seien $N = N_\ell$ und $(x^{(k)}, z^{(k)})$ Trainingsdaten mit den Eingangsvektoren $x^{(k)}$ (z.B. Bilder) und Zielvektoren $z^{(k)}$ (z.B. Bildbeschreibung), wobei $k = 1, \dots, M$. Das Ziel ist nun, die Parameter $\theta = (w_{ij}(\ell), b_i(\ell))_{i,j,\ell}$ so zu wählen, dass die Ausgangsvektoren $y^{(k)}$ möglichst nahe den Zielvektoren $z^{(k)}$ liegen, etwa durch Minimierung der Kostenfunktion

$$J(\theta) = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^N |y_i^{(k)} - z_i^{(k)}|^2.$$

Diese Funktion hängt via $y_i^{(k)} = x_i^{(k)}(L)$ von den Parametern θ ab.

Der Vorteil dieser Herangehensweise ist, dass die Dimension der Differentialgleichung kaum eine Rolle spielt und somit Gleichungen sehr hoher Ordnung approximiert werden können. Beispiele sind

- ▶ Black-Scholes-Gleichung der Finanzmathematik (Dimension = Anzahl der betrachteten Aktienunternehmen);
- ▶ Boltzmann-Gleichung für komplexe Moleküle (Dimension = Freiheitsgrad des Moleküls);
- ▶ Viel-Teilchen-Schrödinger-Gleichung (Dimension = Anzahl der Teilchen).

Nachteile sind zum Beispiel Instabilitäten bei der Berechnung von Ableitungen, ungenügende Datenqualität, implizite (einschränkende) Modellannahmen.

Es gibt eine Vielzahl von Softwarebibliotheken, die mittels physikinformiertes Maschinelles Lernen Differentialgleichungen lösen können:

- ▶ DeepXDE (Programmiersprache Python, Backend TensorFlow);
- ▶ PyDEns (Programmiersprache Python, Backend TensorFlow);
- ▶ NeuralPDE (Programmiersprache Julia, Backend Julia).

9 Fragen zum Selbsttest

Die Lösungen zu den Fragen finden Sie am Ende des Manuskripts hinter der Literaturliste.

Kapitel 1

1. Welche der folgenden partiellen Differentialgleichungen sind linear?

- (a) $xyu_{xy} + u_x + u_y = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (b) $uu_{xy} + u_x + u_y = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (c) $u_x u_y + u_{xxx} = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Welche der folgenden partiellen Differentialgleichungen sind quasilinear?

- (a) $u_x u_{xy} + u_x^2 = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (b) $uu_{xy} + u_x + u_y = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (c) $u_y u_{xyy} u_{xxy} + u_x^2 u_y^2 = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Die viskose Burgers-Gleichung $u_t + uu_x = u_{xx}$ für $x \in \mathbb{R}, t > 0$ ist vom folgenden Typ:

- (a) Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.
- (b) Semilineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.
- (c) Voll nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

4. Sei Ω der Halbraum $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$. Die Normalenableitung von $f(x, y, z) = xe^{y+2z}$ an der Stelle $(0, y, z)$, wobei die Normale normiert und nach außen gerichtet ist, lautet:

- (a) $\partial f / \partial \nu(x, y, z) = xe^{y+2z}$.
- (b) $\partial f / \partial \nu(x, y, z) = -e^{y+2z}$.
- (c) $\partial f / \partial \nu(x, y, z) = -1$.

Kapitel 3

1. Welche der folgenden Funktionale sind Distributionen aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$?

- (a) $\langle u, \phi \rangle = \phi''(0)$.
- (b) $\langle u, \phi \rangle = \phi(0)^2$.
- (c) $\langle u, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx$.

2. Welche der folgenden Eigenschaften sind gültig?

- (a) Distributionen sind unendlich oft differenzierbar.
- (b) Das Produkt zweier Distributionen ist wieder eine Distribution.
- (c) Die Funktion $u(x) = 1/x$ für $x > 0$ ist eine Distribution.

3. Der distributionelle Grenzwert folgender Funktionenfolgen ergibt die Delta-Distribution $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

- (a) $f_\varepsilon(x) = 1/\varepsilon$ für $|x| < \varepsilon/2$ und $f_\varepsilon(x) = 0$ sonst.
- (b) $f_\varepsilon(x) = 1/2\varepsilon$ für $x \in (0, 2\varepsilon)$ und $f_\varepsilon(x) = 0$ sonst.
- (c) $f_\varepsilon(x) = 1/2\varepsilon^2$ für $|x| < \varepsilon$ und $f_\varepsilon(x) = 0$ sonst.

4. Sei δ_x die Diracsche Delta-Distribution mit Pol in $x \in \mathbb{R}^n$. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- (a) $\langle D^\alpha \delta_x, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \phi(x)$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
- (b) $\delta_x * \phi = \phi$ für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
- (c) Sei $f(x) = 1$ für $x \in (0, 1)$ und $f(x) = 0$ sonst. Dann ist $f' = \delta_0 - \delta_1$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

5. Der formal adjungierte Operator zu $L(u) = xu'' + u'$, $x \in \mathbb{R}$, lautet:

- (a) $L^*(u) = xu'' - u'$.
- (b) $L^*(u) = xu'' + u'$.
- (c) $L^*(u) = (xu')' - u'$.

6. Sei L ein linearer formaler Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, U_0 eine Fundamentallösung mit Pol in null, und $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

- (a) $U_\xi * f$ ist eine distributionelle Lösung von $L(u) = f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
- (b) $\delta_0 * f$ ist eine distributionelle Lösung von $L(u) = f$.
- (c) $U_0 * f$ ist eine distributionelle Lösung von $L(u) = f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Kapitel 4

1. Das Newton-Potential ist eine Lösung von

- (a) $L(u) = f$ in \mathbb{R}^n , wobei L ein linearer formaler Differentialoperator zweiter Ordnung ist.
- (b) $\Delta u = f$ in Ω .
- (c) $\Delta u = \delta$ in \mathbb{R}^n .

2. Die Greensche Funktion $G(x, \cdot)$ für festes $x \in \Omega$ löst

- (a) $\Delta G(x, \cdot) = \delta_x$ in Ω , $G(x, \cdot) = 0$ auf $\partial\Omega$.
- (b) $\Delta G(x, \cdot) = \delta_0$ in Ω , $G(x, \cdot) = 0$ auf $\partial\Omega$.
- (c) $\Delta G(x, \cdot) = 0$ in Ω , $G(x, \cdot) = g$ auf $\partial\Omega$, g gegeben.

3. Für eine harmonische Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

- (a) $\Delta u = \delta$ in Ω .
- (b) u ist unendlich oft differenzierbar in Ω .
- (c) $\Delta u = 0$ in Ω .

4. Sei u harmonisch auf der Kugel $B_R(0)$. Dann gilt:

- (a) $u(x_0)$ mit $|x_0| < R$ ist vollständig bestimmt durch die Werte von u auf $\partial B_R(0)$.
- (b) $u(x_0)$ mit $|x_0| = R$ ist vollständig bestimmt durch die Werte von u in der Kugel $B_{R/2}(0)$ mit halbem Radius.
- (c) $\Delta u(0)$ kann explizit berechnet werden.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit $\Delta u \geq 0$ in Ω . Dann gilt:

- (a) Wenn zusätzlich $\Delta u \leq 0$ in Ω , dann ist u konstant.
- (b) u nimmt das Maximum auf dem Rand $\partial\Omega$ an.
- (c) u nimmt das Minimum auf dem Rand $\partial\Omega$ an.

Kapitel 5

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $\partial\Omega \in C^1$. Der Sobolevraum $H^k(\Omega)$ ist gleich

- (a) dem Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$.
- (b) dem Abschluss von $C^\infty(\overline{\Omega})$ in der Norm $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$.
- (c) der Menge aller (Äquivalenzklassen von) messbaren Funktionen f , für die $D^\alpha f$ für alle $|\alpha| \leq k$ quadratintegrierbar ist.

2. Die Funktion $u(x) = |x|^\alpha$, $x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $x \neq 0$, ist genau dann ein Element von $H^1(B_1(0))$, wenn

- (a) $\alpha > -1$.
- (b) $\alpha > -n/2 + 1$.

- (c) $\alpha > -n$.
3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $u \in H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist
- (a) u stetig in Ω , wenn $k > 1$.
- (b) u stetig differenzierbar in Ω , wenn $k > n$.
- (c) u zweimal stetig differenzierbar in Ω , wenn $k > (n + 4)/2$.
4. Die folgenden Funktionen $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ sind Elemente von $H^{-1}(0, 1)$:
- (a) $u(x) = -1$ für $x < 0$ und $u(x) = 1$ für $x > 0$.
- (b) $u = \delta$.
- (c) $u = \delta'$.
5. Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $c \geq 0$. Die Differentialgleichung $-\operatorname{div}(A\nabla u) + cu = f$ heißt gleichmäßig elliptisch, wenn
- (a) alle Eigenwerte von $A(x)$ positiv gleichmäßig in x sind.
- (b) $n - 1$ Eigenwerte von $A(x)$ positiv sind und ein Eigenwert negativ ist (gleichmäßig in x).
- (c) für alle x und ξ gilt $\xi^T A(x)\xi \geq 0$.
6. Eine notwendige Bedingung zur Lösung des Randwertproblems $\Delta u = f$ in Ω , $\partial u / \partial \nu = g$ auf $\partial\Omega$ lautet
- (a) $\int_{\Omega} f = 0$.
- (b) $\int_{\Omega} u = 0$.
- (c) $\int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} g ds$.

Kapitel 6

1. Die Fourier-Transformierte von $f(x) = 1$ für $-1 < x < 1$ und $f(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ lautet
- (a) $\widehat{f}(k) = 2 \sin(k)/k$.
- (b) $\widehat{f}(k) = \sqrt{2/\pi} \sin(k)$.
- (c) $\widehat{f}(k) = 2\pi k \sin(k)$.
2. Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $g(x) = f(x - a)$. Dann lautet die Fourier-Transformierte von g

- (a) $\widehat{g}(k) = ia \cdot k \widehat{f}(k)$.
- (b) $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k)$.
- (c) $\widehat{g}(k) = e^{ia \cdot k} \widehat{f}(k)$.

3. Welche der folgenden Operatoren ist symmetrisch?

- (a) $L(u) = -\operatorname{div}(A \nabla u + bu) + cu$.
- (b) $L(u) = -\Delta u + cu$.
- (c) $L(u) = -\Delta(\Delta u)$.

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$. Welcher der folgenden Operatoren $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist kompakt?

- (a) $Kf = u$, wobei $-\Delta u + cu = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $c \geq 0$.
- (b) $Kf = f$.
- (c) $Kf = \int_{\Omega} f(x) dx$, wobei die rechte Seite als konstante Funktion interpretiert wird.

5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Die Lösung von $u_t - \Delta u = 0$ in $\Omega \times (0, T)$, $u = 0$ auf $\partial\Omega \times (0, T)$, $u(0) = u_0 \in L^2(\Omega)$ in Ω erfüllt

- (a) $u \in C^1([0, T]; L^2(\Omega))$.
- (b) $u(t) \in H^2(\Omega)$ für alle $t > 0$.
- (c) $u \in C^\infty((0, T); L^2(\Omega))$.

6. Sei $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ mit $u_t \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Dann gilt:

- (a) $|\nabla u| \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$.
- (b) $u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$.
- (c) $u \in C^1((0, T); H_0^1(\Omega))$.

7. Sei u eine klassische Lösung von $u_t - \Delta u \leq 0$ in $G = \Omega \times (0, T)$. Dann folgt

- (a) $\sup_G u = \max\{\sup_{\Omega} u(\cdot, 0), \sup_{\partial\Omega \times (0, T)} u\}$.
- (b) $\sup_G u = \sup_{\partial\Omega} u(t)$ für alle $t \in (0, T)$.
- (c) $\sup_G |u| = \max\{\sup_{\Omega} |u(\cdot, 0)|, \sup_{\partial\Omega \times (0, T)} |u|\}$.

Kapitel 7

1. Sei $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$. Dann lautet die klassische Lösung von $u_{tt} = u_{xx}$ in \mathbb{R}^2 , $u(\cdot, 0) = u_0$, $u_t(\cdot, 0) = 0$:

(a) $u(x, t) = u_0(x - t) + u_0(x + t)$.

(b) $u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x - t) + u_0(x + t))$.

(c) $u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_0(s) ds$.

2. Eine Fundamentallösung von $L(u) = u_{tt} - u_{xx}$ ist gegeben durch

(a) $U_0(x, t) = f(t - x)$ für beliebiges $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(b) $U_0(x, t) = \frac{1}{2}(\delta_{x-t} + \delta_{x+t})$.

(c) $U_0(x, t) = \frac{1}{2}H(t - |x|)$ mit der Heaviside-Funktion H .

3. Eine Lösung von $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t)$ in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, wobei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$, ist gegeben durch

(a) $u(x, t) = f(x - t, x + t)$.

(b) $u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(\xi, t) d\xi$.

(c) $u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(\xi, s) d\xi ds$.

4. Seien $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ und u eine Lösung von $u_{tt} - \Delta u = 0$ in $\Omega \times (0, \infty)$, $u(\cdot, 0) = u_0$ und $u_t(\cdot, 0) = u_1$ in Ω . Dann gilt

(a) $u \in C^0(\mathbb{R}; H^2(\Omega))$.

(b) $u \in C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$.

(c) $u \in C^1(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega))$.

Literatur

- [1] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [2] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Fünfte Auflage, Springer, Berlin, 2006.
- [3] H. Amann und J. Escher. *Analysis III*. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [4] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983.
- [5] T. Cazenave. *Semilinear Schrödinger Equations*. Amer. Math. Soc., Providence, 2003.
- [6] P. Ciarlet. Basic error estimates for elliptic problems. In: *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. 2, P. Ciarlet und J.L. Lions (Editoren). Elsevier, 1991.
- [7] L. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, Providence, 2002.
- [8] D. Gilbarg und N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin, 1977.
- [9] C. Großmann und H. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [10] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*. Bände 1 und 2. Springer, Berlin, 2003 und 2004.
- [11] O A. Ladyzenskaya, V. A. Solonnikov und N. N. Ural'ceva. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. American Mathematics Society, Providence, 1968.
- [12] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1973.
- [13] G. M. Troianiello. *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems*. Plenum Press, New York, 1987.
- [14] K. Yoshida. *Functional Analysis*. Springer, Berlin, 1965.

Lösungen der Fragen:

Kapitel 1: 1a, 2a, 2b, 3b, 4b.

Kapitel 3: 1a, 1c, 2a, 2c, 3a, 3b, 4a, 4c, 5b, 6c.

Kapitel 4: 1b, 2a, 3b, 3c, 4a, 4c, 5b.

Kapitel 5: 1b, 1c, 2b, 3b, 3c, 4a, 4b, 5a, 6c.

Kapitel 6: 1a, 2c, 3b, 3c, 4a, 5b, 5c, 6a, 6b, 7a.

Kapitel 7: 1b, 2c, 3c, 4b, 4c.