TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

März 2020

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

Vorlesungsmanusskript

Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel
Institut für Analysis und Scientific Computing

Dieses Manuskript basiert zum Teil auf dem Vorlesungsmanuskript “Nichtlineare partielle Differentialgleichungen” von Prof. Dr. A. Arnold bzw. auf dem Buch “Partielle Differentialgleichungen” von L. Evans.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen kann eine Vielzahl von Prozessen aus den Natur- und sogar Wirtschaftswissenschaften beschrieben werden. Bei einer realistischen Modellierung sind die Differentialgleichungen in der Regel nichtlinear. Im Gegensatz zu linearen partiellen Differentialgleichungen können nichtlineare partielle Differentialgleichungen nicht auf einfache Weise klassifiziert werden. Daher sind viele verschiedene, spezielle Techniken notwendig, um die Wohlgestelltheit von Randwert- und Anfangsrandwertproblemen und das qualitative Verhalten ihrer Lösungen zu untersuchen. In dieser Vorlesung werden typische Strategien für semilineare und quasilineare Gleichungen vorgestellt. Wir beginnen mit der Präsentation einiger nichtlinearer Gleichungen, die untersucht werden sollen.

1.1 Beispiele

Flüssigkeit in einem porösen Medium. Wir wollen eine Gleichung herleiten, die die Evolution einer Flüssigkeit in einem porösen Medium beschreibt. Beispiele sind das Eindringen von Wasser in einen Deich oder die Bewegung von Grundwasser in einer Gesteinsschicht. Wir suchen also eine Gleichung für die Flüssigkeitsdichte $n(x,t)$. Nehmen wir Massenerhaltung an, so erfüllt n die Erhaltungsgleichung

$$n_t + \operatorname{div}(nv) = 0,$$

wobei v die Durchschnittsgeschwindigkeit der Flüssigkeit bezeichnet. Hier und im folgenden betrachten wir ausschließlich dimensionslose, skalierte Gleichungen. Die obige Gleichung heißt Erhaltungsgleichung, weil sie impliziert, dass die Gesamtmasse $\int_{\mathbb{R}^3} n dx$ zeitlich konstant ist, also erhalten bleibt. Wir nehmen weiter an, dass die Geschwindigkeit v proportional zum Gradienten des Drucks p ist. Dies ist das sogenannte *Darcy-Gesetz*:

$$v = -k\nabla p,$$

und $k > 0$ hängt von der Viskosität der Flüssigkeit und der Permeabilität des Mediums ab. Die dritte Annahme lautet, dass der Druck über die folgende Zustandsgleichung gegeben ist:

$$p = n^\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Setzen wir die drei Gleichungen zusammen, erhalten wir die *Poröse-Medien-Gleichung*

$$n_t - \operatorname{div}\Big(\frac{k\gamma}{\gamma+1}\nabla n^{\gamma+1}\Big) = 0.$$

Schreiben wir sie in der Form

$$n_t - \operatorname{div}(D(n)\nabla n) = 0 \quad \text{mit } D(n) = k\gamma n^\gamma,$$

so sehen wir, dass es sich um eine *quasilineare parabolische Gleichung* handelt. Sie wird im allgemeinen in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gelöst und wird vervollständigt durch Rand- und Anfangsbedingungen, zum Beispiel

$$n = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,\ t > 0, \quad n(\cdot, 0) = n_0 \quad \text{in } \Omega.$$

Die Funktion $D(n)$ kann als ein dichteabhängiger Diffusionskoeffizient interpretiert werden. Die Diffusivität wird umso größer, je größer die Flüssigkeitsdichte ist. Der Differentialoperator $L(u) = -\mathrm{div}(D(n)\nabla n)$ ist *nicht* gleichmäßig elliptisch, denn die Diffusivität verschwindet, wenn $n = 0$. Daher gehört die Poröse-Medien-Gleichung zur Klasse der *degeneriert parabolischen Differentialgleichungen*. Ist die Diffusivität konstant, $D(n) = D_0$, so erhalten wir die Wärmeleitungsgleichung $u_t - D_0\Delta n = 0$. Im Gegensatz zu dieser Gleichung besitzt die Poröse-Medien-Gleichung eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Physikalisch bedeutet dies, dass sich von der Flüssigkeit gesättigte Gebiete mit endlicher Geschwindigkeit in dem Medium ausbreiten.

Inkompressible Flüssigkeiten und Gase. Sei eine Flüssigkeit oder ein Gas mit Teilchendichte $n(x,t)$ und mittlerer Geschwindigkeit $v(x,t)$ gegeben. Die Gleichung

$$n_t + \mathrm{div}(nv) = 0 \tag{1.1}$$

beschreibt die Erhaltung der Teilchendichte. Der Teilchenstrom wird durch die Stromdichte nv beschrieben, die der folgenden Gleichung genügt:

$$(nv)_t + \mathrm{div}(nv \otimes v) + \nabla p = F(v), \tag{1.2}$$

wobei $v \otimes v$ eine Matrix mit den Komponenten $v_i v_j$ und p der Druck der Flüssigkeit ist. Falls $F(v) = 0$, so handelt es sich bei den beiden obigen Gleichungen um die *Euler-Gleichungen*. Sie gelten für dünne Gase wie etwa Luft. Die Differentialgleichungen sind dann von erster Ordnung und fallen in die Klasse der hyperbolischen Erhaltungsgleichungen (denn Gesamtteilchendichte und Gesamtstromdichte sind zeitlich konstant), die wir im folgenden nicht betrachten wollen. Flüssigkeiten wie Wasser oder Öl sind viskos, wir erwarten also diffusive Terme in der Gleichung für den Teilchenstrom. Man kann zeigen, dass in diesem Fall

$$F(v) = (\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{div}\, v) + \mu\Delta v$$

ist, wobei λ und $\mu > 0$ Flüssigkeitskonstanten sind und der Laplace-Operator auf die vektorwertige Funktion v komponentenweise zu betrachten ist (Δv ist also wieder ein Vektor). Mit diesem Ausdruck werden (1.1) und (1.2) *Navier-Stokes-Gleichungen* genannt. Die mathematische Behandlung dieser Gleichungen ist sehr anspruchsvoll und wir begnügen uns mit dem Spezialfall einer *stationären, homogenen Flüssigkeit*. Wegen der Stationärität fallen die zeitlichen Ableitungen weg. Homogenität bedeutet, dass die Teilchendichte räumlich konstant ist. Beide Voraussetzungen implizieren, dass $n(x,t) = n_0$

eine Konstante ist. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $n_0 = 1$ und $\mu = 1$ gilt. In diesem Fall können wir (1.1) und (1.2) vereinfachen. Wir erhalten:

$$\operatorname{div}(v \otimes v) + \nabla p = \Delta v, \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Wegen $\operatorname{div}(v \otimes v) = (\operatorname{div} v)v + (v \cdot \nabla)v = (v \cdot \nabla)v$ erhalten wir die stationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$(v \cdot \nabla)v + \nabla p = \Delta v, \quad \operatorname{div} v = 0,$$

wobei die Komponenten des Vektors $(v \cdot \nabla)v$ durch $\sum_i v_i \partial_i v_j$ mit $\partial_i = \partial/\partial x_i$ gegeben sind. Man nennt Δv einen diffusiven Term und $(v \cdot \nabla)v$ einen konvektiven Term. Die Navier-Stokes-Gleichungen sind wegen des konvektiven Terms nichtlinear. Die Gleichungen werden in einem Gebiet Ω gelöst. Typische Randbedingungen sind $v = 0$ auf $\partial\Omega$ (die Flüssigkeit ruht am Rand) oder $v \cdot \nu = 0$ auf $\partial\Omega$ (der Rand ist isolierend, keine Flüssigkeit geht hindurch), wobei ν der Einheitsnormalenvektor auf $\partial\Omega$ ist. Flüssigkeiten mit der Eigenschaft $\operatorname{div} v = 0$ werden *inkompressibel* genannt.

Reaktion von Chemikalien. Die Konzentration einer Chemikalie in einem Gebiet Ω kann beschrieben werden durch die Gleichung

$$u_t - \Delta u = R_+ + R_-.$$

Wir haben angenommen, dass die Diffusivität konstant ist. Die Funktion R_+ beschreibt Quellen, R_- Senken in dem Gebiet. Wir nehmen an, dass die Chemikalie mit der konstanten Rate $R_+ = R_0 > 0$ erzeugt wird und die Senke quadratisch von der Dichte abhängt, $R_- = -u^2 \leq 0$. Dies modelliert zum Beispiel binäre Reaktionen, bei denen die Chemikalie umgewandelt wird. Kann die Chemikalie den Rand des Gebiets nicht durchdringen, so können wir homogene Neumann-Randbedingungen verwenden:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,\ t > 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \Omega.$$

Zur Zeit $t = 0$ habe die Chemikalie die Dichte u_0. Bei diesem Anfangsrandwertproblem handelt es sich um eine *semilineare parabolische Gleichung*. Man nennt Gleichungen vom Typ

$$u_t - \Delta u = f(x, u)$$

auch *Reaktions-Diffusionsgleichungen*.

Was geschieht für $t \to \infty$? Wir erwarten, dass sich die Konzentration für große Zeiten nicht mehr ändert, $u_t = 0$, so dass das Problem

$$-\Delta u = R_0 - u^2 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

zu lösen ist. Sie besitzt die Lösung $u_\infty = \sqrt{R_0}$. In der Chemie ist von Interesse, wie schnell $u(\cdot, t)$ gegen die stationäre Lösung konvergiert. Es kann etwa gefragt werden, ob und in welchem Sinne die Ungleichung

$$\|u(\cdot, t) - u_\infty\| \leq \|u_0\| e^{-\lambda t}$$

erfüllt und wie groß die Konvergenzrate $\lambda > 0$ ist.

Elektronen in einem Halbleiter I. Die Bewegung von geladenen Teilchen wie Elektronen in einem Halbleitermaterial kann klassisch durch einen Diffusionsstrom beschrieben werden, der durch Änderungen der Teilchenkonzentration n zustande kommt, und des Driftstroms, der durch das elektrische Feld erzeugt wird. Die totale Teilchenstromdichte kann also beschrieben werden durch

$$J = \nabla n - n \nabla \phi,$$

wobei ϕ das elektrische Potential und $-\nabla \phi$ das elektrische Feld bedeuten. Die Evolution der Elektronendichte können wir durch die Massenerhaltungsgleichung

$$n_t - \operatorname{div} J = 0$$

beschreiben. Im folgenden sind wir nur an stationären Lösungen interessiert und setzen daher $n_t = 0$. Dann ist J Lösung von

$$\operatorname{div} J = 0.$$

Das elektrische Potential ist die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi = n - f(x),$$

wobei $f(x)$ gegebene Ladungen im Halbleiter sind und $n - f$ die totale Ladungsdichte ist. Das Paar (n, ϕ) ist also Lösung des Gleichungssystems

$$\operatorname{div}(\nabla n - n \nabla \phi) = 0, \quad \Delta \phi = n - f(x)$$

im Halbleitergebiet Ω. Dies ist ein System von *nichtlinearen elliptischen Gleichungen*, dem sogenannten stationären Drift-Diffusionsmodell. Wir nehmen an, dass auf dem Rand des Gebiets die Elektronendichte und das elektrische Potential (bzw. die angelegte Spannung) bekannt seien:

$$n = g, \quad \phi = \psi \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

In der Elektrotechnik ist die Funktion $\psi \mapsto \int_K J \cdot \nu ds$ von Interesse. Es wird also eine Spannung angelegt und nach dem Stromfluss durch den Kontakt $K \subset \partial\Omega$ gefragt. Dies ergibt die sogenannte Strom-Spannungskennlinie, die das Halbleiterbauteil charakterisiert.

Elektronen in einem Halbleiter II. Elektronen sind eigentlich quantenmechanische Objekte und werden durch sogenannte komplexwertige Wellenfunktionen $\psi(x,t)$ beschrieben. Das Integral
$$\int_\Omega |\psi(x,t)|^2 dx$$
wird in der Quantenmechanik als die Wahrscheinlichkeit interpretiert, dass sich das Elektronenensemble zur Zeit t im Gebiet Ω befindet. Es wird postuliert, dass die Wellenfunktion die *Schrödinger-Gleichung*
$$\mathrm{i}\psi_t + \Delta\psi - V(x,t)\psi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad \psi(\cdot,0) = \psi_0,$$
erfüllt. Hierbei ist $V(x,t)$ ein gegebenes reellwertiges Potential, zum Beispiel das Potential der Atome in einem Halbleiter oder die angelegte Spannung an den Halbleiter. Die Schrödinger-Gleichung ist weder elliptisch noch parabolisch oder hyperbolisch. Wir werden sehen, dass sie Eigenschaften einer Wellengleichung besitzt (die Elektronen werden in gewisser Weise durch eine "Welle" beschrieben), aber auch gewisse regularisierende Effekte besitzt, wie wir sie – im Gegensatz zur Wellengleichung – bei den elliptischen und parabolischen Gleichungen kennengelernt haben.

Wir können einen einfachen Bezug zu den fluiddynamischen Gleichungen herstellen, indem wir den Ausdruck $|\psi|^2$ formal nach der Zeit differenzieren. Wir erhalten
$$\begin{aligned}\partial_t|\psi|^2 &= \partial_t(\overline{\psi}\psi) = \partial_t\overline{\psi}\cdot\psi + \overline{\psi}\cdot\partial_t\psi = (-\mathrm{i}\Delta\overline{\psi} + \mathrm{i}V\overline{\psi})\psi + \overline{\psi}(\mathrm{i}\Delta\psi - \mathrm{i}V\psi) \\ &= -\mathrm{i}\,\mathrm{div}(\nabla\overline{\psi}\psi - \overline{\psi}\nabla\psi) = -2\mathrm{div}\,\mathrm{Im}(\overline{\psi}\nabla\psi),\end{aligned}$$
denn $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Definieren wir $J = -2\mathrm{Im}(\overline{\psi}\nabla\psi)$, so erhalten wir
$$\partial_t|\psi|^2 - \mathrm{div} J = 0.$$
Dies ist gerade die Erhaltungsgleichung für die Teilchendichte $n = |\psi|^2$.

Die obige Schrödinger-Gleichung ist linear. In einigen Anwendungen (z.B. in der Optik) treten jedoch auch nichtlineare Gleichungen der Form
$$\mathrm{i}\psi_t + \Delta\psi \pm |\psi|^\alpha\psi = 0$$
auf, wobei der Wert von $\alpha > 0$ von der Anwendung abhängt. Ein typisches Beispiel ist die kubische Schrödinger-Gleichung mit $\alpha = 2$. Die obige Gleichung ist wegen des Terms $|\psi|^\alpha\psi$ semilinear. Je nach Wahl des Vorzeichens und α existiert eine Lösung für alle Zeiten oder sie wird nach endlicher Zeit unbeschränkt. Wir untersuchen dies genauer in Abschnitt 4.2.

Minimalflächen. Eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ sei durch die Funktion $u(x_1,x_2)$ beschrieben, d.h., sie ist gleich der Menge $F = \{(x_1,x_2,u(x_1,x_2)) : (x_1,x_2) \in \Omega\}$. Aus der Differentialgeometrie ist bekannt, dass die Oberfläche von F durch
$$S(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$$

beschrieben wird. Gesucht ist die Fläche minimalen Inhalts, die die Randbedingung $u = g$ auf $\partial\Omega$ erfüllt. Seifenhäute etwa werden durch solche Minimalflächen beschrieben. Man kann im Rahmen der Variationsrechnung zeigen, dass die Funktion u die folgende Minimalflächengleichung erfüllt:

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\Big) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Diese Gleichung ist quasilinear (denn der Diffusionskoeffizient hängt von ∇u ab) und elliptisch, denn wir können die Gleichung nach einer kleinen Rechnung mit $x := x_1$ und $y := x_2$ schreiben als

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0.$$

Die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1+u_y^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & 1+u_x^2 \end{pmatrix}$$

besitzt positive Eigenwerte, d.h., die obige Gleichung ist elliptisch. Es handelt sich also um eine *quasilineare elliptische Gleichung* vom Typ

$$\operatorname{div} a(\nabla u) = 0.$$

In der Differentialgeometrie ist der Ausdruck $\frac{1}{2}\operatorname{div}(\nabla u/\sqrt{1+|\nabla u|^2})$ gleich der mittleren Krümmung der Fläche F. Minimalflächen besitzen also eine verschwindende mittlere Krümmung.

Weitere nichtlineare Gleichungen. Die oben vorgestellten Differentialgleichungen sind allesamt von zweiter Ordnung, d.h., die höchste auftretende Ableitung ist von zweiter Ordnung. Gleichungen erster Ordnung sind beispielsweise *hyperbolische Erhaltungsgleichungen* der Form

$$u_t + \operatorname{div} F(u) = 0$$

oder *Hamilton-Jacobi-Gleichungen*

$$u_t + F(\nabla u) = 0.$$

Gleichungen dritter Ordnung wie zum Beispiel die *Korteweg-de-Vries-Gleichung*

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0$$

benötigen spezielle Techniken, die wir hier nicht betrachten. Der Grund, warum sich diese Gleichungen im allgemeinen stark von Gleichungen zweiter Ordnung unterscheiden und daher andere analytische Techniken benötigen, liegt darin, dass letztere Gleichungen gewisse diffusive Effekte zeigen, die für eine Regularität der Lösungen sorgen.

(Eine Ausnahme ist die Schrödinger-Gleichung, die aber dennoch schwach regularisiert.) Allerdings sind diffusive Effekte nicht auf Probleme zweiter Ordnung beschränkt, und wir werden exemplarisch eine nichtlineare Gleichung vierter Ordnung betrachten, die eine logarithmische Nichtlinearität enthält, nämlich die *Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn-Gleichung*

$$u_t + (u(\ln u)_{xx})_{xx} = 0.$$

Sie beschreibt die Teilchendichte von Elektronen in einem speziellen Halbleiter oder den Grenzwert einer Zufallsvariablen, die Teilchensysteme mit Spin modelliert.

Für die oben vorgestellten Gleichungen und deren Verallgemeinerungen werden wir die folgenden Fragestellungen untersuchen:

- Besitzt das Problem eine Lösung und wenn ja, ist sie eindeutig?
- Hängt die Lösung stetig von den gegebenen Daten (Koeffizienten, Randdaten, Anfangswert) ab?
- Ist die Lösung regulär, wenn die gegebenen Daten regulär sind?
- Wie verhält sich die Lösung von Evolutionsgleichungen für große Zeiten?

1.2 Sobolevräume

In diesem Abschnitt wiederholen und vertiefen wir einige Aspekte über Sobolevräume. Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) eine offene Menge.

Definition 1.1. *Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$. Der* Sobolevraum $W^{m,p}(\Omega)$ *ist die Menge aller Funktionen $u \in L^p(\Omega)$, so dass*

$$D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \text{für alle } |\alpha| \leq m,$$

wobei α ein Multiindex und $D^\alpha u$ die entsprechende partielle Ableitung von u im Sinne der Distributionen sind.

Genau genommen besteht $W^{m,p}(\Omega)$ aus Äquivalenzklassen von Funktionen, die bis auf Nullmengen übereinstimmen. Auf $W^{m,p}(\Omega)$ ist die Norm

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}, \quad \text{falls } p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \text{falls } p = \infty,$$

definiert. Mit dieser Norm ist $W^{m,p}(\Omega)$ ein Banachraum. Im Falle $m = 0$ schreiben wir $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ und für $p = 2$ setzen wir $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Dieser Raum ist mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

ein Hilbertraum.

Definition 1.2. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$. Der* Sobolevraum $W_0^{m,p}(\Omega)$ *ist der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.*

Der Raum $W_0^{m,p}(\Omega)$ ist ebenfalls ein Banachraum und $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$ ist mit dem oben erwähnten Skalarprodukt ein Hilbertraum. Wir benötigen einige Eigenschaften von $W^{m,p}(\Omega)$ und $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Theorem 1.3 (Dichtheit). *Seien $1 \leq p < \infty$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$ und $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $W_0^{m,p}(\Omega)$. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ ($C^{0,1}$ genügt), so ist $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{m,p}(\Omega)$.*

Für einen Beweis verweisen wir auf Evans [10], Abschnitte 5.3.2 und 5.3.3.

Theorem 1.4 (Einbettungssatz von Sobolev). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ ($C^{0,1}$ genügt) und $1 \leq p, q < \infty$, $k, m \in \mathbb{N}_0$ mit $m > k$.*

(i) *Die Einbettung $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$ ist stetig, wenn $m - n/p \geq k - n/q$, und kompakt, wenn $m - n/p > k - n/q$.*

(ii) *Die Einbettung $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$ ist kompakt, wenn $m - n/p > k$.*

Für beliebige beschränkte Gebiete gelten beide Aussagen für $W_0^{m,p}(\Omega)$ anstatt $W^{m,p}(\Omega)$.

Der Satz ist z.B. in Alt [2, Abschnitt 8.9] oder Gilbarg-Trudinger [11, Theorem 7.26] bewiesen. In gewisser Weise charakterisiert die Zahl $m - n/p$ die Regularität von $W^{m,p}$-Funktionen. Um Einbettungen der Form $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ kompakt formulieren zu können, führen wir die folgende Notation ein. Seien die Intervalle

$$N^* = \begin{cases} [1, \frac{2n}{n-2}] & : n \geq 3, \\ [1, \infty) & : n = 2, \\ [1, \infty] & : n = 1, \end{cases} \quad , \quad N_* = \begin{cases} [\frac{2n}{n+2}, \infty) & : n \geq 3, \\ (1, \infty) & : n = 2, \\ [1, \infty) & : n = 1 \end{cases} \tag{1.3}$$

gegeben. Dann ist die Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ stetig für alle $p \in N^*$. Wir sagen, dass (p, q) ein *zulässiges Paar* ist, wenn $p \in N^*$ und $1/p + 1/q = 1$ gilt. Nach Konstruktion ist dann automatisch $q \in N_*$. Der Vorteil dieser Notation ist, dass für zulässige Paare (p, q) das Produkt fg der Funktionen $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^q(\Omega)$ nach der Hölder-Ungleichung integrierbar ist: $fg \in L^1(\Omega)$.

Ähnlich wie für H^1-Funktionen können wir für Funktionen u aus $W^{1,p}(\Omega)$ die Spur $u|_{\partial\Omega}$ definieren (siehe z.B. Alt [2, Satz A6.6]).

Theorem 1.5 (Spur von Sobolevfunktionen). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ ($C^{0,1}$ genügt) und $1 \leq p < \infty$. Dann existiert genau eine stetige lineare Abbildung,* *genannt die* Spur *(engl.: trace),* $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ *mit der Eigenschaft*

$$\gamma(u) = u|_{\partial\Omega} \quad \text{für alle } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

Mit Hilfe des Spursatzes können wir $W_0^{1,p}$-Funktionen ähnlich wie H_0^1-Funktionen charakterisieren.

Theorem 1.6 (Charakterisierung von $W_0^{1,p}$-Funktionen). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ ($C^{0,1}$ genügt), $1 \le p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \gamma(u) = 0.$$

Die Poincaré-Ungleichung gilt allgemein für $W_0^{1,p}$-Funktionen (siehe Evans [10, Abschnitt 5.8.1]).

Theorem 1.7 (Poincaré-Ungleichung). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ ($C^{0,1}$ genügt) und $1 \le p < \infty$. Dann existiert eine Konstante $C_P > 0$, so dass für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C_P \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

1.3 Konvergenz und Kompaktheit

In endlichdimensionalen Räumen besitzen beschränkte Folgen konvergente Teilfolgen. In unendlichdimensionalen Räumen gilt dieses Resultat im allgemeinen nicht. Das Fehlen von Kompaktheit führt in der Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen häufig zu Problemen. Um diese zu überwinden, kann das Konzept der schwachen Konvergenz verwendet werden. Wir geben im folgenden einige Resultate aus der Funktionalanalysis ohne Beweis. Beweise können in Zeidler [23, Kapitel 21] gefunden werden.

Sei B stets ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$. Wir erinnern zuerst an die Definition des Dualraums. Er ist definiert durch $B' = \{f : B \to \mathbb{R} : f \text{ ist linear und stetig}\}$. Die Norm in B' ist definiert durch

$$\|f\|_{B'} = \sup_{\|u\| \le 1} |f(u)|.$$

Wir schreiben auch $\langle f, u \rangle_{B'}$ anstatt $f(u)$. Beispielsweise kann der Dualraum von $L^p(\Omega)$ mit $L^q(\Omega)$ identifiziert werden, wobei $1 \le p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$. Wir benötigen später folgendes Resultat.

Proposition 1.8. *Seien B und X Banachräume mit stetiger und dichter Einbettung $B \hookrightarrow X$. Dann ist die Einbettung $X' \hookrightarrow B'$ stetig. Ist weiterhin X reflexiv, so ist X' dicht in B'.*

Der Beweis ist in Zeidler [23, Problem 18.6] zu finden. Wir wenden diese Proposition auf $X = L^p(\Omega)$ und $B = H_0^1(\Omega)$ an, wobei $p \in N^*$, und erhalten

$$L^q(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))', \quad q \in N_*, \ 1/p + 1/q = 1. \tag{1.4}$$

Falls $n = 3$, können wir $q \geq 6/5$ wählen; im Falle $n = 2$ ist $q > 1$ möglich; für $n = 1$ ist auch $q \geq 1$ zulässig.

Definition 1.9. *Eine Folge* $(u_k) \subset B$ *heißt* schwach konvergent *gegen ein* $u \in B$, *wenn für alle* $F \in B'$ *gilt:*

$$\langle F, u_k \rangle_{B'} \to \langle F, u \rangle_{B'} \quad \text{für } k \to \infty.$$

Wir schreiben in diesem Fall:

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{für } k \to \infty.$$

Beispiel 1.10. Wir behaupten, dass die Folge (u_k), definiert durch $u_k(x) = \sin(kx)/\pi$, in $L^2(0, 2\pi)$ schwach gegen null konvergiert. Sei $f \in (L^2(0, 2\pi))' = L^2(0, 2\pi)$. Dann sind durch

$$\langle f, u_k \rangle_{L^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kx) f(x) dx$$

gerade die Fourier-Koeffizienten von f gegeben. Nach dem Satz von Riemann-Lebesgue gilt aber, dass diese Koeffizienten für $k \to \infty$ gegen null konvergieren. Dies bedeutet, dass $u_k \rightharpoonup 0$ in $L^2(0, 2\pi)$. Andererseits ist u_k *nicht* stark konvergent in $L^2(0, 2\pi)$, denn

$$\|u_k - 0\|^2_{L^2(0,2\pi)} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin^2(kx) dx = \frac{1}{\pi} \neq 0.$$

Dies zeigt, dass aus schwacher Konvergenz im allgemeinen *nicht* starke Konvergenz folgt. Beachte, dass die Folge (u_k) weder punktweise noch fast überall in $(0, 2\pi)$ konvergiert. □

Das Konzept der schwachen Konvergenz erweist sich als brauchbar, denn es gilt das folgende Resultat, das ein Spezialfall des Satzes von Alaoglu ist (Beweis siehe Zeidler [23], Theorem 21.D).

Theorem 1.11 (Eberlein-Šmuljan). *Jede beschränkte Folge in einem reflexiven Banachraum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.*

Wir erinnern, dass reflexive Banachräume B über die Eigenschaft $B'' = B$ definiert sind. Der Lebesgue-Raum $L^p(\Omega)$ ist genau dann reflexiv, wenn $1 < p < \infty$. Der Raum $L^p(\Omega)$ ist genau dann separabel (d.h. enthält eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge), wenn $1 \leq p < \infty$. Es ist also $L^1(\Omega)$ zwar separabel, aber nicht reflexiv; es gilt

$(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$. Der Raum $L^\infty(\Omega)$ is weder separabel noch reflexiv; sein Dualraum $(L^\infty(\Omega))'$ kann identifiziert werden mit der Menge der beschränkten, endlich additiven, signierten Maße, die bezüglich des Lebesgue-Maßes absolut stetig sind. Er enthält den Raum $L^1(\Omega)$, d.h. $L^1(\Omega) \subset (L^\infty(\Omega))'$, und die Inklusion ist strikt.

Schwach konvergente Folgen besitzen die folgenden Eigenschaften (siehe Zeidler [23, Prop. 21.23], Emmrich [9, Satz A.2.17]).

Proposition 1.12 (Eigenschaften schwacher Konvergenz). *Sei B ein Banachraum.*

(i) *Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.*

(ii) *Wenn* $\dim B < \infty$, *dann impliziert schwache Konvergenz starke Konvergenz.*

(iii) *Satz von Banach-Steinhaus: Gilt $u_k \rightharpoonup u$ $(k \to \infty)$ für eine Folge $(u_k) \subset B$, so ist (u_k) beschränkt und*

$$\|u\| \le \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|.$$

(iv) *Sei B reflexiv. Haben alle schwach konvergenten Teilfolgen einer beschränkten Folge $(u_k) \subset B$ denselben Grenzwert $u \in B$, so konvergiert die gesamte Folge (u_k) schwach gegen u. Diese Aussage gilt auch für starke Konvergenz.*

Teil (iv) kann übrigens verschärft werden: Ist B ein topologischer Raum, so konvergiert (u_k) gegen $u \in B$ genau dann, wenn jede Teilfolge von (u_k) eine Teilteilfolge besitzt, die gegen denselben Grenzwert $u \in B$ konvergiert.

Bemerkung. Sei (u_k) eine schwach konvergente Folge, $u_k \rightharpoonup u$ in B und $f : B \to B$ eine stetige Funktion. Ist dann auch die Bildfolge $(f(u_k))$ (schwach) konvergent, $f(u_k) \rightharpoonup f(u)$ in B? Die Antwort ist im allgemeinen negativ. Seien beispielsweise $u_k(x) = \sin(kx)$, $x \in (0, 2\pi)$, und $f(x) = |x|$. Aus Beispiel 1.10 wissen wir, dass $u_k \rightharpoonup 0$ in $L^2(0, 2\pi)$. Andererseits kann *nicht* $|u_k| \rightharpoonup 0$ in $L^2(0, 2\pi)$ gelten, denn zum Beispiel gilt für $\phi(x) = 1$:

$$\int_0^{2\pi} |\sin(kx)| \cdot 1 dx = \frac{1}{k} \int_0^{2\pi k} |\sin y| dy = \int_0^{2\pi} |\sin y| dy = 4,$$

und das Integral konvergiert nicht gegen null.

In nichtreflexiven (aber separablen) Banachräumen (wie z.B. $L^1(\Omega)$) kann ein zum Satz von Eberlein-Šmuljan vergleichbares Resultat mit Hilfe des Konzeptes der schwach* Konvergenz bewiesen werden. Dies ist von Bedeutung, wenn Beschränktheit in $L^\infty(\Omega)$ vorliegt, wofür Satz 1.11 nicht gilt.

Definition 1.13. *Eine Folge $(F_k) \subset B'$ heißt* schwach* konvergent *gegen $F \in B'$, wenn für alle $u \in B$ gilt:*

$$\langle F_k, u \rangle_{B'} \to \langle F, u \rangle_{B'} \quad \text{für } k \to \infty.$$

Wir schreiben in diesem Fall:

$$F_k \rightharpoonup^* F \quad \text{für } k \to \infty.$$

Theorem 1.14. *Sei B ein separabler Banachraum. Jede beschränkte Folge in B' besitzt eine schwach* konvergente Teilfolge.*

Für einen Beweis verweisen wir auf Zeidler [23, Abschnitt 21.8]. Sei (u_k) eine beschränkte Folge in $L^\infty(\Omega)$ und $B = L^1(\Omega)$. Wegen $(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$ existiert also eine Teilfolge $(u_{k'})$, so dass $u_{k'} \rightharpoonup^* u$ in $L^\infty(\Omega)$, d.h.

$$\int_\Omega u_{k'} v dx \to \int_\Omega uv dx \quad \text{für alle } v \in L^1(\Omega).$$

Proposition 1.15 (Eigenschaften von schwach* Konvergenz). *Sei B ein separabler Banachraum.*

(i) *Starke Konvergenz impliziert schwach* Konvergenz.*

(ii) *Für reflexive Banachräume sind schwache Konvergenz und schwach* Konvergenz äquivalent.*

(iii) *Satz von Banach-Steinhaus: Gilt $u_k \rightharpoonup^* u$ $(k \to \infty)$ für eine Folge $(u_k) \subset B'$, so ist (u_k) beschränkt und*

$$\|u\|_{B'} \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{B'}.$$

(iv) *Wenn $u_k \rightharpoonup^* u$ in B' und $v_k \to v$ in B oder wenn $u_k \to u$ in B' und $v_k \rightharpoonup v$ in B, dann folgt*

$$\langle u_k, v_k \rangle_{B'} \to \langle u, v \rangle_{B'} \quad \text{für } k \to \infty.$$

Ist (u_k) eine beschränkte Folge in $L^1(\Omega)$, so können weder Satz 1.11 noch Satz 1.14 angewendet werden. Im allgemeinen folgt auch nicht, dass eine schwach konvergente Teilfolge existiert. Diese Aussage ist nur unter Zusatzvoraussetzungen richtig. Nach dem *Satz von Dunford-Pettis* gilt (siehe Ekeland/Temam [8, Theorem 1.3]):

> Ist $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion mit $\lim_{x\to\infty} \phi(x)/x = \infty$ und gilt $\sup_k \int_\Omega \phi(|u_k|)dx < \infty$, so existiert eine in $L^1(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge von (u_k).

Wählen wir $\phi(x) = |x|^\alpha$ mit $\alpha > 1$, so folgt also aus der Beschränktheit von $\|u_k\|_{L^\alpha(\Omega)}$ die Existenz einer Teilfolge $(u_{k'})$ mit $u_{k'} \rightharpoonup u$ in $L^1(\Omega)$.

Abschließend erinnern wir an den Satz über die majorisierte Konvergenz (oder Satz von Lebesgue) und dessen "Umkehrung".

Theorem 1.16 (Satz über die majorisierte Konvergenz). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ eine offene Menge und $(f_k) \subset L^1(\Omega)$ eine Folge.*

(i) *Gilt $f_k \to f$ fast überall in Ω für $k \to \infty$ und existiert eine Funktion $g \in L^1(\Omega)$ mit $|f_k| \leq g$ in Ω für alle k, dann folgt $f \in L^1(\Omega)$ und $f_k \to f$ in $L^1(\Omega)$.*

(ii) *Gilt* $f_k \to f$ *in* $L^1(\Omega)$*, dann existiert eine Teilfolge* $(f_{k'})$ *mit* $f_{k'} \to f$ *fast überall in* Ω *und es existiert eine Funktion* $g \in L^1(\Omega)$*, so dass* $|f_{k'}| \leq g$ *für alle* k'*.*

Der Satz ist gültig, wenn $L^1(\Omega)$ durch $L^p(\Omega)$ ersetzt wird. Hierbei ist $1 \leq p < \infty$ für Teil (i) und $1 \leq p \leq \infty$ für Teil (ii). Ein Beweis von Teil (ii) ist in Brézis [4, Théorème IV.9] zu finden.

2 Nichtlineare elliptische Gleichungen

Ziel dieses Kapitels ist die Lösung von nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen vom Typ

$$-\Delta u = f(x,u) \quad \text{und} \quad -\operatorname{div} a(\nabla u) = f(x).$$

Bei der ersten Gleichung handelt es sich um eine *semilineare* Gleichung (denn die höchste Ableitung ist linear in u), bei der zweiten Gleichung um eine *quasilineare* Gleichung, denn

$$\operatorname{div} a(\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} a_i(\partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial z_j}(\nabla u)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u.$$

Um die Existenz bzw. Eindeutigkeit von Lösungen dieser Gleichungen zu beweisen, benutzen wir zwei grundlegende Prinzipien:

- Fixpunktsätze: Die Differentialgleichung wird als Fixpunktgleichung $S(u) = u$ umformuliert und die Existenz eines Fixpunktes u wird bewiesen. Hierfür benötigen wir typischerweise Kompaktheitsresultate, die wir über sogenannte A-priori-Abschätzungen erhalten.
- A-priori-Abschätzungen: Dies sind Ungleichungen für $S(u)$, deren rechte Seite unabhängig von u sind. Die Abschätzungen erhalten wir z.B. aus Maximumprinzipien oder aus der Monotonie der Nichtlinearitäten.

2.1 Semilineare Gleichungen

Betrachte die Differentialgleichung

$$L(u) = f(x,u) \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2.1}$$

In den folgenden Abschnitten machen wir die folgenden Grundvoraussetzungen. Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, der Differentialoperator $L(u)$ ist definiert durch

$$L(u) = -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu,$$

wobei $A(x) = (a_{ij}(x))$ eine $(n \times n)$-Matrix und $c(x)$ eine Funktion seien. Ferner sei A symmetrisch und elliptisch (bzw. gleichmäßig in x positiv definit), d.h., es existiert $\alpha > 0$, so dass $\xi^T A(x)\xi \geq \alpha|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \Omega$. Außerdem gelte $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ und $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c \geq 0$ in Ω. Die Randfunktion g sei auf Ω so fortgesetzt, dass $g \in H^1(\Omega)$ gilt. Schließlich sei die Funktion f eine Carathéodory-Funktion:

Definition 2.1. *Wir nennen $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine* Carathéodory-Funktion, *wenn* (i) *für alle $u \in \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto f(x,u)$ messbar und* (ii) *für fast alle $x \in \Omega$ die Funktion $u \mapsto f(x,u)$ stetig ist.*

Unser Ziel ist der Beweis der Existenz (und Eindeutigkeit) von Lösungen von (2.1). Die Idee ist dabei wie folgt. (Im folgenden geben wir eine Motivation, mathematisch rigorose Argumente kommen später.) Wir definieren einen sogenannten *Fixpunktoperator*. Sei dafür v eine Funktion und u eine Lösung von

$$L(u) = f(x, v) \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Dies ist, für gegebenes v, eine lineare Differentialgleichung, und unter bestimmten Voraussetzungen existiert nach dem Lemma von Lax-Milgram eine eindeutige Lösung u. Dies definiert die Abbildung $S(v) = u$. Können wir nun beweisen, dass sie einen Fixpunkt u^* besitzt, d.h. $S(u^*) = u^*$, so haben wir die Existenz einer Lösung von (2.1) bewiesen, denn die Differentialgleichung für diesen Fixpunkt lautet

$$L(u^*) = f(x, u^*).$$

Unter welchen Voraussetzungen können wir die Existenz eines Fixpunktes folgern? Wir kennen bereits den Fixpunktsatz von Banach:

Theorem 2.2 (Fixpunktsatz von Banach). *Seien B ein Banachraum, $M \subset B$ eine abgeschlossene Menge und $S : M \to M$ eine Kontraktion, d.h., es existiert $k \in (0, 1)$, so dass für alle $x, y \in M$ gilt:*

$$\|S(x) - S(y)\| \le k\|x - y\|.$$

Dann besitzt S genau einen Fixpunkt.

Unter welchen Bedingungen können wir erwarten, dass der oben definierte Operator S eine Kontraktion ist? Dazu seien v_1 und v_2 zwei Funktionen und u_1 und u_2 Lösungen von

$$L(u_1) = f(x, v_1), \quad L(u_2) = f(x, v_2). \tag{2.3}$$

Wir müssen die Ungleichung

$$\|u_1 - u_2\| \le k\|v_1 - v_2\|$$

für ein $k < 1$ beweisen. Man kann begründen, dass die rechte Seite der nichtlinearen Gleichung (2.2) in einem gewissen Sinne "klein" sein muss, damit die Forderung $k < 1$ erfüllt werden kann. Dies ist unbefriedigend. Wir werden daher einen anderen Fixpunktsatz benutzen. (Der Fixpunktsatz von Banach spielt eine größere Rolle bei semilinearen parabolischen Gleichungen, siehe Abschnitt 3.2.)

Theorem 2.3 (Fixpunktsatz von Schauder). *Seien B ein Banachraum, $K \subset B$ eine kompakte und konvexe Menge und $S : K \to K$ eine stetige Abbildung. Dann besitzt S einen Fixpunkt.*

Wir erinnern, dass eine Menge K kompakt ist, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge in K besitzt. Außerdem ist K konvex, wenn für alle $u, v \in K$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt $\lambda u + (1-\lambda)v \in K$. Beachte, dass der Fixpunktsatz von Schauder nur die Existenz eines Fixpunktes garantiert, aber nicht dessen Eindeutigkeit.

Beweis. Wir geben nur die Beweisidee. Ein vollständiger Beweis findet sich in Gilbarg-Trudinger [11, Sec. 11.1]. Der Beweis basiert auf dem folgenden Fixpunktsatz:

Theorem 2.4 (Fixpunktsatz von Brouwer). *Sei $S : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ eine stetige Funktion, wobei $\overline{B_1(0)}$ die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ sei; dann existiert ein Fixpunkt von S.*

Der Satz von Brouwer wird zum Beispiel in Evans [10, Sec. 8.1.4] bewiesen.

Da K kompakt ist, existieren für gegebenes $j \in \mathbb{N}$ Punkte $x_1, \ldots, x_{N_j}$, so dass die Kugeln $B_{1/j}(x_i)$, $i = 1, \ldots, N_j$, die Menge K überdecken. Sei $K_j \subset K$ die konvexe Hülle von $\{x_1, \ldots, x_{N_j}\}$ und F_j eine Approximation der Identität mit Wertebereich in K_j. Dann ist $F_j \circ S|_{K_j}$ nach Konstruktion eine stetige Abbildung von K_j nach K_j. Nach dem Satz von Brouwer besitzt diese Abbildung einen Fixpunkt u_j, denn K_j ist endlichdimensional. Da K kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge $(u_{j'})$ gegen ein $u \in K$. Da F_j die Identität approximiert, folgt

$$\|u_{j'} - S(u_{j'})\| = \|F_{j'} \circ S(u_{j'}) - S(u_{j'})\| \to 0 \quad \text{für } j' \to \infty.$$

Da S stetig ist, erhalten wir $u = S(u)$ und damit die Behauptung. □

Das erste Existenzresultat lautet wie folgt.

Theorem 2.5 (Existenz für semilineare Gleichungen). *Es gelten die Voraussetzungen zu Beginn dieses Abschnitts. Ferner sei f eine Carathéodory-Funktion mit*

$$|f(x,u)| \le h(x) \quad \textit{für } x \in \Omega,\ u \in \mathbb{R},\ \textit{wobei } h \in L^q(\Omega),\ q \in N_*.$$

Dann existieren eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von (2.1) *und eine Konstante $C > 0$, die nur von A, c und Ω abhängt, so dass*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C\big(\|g\|_{H^1(\Omega)} + \|h\|_{L^q(\Omega)}\big). \tag{2.4}$$

Das Intervall N_* ist in (1.3) definiert. Die schwache Formulierung von (2.1) lautet: Finde $u \in H^1(\Omega)$ mit $u = g$ auf $\partial\Omega$, so dass

$$\int_\Omega (\nabla u^T A \nabla v + cuv)dx = \int_\Omega f(x,u)v dx \quad \text{für alle } v \in H^1_0(\Omega).$$

Das Integral auf der rechten Seite ist wohldefiniert. Aus der Einbettung $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ für $p \in N^*$ folgt nämlich $v \in L^p(\Omega)$ und mit der Hölder-Ungleichung ergibt sich, da $1/p + 1/q = 1$, die Beziehung $f(\cdot,u)v \in L^1(\Omega)$.

Beweis. Der Beweis gliedert sich in mehrere Schritte.

Schritt 1: Definition des Fixpunktoperators. Sei $v \in K = \{v \in L^2(\Omega) : \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq M\}$, wobei wir $M > 0$ später definieren. Die Menge K ist kompakt in $L^2(\Omega)$, denn wählen wir eine Folge $(u_k) \subset K$, so folgt aus der kompakten Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, dass eine Teilfolge $(u_{k'})$ von (u_k) existiert mit $u_{k'} \to u$ in $L^2(\Omega)$ und $u_{k'} \rightharpoonup u$ in $H^1(\Omega)$ für $k' \to \infty$. Die Grenzfunktion u liegt in K, da nach Proposition 1.12 gilt:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \liminf_{k' \to \infty} \|u_{k'}\|_{H^1(\Omega)} \leq M.$$

Also ist K kompakt.

Sei $u \in H^1(\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung des *linearen* Randwertproblems

$$L(u) = f(x,v) \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2.5}$$

Dieses Problem ist lösbar (etwa nach dem Lemma von Lax-Milgram), wenn die rechte Seite in $H^{-1}(\Omega)$ liegt. Dies ist der Fall, denn nach Voraussetzung und (1.4) gilt $|f(x,v(x))| \leq h(x) \in L^q(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ (siehe (1.4)). Dies definiert den Operator $S : K \to L^2(\Omega)$, $S(v) = u$. Es bleiben zu zeigen, dass S eine Selbstabbildung (d.h. $S : K \to K$) und stetig ist.

Schritt 2: S ist eine Selbstabbildung. Wir zeigen, dass $S(K) \subset K$. Dies ist der wichtigste Schritt im Beweis. Sei $u = S(v) \in S(K)$. Wir verwenden die Testfunktion $u - g \in H_0^1(\Omega)$ in der schwachen Formulierung (2.5):

$$\int_\Omega (\nabla u^T A \nabla(u-g) + cu(u-g))dx = \int_\Omega f(x,v)(u-g)dx. \tag{2.6}$$

Wir schätzen die linke Seite ab, indem wir die Elliptizität von A und die Youngsche Ungleichung verwenden:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\nabla u^T A \nabla(u-g) + cu(u-g))dx \\
&\quad = \int_\Omega \big(\nabla(u-g)^T A \nabla(u-g) + \nabla g^T A \nabla(u-g) + c(u-g)^2 + cg(u-g)\big)dx \\
&\quad \geq \int_\Omega \Big(\alpha|\nabla(u-g)|^2 - \frac{\alpha}{2}|\nabla(u-g)|^2 - \frac{|A|^2}{2\alpha}|\nabla g|^2 + c(u-g)^2 - \frac{c}{2}(u-g)^2 - \frac{c}{2}g^2\Big)dx \\
&\quad \geq \frac{\alpha}{2}\|\nabla(u-g)^2\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2\alpha}\|A\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Für die Abschätzung der rechten Seite von (2.6) verwenden wir die Voraussetzung an f und die Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(x,v)(u-g)dx &\leq \int_\Omega h|u-g|dx \leq \|h\|_{L^q(\Omega)}\|u-g\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\|u-g\|_{L^p(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|h\|_{L^q(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

wobei $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt $p \in N^*$, und wir schließen $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Außerdem folgt aus der Einbettung sowie der Poincaré-Ungleichung, dass

$$\|u - g\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \|u - g\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|\nabla(u - g)\|_{L^2(\Omega)}$$

mit gewissen Konstanten C_1 und C_2. Wählen wir nun $\varepsilon > 0$ hinreichend klein (z.B. $\varepsilon = \alpha/2C_2^2$), so können wir den Term $\frac{\varepsilon}{2}\|u - g\|^2_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\alpha}{4}\|\nabla(u - g)\|^2_{L^2(\Omega)}$ durch den entsprechenden Ausdruck in (2.7) absorbieren. Fassen wir also die Abschätzungen beider Seiten zusammen, erhalten wir

$$\frac{\alpha}{4}\|\nabla(u - g)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2\alpha}\|A\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla g\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|c\|_{L^\infty(\Omega)}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|h\|^2_{L^q(\Omega)} =: M_0^2.$$

Verwenden wir noch einmal die Poincaré-Ungleichung, so ergibt sich

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - g\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{H^1(\Omega)} \leq (C_3 M_0 + \|g\|_{H^1(\Omega)}) =: M \tag{2.8}$$

und damit $u \in K$. Dies zeigt, dass der Fixpunktoperator S eine Selbstabbildung ist, und beweist die A-priori-Abschätzung (2.4), sobald wir die Existenz eines Fixpunktes bewiesen haben.

Schritt 3: S ist stetig. Sei $(v_k) \subset K$ eine Folge mit $v_k \to v$ in $L^2(\Omega)$ für $k \to \infty$. Wir müssen zeigen, dass $S(v_k) \to S(v)$ in $L^2(\Omega)$. Dazu wählen wir eine Teilfolge von (v_k), die wir der Einfachkeit halber wieder mit (v_k) bezeichnen. Sei $u_k = S(v_k)$. Dann erfüllt u_k die schwache Formulierung

$$\int_\Omega (\nabla u_k^T A \nabla w + c u_k w) dx = \int_\Omega f(x, v_k) w dx \quad \text{für } w \in H_0^1(\Omega)$$

und die Abschätzung (2.8), d.h., (u_k) ist beschränkt in $H^1(\Omega)$. Daher existiert eine Teilfolge $(u_{k'})$, so dass für $k' \to \infty$

$$u_{k'} \rightharpoonup u \quad \text{in } H^1(\Omega), \quad u_{k'} \to u \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Die erste Konvergenz folgt aus Satz 1.11 von Eberlein-Šmuljan; die zweite Konvergenz gilt, da $H^1(\Omega)$ kompakt in $L^2(\Omega)$ einbettet. Wir erhalten

$$\int_\Omega (\nabla u_{k'}^T A \nabla w + c u_{k'} w) dx \to \int_\Omega (\nabla u^T A \nabla w + c u w) dx \quad \text{für } k' \to \infty.$$

Ferner folgt aus der Stetigkeit des Spuroperators $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ und $\gamma(u_{k'}) = g$, dass aus $u_{k'} \rightharpoonup u$ in $H^1(\Omega)$ folgt $\gamma(u_{k'}) \rightharpoonup \gamma(u)$ in $L^2(\partial\Omega)$, also $\gamma(u) = g$. (Die Eigenschaft, dass aus einer schwach konvergenten Folge die schwache Konvergenz der Bildfolge folgt, heißt *schwache Folgenstetigkeit* und gilt für alle linearen stetigen Abbildungen zwischen Banachräumen; siehe Übungsaufgaben.)

Um den Grenzwert $k' \to \infty$ in $\int_\Omega f(x, v_k) w dx$ durchführen zu können, benötigen wir folgendes Resultat über Carathéodory-Funktionen.

Lemma 2.6. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ und f eine Carathéodory-Funktion mit*

$$|f(x,u)| \leq C|u|^r + h(x), \quad 1 \leq q, qr < \infty,\ C \geq 0,\ h \in L^q(\Omega),\ h \geq 0,$$

für alle $x \in \Omega$ und $u \in \mathbb{R}$. Definiere $F(u) = f(\cdot, u(\cdot))$ für $u \in L^{qr}(\Omega)$. Dann ist F eine stetige Abbildung von $L^{qr}(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$.

Wir zeigen dieses Lemma weiter unten, um den Beweis von Satz 2.5 nicht zu unterbrechen. Die Abbildung $v \mapsto f(\cdot, v)$ ist gemäß Lemma 2.6 stetig von $L^2(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$ (wähle $C = 0$ und $r = 2/q$). Aus $v_{k'} \to v$ in $L^2(\Omega)$ folgt also $f(\cdot, v_{k'}) \to f(\cdot, v)$ in $L^q(\Omega)$ und daher

$$\int_\Omega f(x, v_{k'}) w dx \to \int_\Omega f(x,v) w dx.$$

Damit erfüllt u die Beziehung

$$\int_\Omega (\nabla u^T A \nabla w + cuw) dx = \int_\Omega f(x,v) w dx, \quad w \in H_0^1(\Omega),$$

und ist folglich eine Lösung des Problems $L(u) = f(x,v)$ in Ω und $u = g$ auf $\partial\Omega$. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit des linearen Problems folgt $u = S(v)$. Wir haben beweisen, dass $S(v_{k'}) = u_{k'} \to u = S(v)$ in $L^2(\Omega)$. Der Grenzwert u ist eindeutig. Wir haben insbesondere gezeigt, dass die beliebig gewählte Teilfolge (v_k) eine Teilteilfolge $(v_{k'})$ enthält, die gegen den eindeutig bestimmten Grenzwert u konvergiert. Nach Proposition 1.12 (iv) konvergiert also die gesamte Folge (u_k) gegen u, und die Stetigkeit von S ist bewiesen.

Schritt 4: Existenz eines Fixpunktes. Die Voraussetzungen des Satzes von Schauder sind erfüllt. Also existiert ein $u \in K$, so dass $S(u) = u$, d.h., $u \in H^1(\Omega)$ ist eine Lösung von (2.1). □

Es bleibt Lemma 2.6 zu zeigen.

Beweis von Lemma 2.6. Sei $(u_k) \subset L^{qr}(\Omega)$ mit $u_k \to u$ in $L^{qr}(\Omega)$. Wir müssen zeigen, dass $F(u_k) \to F(u)$ in $L^q(\Omega)$. Nach der Umkehrung des Satzes über die majorisierte Konvergenz (Satz 1.16 (ii)) existiert eine Teilfolge $(u_{k'})$, so dass $u_{k'} \to u$ fast überall in Ω für $k' \to \infty$, und es gilt die gleichmäßige Abschätzung $|u_{k'}| \leq u^* \in L^{qr}(\Omega)$ für alle k'. Insbesondere gilt $F(u_{k'}) \to F(u)$ fast überall in Ω. Wegen $|F(u_{k'})|^q \leq C(|u^*|^{qr} + h^q) \in L^1(\Omega)$ wird $F(u_{k'})$ durch eine L^1-Funktion dominiert, und wir können den Satz über die majorisierte Konvergenz anwenden und erhalten $F(u_{k'}) \to F(u)$ in $L^q(\Omega)$ für $k' \to \infty$. Das am Ende des vorigen Beweises bereits angeführte Argument zeigt, dass diese Konvergenz für die gesamte Folge gilt (wenn wir zuvor eine Teilfolge gewählt haben), und damit ist das Lemma bewiesen. □

Bemerkung. Die Rechnungen im obigen Beweis vereinfachen sich deutlich, wenn u *homogene* Randbedingungen erfüllt. Wir können Existenzbeweise nichtlinearer Probleme im allgemeinen auf solche für Probleme mit homogenen Randbedingungen zurückführen, indem wir die Transformation $v = u - g$ einführen. Ist nämlich u eine Lösung von $L(u) = f(x, u)$ in Ω, $u = g$ auf $\partial\Omega$, so löst v das homogene Problem

$$L(v) = L(u) - L(g) = f(x, v + g(x)) - L(g) =: F(x, v) \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Allerdings erfüllt F nicht die Voraussetzungen von Satz 2.5, da $L(g) \in H^{-1}(\Omega)$. Der Beweis bleibt jedoch nahezu unverändert, wenn wir die Voraussetzungen an die Nichtlinearität folgendermaßen abschwächen: Sei $F(\cdot, v) = F_1(\cdot, v) + F_0$, wobei $F_0 \in H^{-1}(\Omega)$ und F_1 eine Carathéodory-Funktion mit $|F_1(\cdot, v)| \leq h \in L^q(\Omega)$, $q \in N_*$, ist. Insbesondere werden wir in Kapitel 3 meistens homogene Randbedingungen voraussetzen, um die Beweise zu vereinfachen. □

Die schwache Lösung von (2.1) ist sogar zweimal schwach differenzierbar. Um dies einzusehen, benötigen wir folgendes tiefliegendes Regularitätsresultat (siehe Gilbarg-Trudinger [11, Theorem 9.15] oder Troianiello [21, Theorem 3.17(ii)]).

Theorem 2.7 ($W^{2,r}$-Regularität linearer elliptischer Gleichungen). *Es gelten die Voraussetzungen für Ω und L zu Beginn dieses Abschnitts. Ferner seien $\partial\Omega \in C^2$, $a_{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $g \in W^{2,r}(\Omega)$ und $f \in L^r(\Omega)$, wobei $1 < r < \infty$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in W^{2,r}(\Omega)$ von*

$$L(u) = f \quad \textit{in } \Omega, \quad u = g \quad \textit{auf } \partial\Omega,$$

und es gilt die A-priori-Abschätzung

$$\|u\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C\big(\|g\|_{W^{2,r}(\Omega)} + \|f\|_{L^r(\Omega)}\big)$$

mit einer von u unabhängigen Konstanten $C > 0$.

Korollar 2.8. *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.5 und Satz 2.7. Dann existiert eine Lösung $u \in W^{2,q}(\Omega)$ von* (2.1).

Beweis. Wir wissen, dass eine schwache Lösung u von $L(u) = f(x, u)$ in Ω mit $u - g \in H_0^1(\Omega)$ existiert. Wir interpretieren die rechte Seite als eine Funktion $\widetilde{f}(x) = f(x, u(x))$. Dann löst u die *lineare* Gleichung $L(u) = \widetilde{f}$, und wegen $|\widetilde{f}| \leq h \in L^q(\Omega)$ ist der obige Regularitätssatz auf diese Gleichung anwendbar. Damit ist das Korollar bewiesen. □

Es stellt sich nun die Frage, inwiefern der Existenzsatz 2.5 verallgemeinert werden kann. Wir könnten etwa fragen, ob

- die Lösung eindeutig ist bzw.
- eine Lösung bei allgemeineren Nichtlinearitäten der Form $|f(x, u)| \leq C|u|^\beta + h(x)$ existiert.

Beide Fragen sind im allgemeinen negativ zu beantworten.

Beispiel 2.9. Betrachte das Randwertproblem

$$-u'' = cu \quad \text{in } (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

wobei $c > 0$. (Der Fall $c \le 0$ ist in Satz 2.5 enthalten.) Die Nullfunktion ist für alle $c > 0$ eine Lösung. Aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen ist bekannt, dass dieses Problem nur dann nichtverschwindende Lösungen $u \neq 0$ besitzt, wenn $c = (2\pi k)^2$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt. Wenn $c = (2\pi k)^2$, dann existieren mindestens zwei Lösungen $u_1(x) = 0$ und $u_2(x) = \sin(2\pi kx)$. Das obige Randwertproblem ist also im allgemeinen nicht eindeutig lösbar. □

Unter bestimmten zusätzlichen Annahmen können die obigen beiden Fragen positiv beantwortet werden. Ist etwa die Nichtlinearität f lipschitzstetig im Sinne

$$|f(x,u) - f(x,v)| \le f_0|u - v| \quad \text{für } x \in \Omega,\ u, v \in \mathbb{R}$$

und ist die Lipschitzkonstante $f_0 > 0$ “hinreichend klein”, so kann die Eindeutigkeit von Lösungen bewiesen werden (siehe Übungsaufgaben). Allgemeinere Nichtlinearitäten können zugelassen werden, wenn sie *sublinear* sind, d.h., wenn für $0 < \beta < 1$, $C > 0$ und $h \in L^q(\Omega)$ gilt:

$$|f(x,u)| \le C|u|^\beta + h(x) \quad \text{für } x \in \Omega,\ u \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Der kritische Schritt im Existenzbeweis sind die gleichmäßigen Abschätzungen (um zu zeigen, dass der Fixpunktoperator eine Selbstabbildung ist). Um die Rechnungen zu vereinfachen, nehmen wir an, dass $u = 0$ auf $\partial\Omega$ erfüllt ist (siehe Bemerkung) und verwenden die Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von $L(u) = f(x,v)$ für gegebenes v als Testfunktion in der schwachen Formulierung. Dies führt auf

$$\int_\Omega (\alpha|\nabla u|^2 + cu^2)dx \le \int_\Omega f(x,v)u\,dx \le C\int_\Omega |v|^\beta|u|dx + \int_\Omega h|u|dx.$$

Wir verwenden in beiden Integralen der rechten Seite die Hölder- und dann die Young-Ungleichung:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\alpha|\nabla u|^2 + cu^2)dx &\le C\|v\|^\beta_{L^{\beta q}(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|h\|_{L^q(\Omega)}\|u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{L^p(\Omega)} + \frac{C}{\varepsilon}\|v\|^{2\beta}_{L^{\beta q}(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|h\|^2_{L^q(\Omega)}.\end{aligned}$$

wobei $1/p + 1/q = 1$ und $q \in N_*$. Dann ist $p \in N^*$ und $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Wir schließen mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, dass

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C_1\big(\|v\|^\beta_{L^{\beta q}(\Omega)} + \|h\|_{L^q(\Omega)}\big) \le C_2\big(M^\beta + \|h\|_{L^q(\Omega)}\big),$$

denn $\|v\|_{L^{\beta q}(\Omega)} \leq C_3\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 M$ wegen $v \in K$. Damit $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta q}(\Omega)$ sichergestellt ist, wählen wir z.B. (für $n \geq 3$) $p = 2n/(n-2)$ und $q = 2n/(n+2)$. Dann gilt $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\beta q}(\Omega)$, wenn $-n/(\beta q) \leq 1 - n/2$ oder $\beta \leq 2n/((n-2)q) = (n+2)/(n-2)$, was wegen $\beta < 1$ erfüllt ist. Das Ziel lautet, ein $M > 0$ zu finden, so dass

$$C_2\big(M^\beta + \|h\|_{L^q(\Omega)}\big) \leq M$$

erfüllt ist, denn in diesem Fall ist $u \in K$. Dies ist aber genau dann möglich, wenn $\beta < 1$ gilt. Dies beweist, dass $S : K \to K$.

Semilineare Gleichungen beschreiben z.B. stationäre Zustände chemischer Reaktionen. Hierbei ist es möglich, dass die Nichtlinearität *superlinear* wächst, d.h. (2.9) mit $\beta > 1$ gilt. Sind für derartige Nichtlinearitäten Existenzresultate möglich? Falls f nicht zu schnell wächst, kann die Existenz von Lösungen bewiesen werden. Wir zitieren folgendes Resultat, das allerdings nicht mit den hier vorgestellten Techniken bewiesen werden kann; siehe Evans [10, Abschnitt 8.5.2] für einen Beweis.

Theorem 2.10 (Existenz für semilineare Gleichungen II). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $1 < p < (n+2)/(n-2)$ ($p < \infty$, wenn $n \leq 2$). Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, von*

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes existieren also mindestens zwei Lösungen, denn $u = 0$ ist stets eine Lösung. Falls $p > (n+2)/(n-2)$, dann ist $u = 0$ die einzige (klassische) Lösung der obigen Gleichung, falls Ω sternförmig bezüglich null ist (siehe Evans [10, Abschnitt 9.4.2]). Wir nennen $u = 0$ die triviale Lösung und die Zahl $p = (n+2)/(n-2)$ den *kritischen Exponenten*.

Wir erwarten, dass im Falle einer monoton fallenden (und eventuell superlinearen) Funktion $f(x,u)$ die Lösung u beschränkt bleibt und die Existenz von Lösungen bewiesen werden kann. Wir zeigen im folgenden Abschnitt, dass dies tatsächlich der Fall ist.

2.2 Monotone semilineare Gleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir wie in Abschnitt 2.1 semilineare Gleichungen vom Typ

$$L(u) = f(x,u) \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{2.10}$$

allerdings setzen wir voraus, dass die Funktion $u \mapsto f(x,u)$ monoton fallend ist. Dann gilt das folgende Existenzresultat.

Theorem 2.11 (Existenz und Eindeutigkeit für monotone semilineare Gleichungen I). *Es gelten die Voraussetzungen zu Beginn von Abschnitt 2.1. Ferner sei f eine Carathéodory-Funktion, und es gelte für fast alle $x \in \Omega$, dass $u \mapsto f(x,u)$ monoton fallend ist. Ferner gelte die Abschätzung*

$$|f(x,u)| \leq C|u|^{p-1} + h(x) \quad \textit{für } x \in \Omega,\ u \in \mathbb{R},$$

wobei $C > 0$, $h \in L^q(\Omega)$, $q \in N_*$, $1 < p < 2n/(n-2)$ ($p < \infty$, falls $n \leq 2$) und $1/p + 1/q = 1$. Dann existieren genau eine schwache Lösung von (2.10) *und eine Konstante $C > 0$, die nur von A, c und Ω abhängt, so dass*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\big(\|g\|_{H^1(\Omega)} + \|h\|_{L^q(\Omega)}\big). \tag{2.11}$$

Die Werte von p und q sind so gewählt, dass die Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ kompakt ist und $f(\cdot,u) \in L^q(\Omega)$ gilt. Dies folgt aus

$$|f(\cdot,u)|^q \leq C(|u|^{(p-1)q} + h^q) = C(|u|^p + h^q) \in L^1(\Omega).$$

Die Beweisidee ist wieder ein Fixpunktargument. Allerdings können wir nicht den Fixpunktsatz 2.3 von Schauder verwenden. Dies können wir folgendermaßen einsehen. Setze zur Vereinfachung $g = 0$. Sei v gegeben und sei u die Lösung der linearisierten Gleichung $L(u) = f(x,v)$. Dies definiert den Fixpunktoperator $S(v) = u$. Verwenden wir die Testfunktion u in der linearisierten Gleichung, so erhalten wir ähnlich wie im Beweis von Satz 2.5 die Abschätzung

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega |f(x,v)u| dx. \tag{2.12}$$

Es bleibt also die rechte Seite abzuschätzen. Wir bemerken, dass aus der Monotonie von f folgt

$$f(x,u)u - f(x,0)u = (f(x,u) - f(x,0))(u-0) \leq 0 \tag{2.13}$$

und damit

$$f(x,u)u \leq f(x,0)u \leq \frac{\varepsilon}{2}u^2 + \frac{1}{2\varepsilon}f(x,0)^2.$$

Der Summand $f(x,0)^2$ ist unabhängig von u und der verbleibende Term u^2 kann nach Anwendung der Poincaré-Ungleichung von der linken Seite in (2.12) absorbiert werden. Leider haben wir den Ausdruck $f(x,v)u$ und *nicht* $f(x,u)u$. Das Fixpunktargument zerstört die monotone Struktur. Um dieses Problem zu lösen, verwenden wir einen anderen Fixpunktsatz.

Theorem 2.12 (Fixpunktsatz von Leray-Schauder). *Seien B ein Banachraum, $S : B \times [0,1] \to B$ eine stetige und kompakte Abbildung mit $S(v,0) = 0$ für alle $v \in B$ und es existiere ein $C > 0$, so dass für alle $u \in B$ und $\sigma \in [0,1]$ mit $S(u,\sigma) = u$ gilt*

$$\|u\| \leq C.$$

Dann besitzt $v \mapsto S(v,1)$ einen Fixpunkt.

Im Gegensatz zum Fixpunktsatz von Schauder muss keine kompakte, konvexe Menge konstruiert werden. Jedoch muss der Fixpunktoperator kompakt sein und alle Fixpunkte müssen einer gleichmäßigen Abschätzung genügen. Der Satz von Leray-Schauder ist eine Folgerung des Satzes von Schauder; ein Beweis ist in Gilbarg-Trudinger [11, Theorem 11.6] zu finden.

Der Vorteil des Satzes von Leray-Schauder lautet, dass die Abschätzung nur für alle Fixpunkte gelten muss. Konkret bedeutet dies für unser Problem (2.10) mit $g = 0$, dass wir die Lösung u als Testfunktion verwenden können, und gemäß der obigen Rechnung ergibt sich

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \int_\Omega f(x,u) u dx \leq \int_\Omega f(x,0) u dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon} \|f(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung und für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ kann der erste Term auf der rechten Seite von der linken Seite absorbiert werden. Es folgt

$$\frac{\alpha}{2} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\alpha) \|f(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)},$$

also eine gleichmäßige Abschätzung für u.

Beweis von Satz 2.11. Die Struktur des Beweises ist wie für Satz 2.1.

Schritt 1: Definition des Fixpunktoperators. Wir definieren zuerst den Fixpunktoperator. Seien dafür $v \in L^p(\Omega)$ und $\sigma \in [0,1]$ gegeben und $u \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung von

$$L(u) = \sigma f(x,v) \quad \text{in } \Omega, \quad u = \sigma g \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2.14}$$

Dies definiert den Operator $S : L^p(\Omega) \times [0,1] \to L^p(\Omega)$, $u = S(v,\sigma)$. Falls $\sigma = 0$, so lautet die Lösung von (2.14) $u = 0$, d.h., es gilt $S(v,0) = 0$ für alle $v \in L^2(\Omega)$.

Schritt 2: S ist stetig und kompakt. Der Beweis der Stetigkeit von S ist ähnlich wie im Beweis von Satz 2.5. Seien $v_k \to v$ in $L^p(\Omega)$ und $\sigma_k \to \sigma$ für $k \to \infty$. Definiere $u_k = S(v_k,\sigma_k)$ und verwende $u_k - \sigma_k g$ als Testfunktion in (2.14):

$$\int_\Omega \big(\nabla u_k^T A \nabla(u_k - \sigma_k g) + c u_k (u_k - \sigma_k g)\big) dx = \sigma_k \int_\Omega f(x,v_k)(u_k - \sigma_k g) dx.$$

Ähnlich wie im Beweis von Satz 2.5 können wir die linke Seite mit Hilfe der Elliptizität von A abschätzen, so dass folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx &\le \int_\Omega |f(x,v_k)(u_k-\sigma_k g)|dx + C(A,c,g) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}\|u_k\|^2_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|f(\cdot,v_k)\|^2_{L^q(\Omega)} + C(A,c,g), \end{aligned} \tag{2.15}$$

wobei $1/p+1/q=1$. Die Konstante $C(A,c,g)$ hängt von den L^∞-Normen von A und c sowie der H^1-Norm von g ab. Für die letzte Ungleichung haben wir die Hölder- und Young-Ungleichung verwendet. Mit Hilfe der Dreiecks-, Sobolev- und Poincaré-Ungleichung erhalten wir für das erste Integral auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2}\|u_k\|^2_{L^p(\Omega)} &\le \frac{\varepsilon}{2}\|u_k-\sigma_k g\|^2_{L^p(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2}\|\sigma_k g\|^2_{L^p(\Omega)} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}C_1\|u_k-\sigma_k g\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2}\|\sigma_k g\|^2_{L^p(\Omega)} \le \frac{\alpha}{4}\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\sigma)\|g\|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite kann durch die linke Seite in (2.15) absorbiert werden. Das zweite Integral in (2.15) schätzen wir folgendermaßen ab:

$$\int_\Omega |f(x,v_k)|^q dx \le C_2\Big(\int_\Omega |v_k|^{(p-1)q}dx + \int_\Omega |h|^q dx\Big).$$

Wegen $(p-1)q=p$ und der stetigen Einbettung $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$ ist die rechte Seite beschränkt. Es folgt

$$\|u_k\|_{H^1(\Omega)} \le C_3. \tag{2.16}$$

Die Folge $u_k = S(v_k,\sigma_k)$ ist also in $H^1(\Omega)$ beschränkt und in $L^p(\Omega)$ kompakt. Daher existiert eine Teilfolge, so dass

$$u_{k'} \rightharpoonup u \quad \text{in } H^1(\Omega) \quad \text{und} \quad u_{k'} \to u \quad \text{in } L^p(\Omega).$$

Wegen $v_k \to v$ in $L^p(\Omega)$ konvergiert $f(x,v_{k'})$ in $L^q(\Omega)$ gegen $f(x,v)$ (siehe Lemma 2.6). Der Grenzwert $k'\to\infty$ in der schwachen Formulierung

$$\int_\Omega (\nabla u_{k'}^T A\nabla w + c u_{k'} w)dx = \sigma_k \int_\Omega f(x,v_{k'})w dx, \quad w\in H_0^1(\Omega),$$

liefert daher

$$\int_\Omega (\nabla u^T A\nabla w + cuw)dx = \sigma\int_\Omega f(x,v)w dx, \quad w\in H_0^1(\Omega).$$

Außerdem erfüllt die Grenzfunktion u die Randwerte. Also löst u (2.14), d.h. $u=S(v,\sigma)$ und $S(v_{k'},\sigma_{k'}) = u_{k'} \to u = S(v,\sigma)$ in $L^p(\Omega)$. Diese Konvergenz gilt wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes für die gesamte Folge. Folglich ist S stetig.

Die Kompaktheit von S ist eine Konsequenz der gleichmäßigen Abschätzung (2.16). Ist nämlich (v_k) eine beschränkte Folge in $L^p(\Omega)$, so ist $(u_k) = (S(v_k, \sigma_k))$ in $H^1(\Omega)$ beschränkt, besitzt also eine konvergente Teilfolge in $L^p(\Omega)$.

Schritt 3: A-priori-Abschätzung. Es bleibt eine gleichmäßige Abschätzung für alle Fixpunkte zu zeigen. Seien also $\sigma \in [0,1]$ und $u \in H^1(\Omega)$ ein Fixpunkt von $S(\cdot, \sigma)$. Wir verwenden $u - \sigma g \in H_0^1(\Omega)$ als Testfunktion und erhalten nach einer ähnlichen Rechnung wie oben

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx &\le \sigma \int_\Omega f(x,u)(u-\sigma g)dx + C(A,c,g) \\ &= \sigma \int_\Omega (f(x,u) - f(x,\sigma g))(u-\sigma g)dx \\ &\quad + \sigma \int_\Omega f(x,\sigma g)(u-\sigma g)dx + C(A,c,g).\end{aligned} \tag{2.17}$$

Aus der Monotonie von $f(x,\cdot)$ und $\sigma \le 1$ folgt

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_{L^p(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|f(\cdot,\sigma g)\|_{L^q(\Omega)}^2 + C(A,c,g).$$

Wir wenden wieder die Dreiecks-, Sobolev- und Poincaré-Ungleichung auf den ersten Term auf der rechten Seite an und erhalten wie oben für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$:

$$\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_{L^p(\Omega)}^2 \le \frac{\alpha}{4}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|g\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Der erste Term auf der rechten Seite kann von der linken Seite in (2.17) absorbiert werden. Den zweiten Term in (2.17) schätzen wir ab, so dass wir erhalten:

$$\frac{\alpha}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le C_4\left(\|g\|_{L^{(p-1)q}(\Omega)}^{2(p-1)} + \|h\|_{L^q(\Omega)}^2\right) + C(A,c,g),$$

und dies ist wegen $(p-1)q = p$ beschränkt. Wir folgern die gleichmäßige Abschätzung

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C_5\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C_6,$$

und $C_6 > 0$ hängt von g und h ab. Wir können nun den Fixpunktsatz von Leray-Schauder anwenden und erhalten die Existenz eines Fixpunktes, d.h. einer Lösung von (2.10).

Schritt 4: Eindeutigkeit einer Lösung. Seien u_1 und u_2 zwei schwache Lösungen von (2.10). Dann ist $u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ eine zulässige Testfunktion und wir erhalten

$$\int_\Omega \left(\nabla u_i^T A \nabla(u_1-u_2) + cu_i(u_1-u_2)\right)dx = \int_\Omega f(x,u_i)(u_1-u_2)dx, \quad i = 1,2.$$

Subtrahieren wir beide Gleichungen und verwenden wir die Monotonie von f, so folgt

$$\int_\Omega \left(\nabla(u_1-u_2)^T A\nabla(u_1-u_2) + c(u_1-u_2)^2\right)dx = \int_\Omega (f(x,u_1)-f(x,u_2))(u_1-u_2)dx \le 0$$

und daher $u_1 - u_2 = 0$ in Ω. $\square$

Wir können die Wachstumsbedingung an f vermeiden, wenn wir nach L^∞-Lösungen suchen. Dies ist unter der Monotonieannahme möglich, sofern die Randwerte in $L^\infty(\Omega)$ liegen. Um die (essentielle) Beschränktheit der Lösungen zu zeigen, verwenden wir eine Variante des Maximumprinzips. Dazu erweitern wir das klassische Maximumprinzip auf ein Maximumprinzip für schwache Lösungen. Zunächst beweisen wir ein Hilfsresultat.

Theorem 2.13 (Stampacchia). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ ein beschränktes Gebiet, $1 \leq p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dann gilt $u^+ = \max\{u, 0\} \in W^{1,p}(\Omega)$ und*

$$\nabla u^+ = \chi_{u>0} \nabla u,$$

wobei $\chi_{u>0}$ die charakteristische Funktion auf $\{u > 0\} = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ sei. Außerdem gilt $\nabla u = 0$ fast überall in $\{u = 0\} = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$.

Der Beweis dieses Satzes basiert auf folgendem Lemma, dessen Beweis eine Übungsaufgabe ist.

Lemma 2.14. *Seien $F \in C^1(\mathbb{R})$ mit $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Dann gilt $F \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ und*

$$\nabla(F \circ u) = F'(u) \nabla u.$$

Beweis von Satz 2.13. Da $F(z) = z^+$ keine C^1-Funktion ist, müssen wir regularisieren (siehe Troianiello [21, Theorem 1.56]). Sei daher $F_\varepsilon(z) = \sqrt{z^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon$ für $z > 0$ und $F_\varepsilon(z) = 0$ sonst. Dann ist $F_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ und $F_\varepsilon(z) \to z^+$ für $\varepsilon \to 0$ und für alle $z \in \mathbb{R}$. Außerdem folgt aus Lemma 2.14 $F_\varepsilon \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$. Wir erhalten nach partieller Integration für $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega (F_\varepsilon \circ u) \nabla v dx = -\int_\Omega F_\varepsilon'(u) \nabla u v dx = -\int_{\{u>0\}} \frac{u \nabla u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} v dx.$$

Im Grenzwert erhalten wir

$$\int_\Omega u^+ \nabla v dx = -\int_{\{u>0\}} \nabla u v dx.$$

Dies bedeutet $u^+ \in W^{1,p}(\Omega)$ und $\nabla u^+ = \chi_{u>0} \nabla u$. Um die zweite Aussage zu zeigen, bemerken wir, dass $u = u^+ - (-u)^+$ und daher

$$\nabla u = \chi_{u>0} \nabla u + \chi_{-u>0} \nabla u = 0 \quad \text{fast überall in } \{u = 0\}.$$

Der Satz ist bewiesen. $\square$

Wir können nun das schwache Maximumprinzip für schwache Lösungen formulieren.

Theorem 2.15 (Schwaches Maximumprinzip). *Es gelten die Voraussetzungen zu Beginn dieses Abschnitts. Sei $u \in H^1(\Omega)$ mit*

$$L(u) \leq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u \leq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dann gilt $u \leq 0$ fast überall in Ω.

Beweis. Wegen $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ gilt $u^+ = 0$ auf $\partial\Omega$. Außerdem ist nach dem Satz von Stampacchia $u^+ \in H_0^1(\Omega)$. Wir können also u^+ als Testfunktion in der schwachen Formulierung verwenden und erhalten

$$0 \geq \int_\Omega (\nabla u^T A \nabla u^+ + cuu^+)dx = \int_{\{u>0\}} (\nabla u^T A \nabla u + cu^2)dx \geq 0.$$

Daher folgt $u^+ = \text{const.}$ in Ω. Die Funktion u^+ erfüllt daher das elliptische Problem $\Delta u^+ = 0$ in Ω und $u^+ = 0$ auf $\partial\Omega$, woraus wegen der Eindeutigkeit der Lösung $u^+ = 0$ und $u \leq 0$ in Ω folgt. □

Wir können nun ein Existenzresultat für elliptische Gleichungen ohne globale Wachstumsbedingung an die Nichtlinearität formulieren.

Theorem 2.16 (Existenz und Eindeutigkeit für monotone semilineare Gleichungen II). *Es gelten die Voraussetzungen zu Beginn dieses Abschnitts. Zusätzlich gelte $g \in L^\infty(\Omega)$. Die Funktion f erfülle die folgenden Bedingungen:*

- *f ist eine Carathéodory-Funktion,*
- *$u \mapsto f(x,u)$ ist monoton fallend für fast alle $x \in \Omega$,*
- *es existiere ein $M_0 > 0$, so dass $f(x, M_0) \leq 0$ und $f(x, -M_0) \geq 0$ für fast alle $x \in \Omega$,*
- *es gelte $|f(x,u)| \leq h(x) \in L^q(\Omega)$ für fast alle $x \in \Omega$ und alle $|u| \leq M$, wobei $q \in N_*$ und $M = \max\{M_0, \|g\|_{L^\infty(\Omega)}\}$.*

Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ von (2.10) und es gilt

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\{M_0, \|g\|_{L^\infty(\Omega)}\}, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|g\|_{H^1(\Omega)} + \|h\|_{L^q(\Omega)}),$$

und $C > 0$ hängt nur von A, c und Ω ab.

Beachte, dass die obige Voraussetzung an f nur eine *lokale* Bedingung ist. Sie ist etwa erfüllt für Funktionen $f(x,u) = -u^3$ und $f(x,u) = 1 - e^u$.

Beweis. Wir definieren $f_M(x,v) = f(x,v)$ für $-M \leq v \leq M$, $f_M(x,v) = f(x,M)$ für $v > M$ und $f_M(x,v) = f(x,-M)$ für $v < -M$. Dann ist $v \mapsto f_M(x,v)$ monoton fallend, $f_M(x,M) \leq f_M(x,M_0) \leq 0$, $f_M(x,-M) \geq f_M(x,-M_0) \geq 0$ für $M \geq M_0$ und

$|f_M(x,v)| \leq \max\{|f(x,M)|, f(x,-M)\}$ für alle $v \in \mathbb{R}$. Aus Satz 2.5 folgt die Existenz einer schwachen Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von

$$L(u) = f_M(x,u) \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2.18}$$

Wir behaupten, dass u das Originalproblem löst. Dazu zeigen wir, dass $|u| \leq M$ und daher $f_M(x,u) = f(x,u)$ gilt.

Nach Definition von M ist $(u-M)^+ = 0$ auf $\partial\Omega$, und wir können diese Funktion als Testfunktion in der schwachen Formulierung von (2.18) verwenden, um zu erhalten:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\nabla u^T A \nabla (u-M)^+ + cu(u-M)^+)dx &= \int_\Omega f_M(x,u)(u-M)^+ dx \\ = \int_\Omega \big(f_M(x,u) - f_M(x,M)\big)(u-M)^+ dx &+ \int_\Omega f_M(x,M)(u-M)^+ dx \leq 0,\end{aligned}$$

denn f_M ist monoton fallend und $f_M(x,M) \leq 0$. Aus Satz 2.13 von Stampacchia folgt $\nabla(u-M)^+ = \chi_{u>M}\nabla(u-M) = \chi_{u>M}\nabla u$. Daher ergibt sich

$$\int_\Omega \big((\nabla(u-M)^+)^T A \nabla(u-M)^+ + c((u-M)^+)^2\big)dx \leq -\int_\Omega cM(u-M)^+ dx \leq 0$$

und folglich $(u-M)^+ = 0$, woraus wir $u \leq M$ schließen. Die Ungleichung $u \geq -M$ folgt nach einer analogen Rechnung, wenn wir die Testfunktion $(u+M)^- = -(-u-M)^+$ verwenden. □

2.3 Quasilineare Gleichungen

Ziel dieses Abschnitts ist die Lösung von elliptischen Gleichungen der Form

$$-\operatorname{div} a(\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2.19}$$

Wir gehen ähnlich vor wie Evans [10, Abschnitt 9.1]. Inhomogene Randwertprobleme $u = g$ auf $\partial\Omega$ können ebenfalls betrachtet werden, indem man das Problem “homogenisiert”, d.h. indem man $v = u - g$ definiert und das Problem $-\operatorname{div} b(x,\nabla v) = f$ mit $b(x,\nabla v) = a(\nabla v + \nabla g(x))$ untersucht (siehe Bemerkung).

Wir treffen in diesem Abschnitt die folgenden Voraussetzungen. Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) sei ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $a = (a_1,\ldots,a_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein stetiges Vektorfeld und $f \in L^2(\Omega)$. Motiviert durch die Ergebnisse des letzten Abschnitts fordern wir, dass die Nichtlinearität a *monoton* ist. Wir definieren genauer:

Definition 2.17. *Sei $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Wir nennen a* monoton, *wenn*

$$(a(p) - a(q)) \cdot (p-q) \geq 0 \quad \textit{für alle } p,q \in \mathbb{R}^n.$$

Das Vektorfeld heißt stark monoton, *wenn es eine Konstante* $\gamma > 0$ *gibt mit*

$$(a(p) - a(q)) \cdot (p - q) \geq \gamma |p - q|^2 \quad \textit{für alle } p, q \in \mathbb{R}^n.$$

Beispiel 2.18. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe, zweimal stetig differenzierbare Funktion. Wir behaupten, dass $a = \nabla\phi$ monoton ist. Dies ist der Fall, da für alle $p, q \in \mathbb{R}^n$ nach dem Satz von Taylor gilt:

$$\begin{aligned}(a(p) - a(q)) \cdot (p - q) &= \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \phi(p) - \partial_i \phi(q))(p_i - q_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 \partial_{ij}^2 \phi(p + \theta(q - p)) d\theta (p_i - q_i)(p_j - q_j) \geq 0,\end{aligned}$$

wobei $\partial_i = \partial / \partial p_i$ und $\partial_{ij}^2 = \partial^2 / \partial p_i \partial p_j$, denn die Hessematrix $D^2\phi$ von ϕ ist wegen der Konvexität positiv definit. Fordern wir zusätzlich, dass ϕ gleichmäßig konvex ist, d.h., $p^T D^2 \phi p \geq \gamma |p|^2$ für alle $p \in \mathbb{R}^n$ und ein $\gamma > 0$, so folgt die starke Monotonie von a.

Ein Beispiel für eine konvexe Funktion ist $\phi(p) = \sqrt{1 + |p|^2}$, woraus $a(p) = p / \sqrt{1 + |p|^2}$ folgt. Dies entspricht der Minimalflächengleichung. □

Wir beweisen die Existenz einer Lösung von (2.19). Die schwache Formulierung lautet wie gewohnt wie folgt: Suche $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $a(\nabla u) \in L^2(\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega a(\nabla u) \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Theorem 2.19 (Existenz für quasilineare Gleichungen). *Es gelten die Voraussetzungen zu Beginn dieses Abschnitts. Ferner setzen wir voraus, dass a höchstens linear wächst und koerziv ist, d.h., es existieren Konstanten* $C > 0$, $\alpha > 0$ *und* $\beta \geq 0$, *so dass*

$$|a(p)| \leq C(1 + |p|) \quad \textit{und} \quad a(p) \cdot p \geq \alpha |p|^2 - \beta \quad \textit{für alle } p \in \mathbb{R}^n.$$

Dann existiert eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ *von* (2.19).

Die Wachstumsbedingung stellt sicher, dass $a(\nabla u) \in L^2(\Omega)$. Die zweite Ungleichung entspricht einer verallgemeinerten Koerzivitätsbedingung, denn im Falle des Laplace-Operators $a(\nabla u) = \nabla u$ folgt $a(p) \cdot p = |p|^2$, und die Ungleichung gilt für $\alpha = 1$ und $\beta = 0$.

Die Beweisidee ist wieder die Anwendung eines Fixpunktsatzes. Wir gehen allerdings etwas anders vor als in den vorherigen Abschnitten und definieren zunächst approximative Lösungen mit Hilfe der Galerkin-Methode. Der Vorteil ist, dass diese

Lösungen in einem endlichdimensionalen Raum definiert sind, so dass wir den Fixpunktsatz 2.4 von Brouwer anwenden können. Hierfür sind keine Kompaktheitseigenschaften erforderlich. Wir zeigen dann, dass die approximativen Lösungen gleichmäßig beschränkt sind und gehen anschließend mit Hilfe eines Kompaktheitsarguments zum Grenzwert unendlich vieler Dimensionen über. Zuerst beweisen wir ein technisches Resultat (siehe Abbildung 2.1).

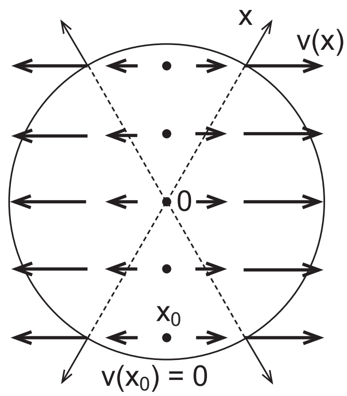

Abbildung 2.1: Illustration für Lemma 2.20. Das Vektorfeld $v(x)$ erfüllt die Bedingung $v(x) \cdot x \geq 0$ für alle x auf dem Kreis.

Lemma 2.20. *Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und es gelte*

$$v(x) \cdot x \geq 0 \quad \textit{für alle } |x| = r$$

für ein $r > 0$. Dann existiert ein $x_0 \in \overline{B_r(0)}$, so dass $v(x_0) = 0$.

Beweis. Angenommen, für alle $x \in \overline{B_r(0)}$ gelte $v(x) \neq 0$. Definiere dann die stetige Abbildung $w : \overline{B_r(0)} \to \partial B_r(0)$ durch

$$w(x) = -\frac{r}{|v(x)|} v(x), \quad x \in \overline{B_r(0)}.$$

Wir können w auch als Funktion von $\overline{B_r(0)}$ nach $\overline{B_r(0)}$ interpretieren. Nach dem Fixpunktsatz von Brouwer existiert ein $x_0 \in \overline{B_r(0)}$, so dass $w(x_0) = x_0$. Nach Konstruktion von w ist aber dann $x_0 \in \partial B_r(0)$ und

$$r^2 = |x_0|^2 = w(x_0) \cdot x_0 = -\frac{r}{|v(x_0)|} v(x_0) \cdot x_0 \leq 0.$$

Wegen $x_0 \neq 0$ liefert dies einen Widerspruch. □

Beweis von Satz 2.19. Wir zerlegen den Beweis wieder in mehrere Schritte.

Schritt 1: Lösung eines endlichdimensionalen Problems. Sei (w_k) eine orthonormale Basis von $H_0^1(\Omega)$ bezüglich des inneren Produkts $(u,v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$. Die Folge (w_k) kann beispielsweise gleich den normierten Eigenfunktionen von $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$ sein. Wir suchen Lösungen u_m, die eine Linearkombination aller $w_1, \dots, w_m$ sind, der Galerkin-Gleichungen

$$\int_\Omega a(\nabla u_m) \cdot \nabla w_k dx = \int_\Omega f w_k dx \quad \text{für alle } k = 1, \dots, m. \tag{2.20}$$

Wir können u_m darstellen durch

$$u_m = \sum_{k=1}^m d_k w_k,$$

d.h., wir müssen die Koeffizienten d_k bestimmen. Dafür verwenden wir Lemma 2.20.

Definiere $v = (v_1, \dots, v_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ durch

$$v_k(d) = \int_\Omega \Big(a\Big(\sum_{j=1}^m d_j \nabla w_j \Big) \cdot \nabla w_k - f w_k \Big) dx, \quad k = 1, \dots, m, \ d = (d_1, \dots, d_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Ist d^* eine Nullstelle von v, so ist $u = \sum_k d_k^* w_k$ eine Lösung von (2.20). Nun folgt aus der Koerzivität von a

$$\begin{aligned} v(d) \cdot d &= \int_\Omega \Big(a\Big(\sum_{j=1}^m d_j \nabla w_j \Big) \cdot \sum_{k=1}^m d_k \nabla w_k - f \sum_{k=1}^m d_k w_k \Big) dx \\ &\geq \int_\Omega \Big(\alpha \Big| \sum_{j=1}^m d_j \nabla w_j \Big|^2 - \beta - f \sum_{k=1}^m d_k w_k \Big) dx \\ &= \alpha |d|^2 - \beta \text{meas}(\Omega) - \sum_{k=1}^m d_k \int_\Omega f w_k dx, \end{aligned}$$

denn (w_j) ist orthonormal bezüglich $(\cdot,\cdot)_{H_0^1}$. Die Young-Ungleichung ergibt

$$v(d) \cdot d \geq \frac{\alpha}{2} |d|^2 - \beta \text{meas}(\Omega) - \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=1}^m (f, w_k)_{L^2}^2.$$

Es bleibt der letzte Term abzuschätzen. Sei dafür $\phi \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung von $-\Delta\phi = f$ in Ω. Dann ist

$$(\phi, w_k)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla \phi \cdot \nabla w_k dx = \int_\Omega f w_k dx$$

und daher

$$\sum_{k=1}^m (f, w_k)_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^m (\phi, w_k)_{H_0^1}^2 \leq \|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

denn w_k ist bezüglich $H_0^1(\Omega)$ normiert. Damit erhalten wir

$$v(d) \cdot d \geq \frac{\alpha}{2}|d|^2 - \beta \mathrm{meas}(\Omega) - \frac{C_1}{2\alpha}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Wählen wir $r > 0$ hinreichend groß, so können wir erreichen, dass $v(d) \cdot d \geq 0$ für $|d| = r$. Aus Lemma 2.20 folgt die Existenz von d^* mit $v(d^*) = 0$. Dann löst $u_m = \sum_j d_j^* w_j$ (2.20).

Schritt 2: A-priori-Abschätzungen. Der Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass der Grenzwert $\lim_{m\to\infty} u_m$ in einem gewissen Sinne existiert und das Randwertproblem löst. Bevor wir den Grenzwert $m \to \infty$ durchführen können, müssen wir bezüglich m gleichmäßige Abschätzungen zeigen. Multipliziere die Galerkin-Gleichung (2.20) mit d_k^* und summiere über $k = 1, \ldots, m$:

$$\int_\Omega a(\nabla u_m) \cdot \nabla u_m dx = \int_\Omega f u_m dx. \tag{2.21}$$

Die Koerzivität von a impliziert

$$\int_\Omega \big(\alpha|\nabla u_m|^2 - \beta\big) dx \leq \int_\Omega a(\nabla u_m) \cdot \nabla u_m dx = \int_\Omega f u_m dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u_m^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega f^2 dx.$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ hinreichend klein und verwenden die Poincaré-Ungleichung, um den ersten Term auf der rechten Seite durch das Integral auf der linken Seite zu absorbieren. Wir erhalten

$$\|u_m\|_{H^1(\Omega)} \leq C(1 + \|f\|_{L^2(\Omega)}). \tag{2.22}$$

Schritt 3: Grenzwert $m \to \infty$. Nach dem Satz 1.11 von Eberlein-Šmuljan existiert eine Teilfolge $(u_{m'})$, so dass $u_{m'} \rightharpoonup u$ in $H^1(\Omega)$ für $m' \to \infty$. Insbesondere gilt

$$\nabla u_{m'} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{in } L^2(\Omega)^n.$$

Die Frage lautet, ob schwache Konvergenz ausreicht, um die Konvergenz $a(\nabla u_{m'}) \to a(\nabla u)$ (in irgendeinem Sinne) zu schließen. Die Antwort ist leider negativ. In Bemerkung haben wir gezeigt, dass für schwach konvergente Folgen (u_m) und stetige Funktionen f die Bildfolge $f(u_m)$ im allgemeinen *nicht* (schwach) konvergiert. Wir benötigen eine zusätzliche Information über die Nichtlinearität, um die Konvergenz durchführen zu können. Wir behaupten, dass die Monotonie von a ausreicht. Die folgende Vorgehensweise wird die *Methode von Browder und Minty* genannt.

Da die Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist, folgt aus (2.22) die Existenz einer Teilfolge von (u_m) mit

$$u_{m'} \to u \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Wählen wir eine gemeinsame Teilfolge, so gilt außerdem

$$\nabla u_{m'} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{in } L^2(\Omega)^n.$$

Wir behaupten, dass
$$a(\nabla u_{m'}) \rightharpoonup a(\nabla u) \quad \text{in } L^2(\Omega)^n. \tag{2.23}$$
Aus der Wachstumsbedingung für a und (2.22) folgt, dass $(a(\nabla u_m))$ in $L^2(\Omega)$ beschränkt ist:
$$\|a(\nabla u_m)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1 + \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}) \leq C.$$
Daher existiert eine Teilfolge von $(u_{m'})$, die wir wiederum mit $(u_{m'})$ bezeichnen, so dass
$$a(\nabla u_{m'}) \rightharpoonup b \quad \text{in } L^2(\Omega).$$
Wir müssen zeigen, dass $b = a(\nabla u)$.

Führen wir den Grenzwert $m' \to \infty$ in den Galerkin-Gleichungen (2.20) durch, so ergibt sich
$$\int_\Omega b \cdot \nabla w_k dx = \int_\Omega f w_k dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Da (w_k) eine Basis in $H_0^1(\Omega)$ ist, gilt diese Beziehung auch für alle $v \in H_0^1(\Omega)$:
$$\int_\Omega b \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx. \tag{2.24}$$
Wir benutzen nun die Monotonie von a und (2.21):
$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega \big(a(\nabla u_m) - a(\nabla v)\big) \cdot (\nabla u_m - \nabla v) dx \\ &= \int_\Omega \big(f u_m - a(\nabla u_m) \cdot \nabla v - a(\nabla v) \cdot (\nabla u_m - \nabla v)\big) dx, \end{aligned}$$
wobei $v \in H_0^1(\Omega)$. Die obigen Konvergenzresultate erlauben den Grenzwert $m' \to \infty$:
$$0 \leq \int_\Omega \big(f u - b \cdot \nabla v - a(\nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v)\big) dx.$$
Der Trick besteht darin, dass wir den Ausdruck $a(\nabla u_m) \cdot \nabla u_m$, dessen Grenzwert nicht unmittelbar bestimmt werden kann, da $a(\nabla u_m)$ und ∇u_m nur schwach konvergieren, mittels der Gleichung (2.21) durch $f u_m$ ersetzt haben. Wir wählen nun $v = u$ in (2.24), können also fu durch $b \cdot \nabla u$ ersetzen und erhalten
$$0 \leq \int_\Omega (b - a(\nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx.$$
Seien $w \in H_0^1(\Omega)$ und $v = u \pm \lambda w$ für $\lambda > 0$. Dann ist
$$0 \leq \mp \int_\Omega (b - a(\nabla u \pm \lambda \nabla w)) \cdot \nabla w dx.$$
Der Grenzwert $\lambda \to 0$ ergibt dann
$$0 \leq \mp \int_\Omega (b - a(\nabla u)) \cdot \nabla w dx,$$

also Gleichheit:

$$0 = \int_\Omega (b - a(\nabla u)) \cdot \nabla w dx \quad \text{für alle } w \in H_0^1(\Omega).$$

Wir schließen $b = a(\nabla u)$. Dies endet den Beweis. □

Wir können die Eindeutigkeit der Lösung von (2.19) beweisen, wenn a stark monoton ist.

Theorem 2.21 (Eindeutigkeit für quasilineare Gleichungen). *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.19. Ferner sei a stark monoton. Dann existiert genau eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (2.19).*

Beweis. Seien u_1 und u_2 schwache Lösungen von (2.19). Dann gilt für alle $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega a(\nabla u_i) \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \quad i = 1, 2.$$

Wir subtrahieren beide Gleichungen für $i = 1$ und $i = 2$ und verwenden $v = u_1 - u_2$ als Testfunktion:

$$0 = \int_\Omega \big(a(\nabla u_1) - a(\nabla u_2)\big) \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) dx \geq \gamma \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx,$$

wobei wir für die Ungleichung die strenge Monotonie von a benutzt haben. Dies impliziert $\nabla(u_1 - u_2) = 0$ in Ω und wegen $u_1 - u_2 = 0$ auf $\partial\Omega$ dann $u_1 - u_2 = 0$ in Ω. □

Der Eindeutigkeitsbeweis lässt vermuten, dass auch ein Vergleichsprinzip bewiesen werden kann. Dies ist tatsächlich der Fall.

Proposition 2.22. *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.19. Ferner sei a stark monoton. Wir setzen $L(u) = -\operatorname{div} a(\nabla u)$. Sind $u, v \in H^1(\Omega)$ zwei Funktionen mit*

$$L(u) \leq L(v) \quad \text{in } \Omega, \quad u \leq v \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

so folgt $u \leq v$ in Ω.

Beweis. Die Ungleichung $L(u) \leq L(v)$ bedeutet in schwacher Formulierung

$$\int_\Omega a(\nabla u) \cdot \nabla w dx \leq \int_\Omega a(\nabla v) \cdot \nabla w dx \quad \text{für alle } w \in H_0^1(\Omega) \text{ mit } w \geq 0.$$

Dies kann geschrieben werden als

$$\int_\Omega \big(a(\nabla u) - a(\nabla v)\big) \cdot \nabla w dx \leq 0.$$

Die Funktion $w = (u - v)^+ = \max\{0, u - v\}$ erfüllt $w = 0$ auf $\partial\Omega$, da dort $u - v \le 0$ vorausgesetzt wurde. Wegen des Satzes 2.13 von Stampacchia ist also $w \in H_0^1(\Omega)$ eine zulässige Testfunktion. Aus der strengen Monotonie folgt daher

$$\begin{aligned} 0 &\ge \int_{\{u>v\}} \big(a(\nabla u) - a(\nabla v)\big) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx \\ &\ge \gamma \int_{\{u>v\}} |\nabla u - \nabla v|^2 = \gamma \int_\Omega |\nabla (u-v)^+|^2 dx. \end{aligned}$$

Wir schließen, dass $\nabla(u - v)^+ = 0$, also $(u - v)^+ = \text{const.}$ in Ω. Wegen $(u - v)^+ = 0$ auf $\partial\Omega$ ist $(u - v)^+ = 0$ und folglich $u \le v$ in Ω. □

Bemerkung. Der obige Existenzsatz kann leider nicht auf die Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\Big) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

angewendet werden, da $a(p) = p/\sqrt{1 + |p|^2}$ nicht koerziv ist. Allerdings ist es möglich, die Eindeutigkeit von Lösungen zu zeigen (siehe Übungsaufgaben). □

2.4 Drift-Diffusionsgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir die stationären Drift-Diffusionsgleichungen für Halbleiter:

$$\operatorname{div}(\nabla u - u\nabla\phi) = 0, \quad \Delta\phi = u - f(x) \quad \text{in } \Omega \tag{2.25}$$

mit den Randbedingungen

$$u = g, \quad \phi = \psi \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2.26}$$

Physikalisch ist u eine Teilchendichte (und wir erwarten, dass $u \ge 0$ gilt) und ϕ das elektrische Potential. Es handelt sich um ein System von *nichtlinearen* elliptischen Gleichungen, denn der Ausdruck $u\nabla\phi$ ist nichtlinear. Wir können die Existenz von Lösungen für dieses System zeigen, indem wir einen Fixpunktsatz verwenden. Das Hauptresultat lautet wie folgt:

Theorem 2.23 (Existenz für die Drift-Diffusionsgleichungen). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \ge 1$) ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, $f \in L^\infty(\Omega)$ mit $0 < f_* \le f(x) \le f^*$ für $x \in \Omega$, $g, \psi \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ mit $0 < g_* \le g(x) \le g^*$ für $x \in \partial\Omega$. Dann existiert eine Lösung $(u, \phi) \in (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2$ von* (2.25)-(2.26) *mit*

$$\frac{1}{Me^K} \le u \le Me^K, \quad -K \le \phi \le K \quad \text{in } \Omega,$$

wobei

$$M = e^{\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}} \max\{g^*, 1/g_*\},$$
$$M_0 = \max\{\ln(Mf^*), \ln(M/f_*)\},$$
$$K = \max\{M_0, \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}\}.$$

Die schwache Formulierung von (2.25)-(2.26) lautet wie folgt: Suche $(u, \phi) \in H^1(\Omega)^2$ mit $u = g$ und $\phi = \psi$ auf $\partial\Omega$, so dass für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega u \nabla\phi \cdot \nabla v dx, \quad \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla v dx = -\int_\Omega (u - f(x)) v dx. \tag{2.27}$$

Alle Integrale bis auf eines sind wohldefiniert. Damit der Driftterm $\int_\Omega u\nabla\phi \cdot \nabla v dx$ für Testfunktionen $v \in H_0^1(\Omega)$ definiert ist, müssen wir $u \in L^\infty(\Omega)$ fordern.

Der Driftterm bereitet einige mathematische Schwierigkeiten. Daher führen wir eine Variablentransformation ein, die die erste Gleichung in (2.25) in eine symmetrische Form überführt. Genauer definieren wir die sogenannte *Slotboom-Variable* $v = e^{-\phi}u$. Dann ist

$$\nabla v = e^{-\phi}(\nabla u - u\nabla\phi) \quad \text{und} \quad 0 = \operatorname{div}(\nabla u - u\nabla\phi) = \operatorname{div}(e^\phi \nabla v).$$

Wir lösen also das System

$$\operatorname{div}(e^\phi \nabla v) = 0, \quad \Delta\phi = e^\phi v - f(x) \quad \text{in } \Omega \tag{2.28}$$

mit den Randbedingungen

$$v = v_D := e^{-\psi} g, \quad \phi = \psi \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2.29}$$

Jede Lösung dieses Systems $(v, \phi) \in (H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))^2$ definiert vermittels $u = e^\phi v$ eine schwache Lösung des Originalproblems (2.25)-(2.26). Der Vorteil von (2.28) besteht darin, dass die erste Gleichung einen symmetrischen Differentialoperator in v definiert. Dies wird es erlauben, auf einfache Weise Abschätzungen in $H^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ herzuleiten. Üblicherweise hängen diese Abschätzungen (wegen des Diffusionskoeffienten e^ϕ) von ϕ ab. Andererseits hängt ϕ von v ab. Mittels einer Abschneidetechnik wird es uns gelingen, Abschätzungen zu gewinnen, die nicht von v oder ϕ abhängen.

Beweis von Satz 2.23. Um geeignete L^∞-Abschätzungen herzuleiten, verwenden wir die *Abschneidemethode nach Stampacchia*, d.h., wir lösen zunächst das System

$$\operatorname{div}(e^\phi \nabla v) = 0, \quad \Delta\phi = e^\phi v_M - f(x) \quad \text{in } \Omega, \tag{2.30}$$

wobei

$$v_M = \begin{cases} 1/M & : v \le 1/M \\ v & : 1/M < v < M \\ M & : v \ge M. \end{cases}$$

Diese Definition stellt sicher, dass $v_M \in L^\infty(\Omega)$. Wir zerlegen den Beweis nun in mehrere Schritte.

Schritt 1: Konstruktion des Fixpunktoperators. Sei $\widetilde{v} \in L^2(\Omega)$ gegeben und löse

$$-\Delta\phi = -e^\phi \widetilde{v}_M(x) + f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad \phi = \psi \quad \text{auf } \partial\Omega. \tag{2.31}$$

Schreiben wir $F(x,\phi) = -e^\phi \widetilde{v}_M(x) + f(x)$, so erkennen wir, dass die Differentialgleichung semilinear ist. Wir behaupten, dass der Existenzsatz 2.16 anwendbar ist. Dazu ist folgendes zu zeigen:

- F ist eine Carathéodory-Funktion, denn $\phi \mapsto e^\phi$ ist stetig und sowohl $\widetilde{v}_M$ als auch f sind integrierbar.
- Die Funktion $\phi \mapsto -e^\phi \widetilde{v}_M(x) + f(x)$ ist monoton fallend.
- Nach Konstruktion von v_M und Definition von M_0 folgt

$$F(x, M_0) \le -e^{M_0}\frac{1}{M} + f^* \le 0 \quad \text{und} \quad F(x, -M_0) \ge -e^{-M_0}M + f_* \ge 0.$$

- Es gilt für alle $|\phi| \le M_0$: $|F(x,\phi)| \le e^{M_0}M + f^* \in L^\infty(\Omega)$.

Die Voraussetzungen von Satz 2.16 sind also erfüllt und wir folgern die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $\phi \in H^1(\Omega)$ von (2.31) mit den A-priori-Abschätzungen

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \le K = \max\{M_0, \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}\}, \quad \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \le C_1(f,\psi,M). \tag{2.32}$$

Als nächstes lösen wir für gegebenes $\sigma \in [0,1]$

$$\operatorname{div}(e^\phi \nabla v) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad v = \sigma v_D \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dies entspricht einem elliptischem Problem mit dem Diffusionskoeffizienten $A(x) = e^{\phi(x)}$. Wegen $A(x) \ge e^{-K} > 0$ ist das Problem gleichmäßig elliptisch und wir erhalten eine eindeutige Lösung $v \in H^1(\Omega)$ mit

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \le C_2(K)\|v_D\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.33}$$

Dies definiert den Fixpunktoperator $S : L^2(\Omega) \times [0,1] \to L^2(\Omega)$, $S(\widetilde{v},\sigma) = v$. Es folgt sofort, dass $S(\widetilde{v}, 0) = 0$.

Schritt 2: Stetigkeit von S. Seien $\widetilde{v}_k \to \widetilde{v}$ in $L^2(\Omega)$ und $\sigma_k \to \sigma$ für $k \to \infty$ zwei konvergente Folgen und definiere $v_k = S(\widetilde{v}_k, \sigma_k)$. Sei ferner ϕ_k die Lösung des Poisson-Problems (2.31) mit $(\widetilde{v}_k)_M$. Die obigen A-priori-Abschätzungen zeigen, dass (v_k) und (ϕ_k) beschränkt in $H^1(\Omega)$ sind. Außerdem ist (ϕ_k) beschränkt in $L^\infty(\Omega)$. Es gibt also Teilfolgen mit

$$\begin{aligned} v_{k'} &\rightharpoonup v \quad \text{in } H^1(\Omega), \quad v_{k'} \to v \quad \text{in } L^2(\Omega), \\ \phi_{k'} &\rightharpoonup \phi \quad \text{in } H^1(\Omega), \quad \phi_{k'} \to \phi \quad \text{in } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Es gilt nun folgendes Lemma, dessen Beweis eine Übungsaufgabe ist.

Lemma 2.24. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 \le p < \infty$, (u_k) eine Folge mit $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$ und $f \in C^0(\mathbb{R})$. Es sei (u_k) beschränkt in $L^\infty(\Omega)$ oder f beschränkt in $\mathbb{R}$. Dann folgt $f(u_k) \to f(u)$ in $L^p(\Omega)$.*

Wir folgern, dass $e^{\phi_{k'}} \to e^\phi$ in $L^2(\Omega)$. Außerdem gilt $(\widetilde{v}_{k'})_M \to \widetilde{v}_M$ in $L^2(\Omega)$. Das Produkt konvergiert dann in $L^1(\Omega)$, d.h. $e^{\phi_{k'}}(\widetilde{v}_{k'})_M \to e^\phi \widetilde{v}_M$ in $L^1(\Omega)$. Damit können wir in der schwachen Formulierung

$$\int_\Omega \nabla\phi_{k'} \cdot \nabla w dx = -\int_\Omega \big(e^{\phi_{k'}}(\widetilde{v}_{k'})_M - f(x)\big) w dx, \quad w \in C_0^\infty(\Omega),$$

zum Grenzwert $k' \to \infty$ übergehen und erhalten

$$\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla w dx = -\int_\Omega \big(e^{\phi}\widetilde{v}_M - f(x)\big) w dx, \quad w \in C_0^\infty(\Omega).$$

Derselbe Grenzwert in

$$\int_\Omega e^{\phi_{k'}} \nabla v_{k'} \cdot \nabla w dx = 0, \quad w \in C_0^\infty(\Omega),$$

liefert

$$\int_\Omega e^{\phi} \nabla v \cdot \nabla w dx = 0, \quad w \in C_0^\infty(\Omega),$$

denn $e^{\phi_{k'}}$ konvergiert stark in $L^2(\Omega)$ und $\nabla v_{k'}$ konvergiert schwach in $L^2(\Omega)$, so dass das Produkt schwach in $L^1(\Omega)$ konvergiert. Die schwache Formulierung gilt nur für alle $w \in C_0^\infty(\Omega)$, aber mit einem Dichtheitsargument können wir zeigen, dass sie tatsächlich für alle $w \in H_0^1(\Omega)$ gilt. Wir haben also gezeigt, dass $v = S(\widetilde{v}, \sigma)$ und $S(\widetilde{v}_{k'}, \sigma_{k'}) = v_{k'} \to v = S(\widetilde{v}, \sigma)$ in $L^2(\Omega)$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts konvergiert die gesamte Folge. Dies beweist die Stetigkeit von S. Die Kompaktheit der Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ impliziert mit der Abschätzung (2.33) die Kompaktheit von S.

Schritt 3: A-priori-Abschätzungen. Sei $v \in H^1(\Omega)$ ein Fixpunkt von $S(\cdot, \sigma)$. Die Definition von M ergibt $M \ge e^{-\psi} g = v_D$ und daher $(v - M)^+ = 0$ auf $\partial\Omega$, so dass $(v - M)^+ \in H_0^1(\Omega)$ eine zulässige Testfunktion für die erste Gleichung von (2.30) ist:

$$0 = \int_\Omega e^\phi \nabla v \cdot \nabla (v - M)^+ dx = \int_\Omega e^\phi |\nabla (v - M)^+|^2 dx,$$

also $(v - M)^+ = 0$ und $v \le M$ in Ω. In ähnlicher Weise ergibt sich wegen $1/M \le e^{-\psi} g$ mit der Testfunktion $(v - 1/M)^-$ die Folgerung $(v - 1/M)^- = 0$ und $v \ge 1/M$ in Ω. Dies zeigt $v_M = v$. Ferner erhalten wir eine gleichmäßige L^∞- und damit L^2-Abschätzung für alle Fixpunkte von $S(\cdot, \sigma)$.

Schritt 4: Ende des Beweises. Nach dem Fixpunktsatz von Leray-Schauder erhalten wir die Existenz eines Fixpunktes v von $S(\cdot, 1)$. Dann löst (v, ϕ), wobei ϕ durch die Poisson-Gleichung definiert ist, das Randwertproblem (2.29) und (2.30). Wegen $1/M \le v \le M$ löst (v, ϕ) sogar das Problem (2.28)-(2.29). $\square$

Sind die Randdaten und der Rand des Gebiets regulärer, so können wir folgendes Regularitätsresultat beweisen.

Proposition 2.25. *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.23. Seien $\partial\Omega \in C^\infty$, f, g, $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Dann ist jede beschränkte schwache Lösung von* (2.25)-(2.26) *eine klassische Lösung.*

Beweis. Der Beweis illustriert die sogenannte *Bootstrapping-Technik*. Eine schwache Lösung von (2.25)-(2.26) erfüllt

$$\Delta\phi = u - f(x) \in L^\infty(\Omega), \quad \Delta u = \operatorname{div}(u\nabla\phi) = \nabla u \cdot \nabla\phi + u\Delta\phi.$$

Nach Satz 2.7 erhalten wir $\phi \in W^{2,p}(\Omega)$ für jedes $p < \infty$. Dies impliziert insbesondere $|\nabla\phi| \in L^\infty(\Omega)$ und damit $\Delta u \in L^2(\Omega)$. Derselbe Satz ergibt $u \in H^2(\Omega)$. Ferner gilt für alle $i = 1, \ldots, n$

$$\Delta\partial_i\phi = \partial_i u - \partial_i f \in L^2(\Omega),$$

und Satz 2.7 impliziert $\partial_i\phi \in H^2$, also $\phi \in H^3(\Omega)$. Außerdem gilt für hinreichend großes $p < \infty$:

$$\Delta\partial_i u = \underbrace{\nabla\partial_i u}_{\in L^2(\Omega)} \cdot \underbrace{\nabla\phi}_{\in L^\infty(\Omega)} + \underbrace{\nabla u}_{\in H^1(\Omega)} \cdot \underbrace{\nabla\partial_i\phi}_{\in L^p(\Omega)} + \underbrace{\partial_i u}_{\in H^1(\Omega)} \cdot \underbrace{\Delta\phi}_{\in L^p(\Omega)} + \underbrace{u}_{\in L^\infty(\Omega)} \cdot \underbrace{\Delta\partial_i\phi}_{L^2(\Omega)} \in L^2(\Omega)$$

mit den Randbedingungen $\partial_i u = \partial_i g$ auf $\partial\Omega$, und damit $\partial_i u \in H^2(\Omega)$ oder $u \in H^3(\Omega)$. Diese Argumentation können wir fortsetzen, bis wir u, $\phi \in H^m(\Omega)$ erhalten, wobei m so groß ist, dass aus dem Einbettungssatz von Sobolev u, $\phi \in C^2(\overline{\Omega})$ folgt.

Schließlich können wir die Frage stellen, ob das System (2.25)-(2.26) eindeutig lösbar ist. Dies ist im allgemeinen *nicht* der Fall. Dies ist nicht überraschend, denn es gibt Halbleiterbauteile (Thyristoren), deren Funktionsweise darauf basiert, dass es mehrere Zustände gibt. Für hinreichend kleine angelegte Spannungen (d.h. “kleines” $|\nabla\psi|$) kann die Eindeutigkeit von Lösungen bewiesen werden. Der Fall $\nabla\psi = 0$ ist besonders einfach und wird in den Übungsaufgaben betrachtet.

3 Nichtlineare parabolische Gleichungen

In diesem Kapitel stellen wir Techniken vor, mit denen semilineare Gleichungen vom Typ
$$u_t - \Delta u = f(x,u)$$
oder quasilineare Gleichungen vom Typ
$$u_t - \operatorname{div}(a(u)\nabla u) = f(x,t)$$
analysiert werden können. Wie im vorigen Kapitel verwenden wir wegen der Nichtlinearitäten die Fixpunktsätze von Schauder bzw. Leray-Schauder. Die in diesen Sätzen geforderte Kompaktheit schließen wir aus A-priori-Abschätzungen. Bei zeitabhängigen Gleichungen können wir in einigen Fällen auch den Fixpunktsatz von Banach verwenden, für den keine Kompaktheit notwendig ist und der zugleich die Eindeutigkeit der Lösungen liefert.

Um schwache Lösungen parabolischer Gleichungen definieren zu können, benötigen wir Sobolevräume in Ort und Zeit. Daher beginnen wir mit einem Abschnitt, in dem wir einige Ergebnisse über derartige Räume wiederholen bzw. vertiefen.

3.1 Sobolevräume in Ort und Zeit

Lösungen parabolischer Gleichungen sind Funktionen in Ort und Zeit. Da die Regularität im Ort von der in der Zeit verschieden sein kann (und im allgemeinen verschieden ist), benötigen wir Sobolevräume, die zwischen der Orts- und Zeitvariable unterscheiden. Wir fassen eine Lösung $u(x,t)$ für fast alle $t > 0$ als eine Funktion $u(t) : \Omega \to \mathbb{R}$ auf, die in einem Banachraum B liegt. Dies führt zu einer Definition von Räumen der Form $C^k([0,T];B)$, $L^p(0,T;B)$ bzw. $W^{m,p}(0,T;B)$. Diese Notationen bedeuten, dass $u(t) \in B$ und $t \mapsto u(t)$ stetig differenzierbar, integrierbar bzw. schwach differenzierbar ist. Genauer definieren wir die folgenden *Räume banachraumwertiger Funktionen*.

Definition 3.1. *Seien B ein Banachraum und $T > 0$. Wir definieren:*

(i) *Der Raum $C^k([0,T];B)$ ist die Menge aller Funktionen $u : [0,T] \to B$, die k-mal stetig differenzierbar sind. Die Norm ist gegeben durch*
$$\|u\|_{C^k([0,T];B)} = \sum_{i=0}^{k} \max_{0\le t\le T} \|u^{(i)}(t)\|_B.$$

(ii) *Der Raum $L^p(0,T;B)$ ist die Menge aller (Äquivalenzklassen von) messbaren Funk-*

tionen $u : (0,T) \to B$, für die gilt:

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} = \Big(\int_0^T \|u(t)\|_B^p dt \Big)^{1/p} < \infty \quad \textit{für } 1 \le p < \infty \textit{ und}$$
$$\|u\|_{L^\infty(0,T;B)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \|u(t)\|_B < \infty.$$

Die oben definierten Räume sind allesamt Banachräume. Ist H ein Hilbertraum, so ist $L^2(0,T;H)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(t),v(t))_H dt, \quad u,v \in L^2(0,T;H).$$

Für den Dualraum von $L^p(0,T;B)$ gilt das folgende Resultat (für einen Beweis siehe Zeidler [23, Prop. 23.7 und Excercise 23.12d]).

Proposition 3.2. *Seien B ein reflexiver und separabler Banachraum, $1 \le p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$. Dann können wir den Dualraum von $L^p(0,T;B)$ mit $L^q(0,T;B')$ identifizieren:*

$$(L^p(0,T;B))' = L^q(0,T;B').$$

Wenn $B = L^p(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$, dann können wir $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ mit $L^p(\Omega \times (0,T))$ identifizieren. Dies gilt *nicht* für $p = \infty$ (siehe [16, Example 1.42]). Der Raum $L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ ist kleiner als $L^\infty(\Omega \times (0,T))$. Der Grund ist wie folgt: Eine Funktion $u \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ hat die Eigenschaft, dass $u : (0,T) \to L^\infty(\Omega)$ messbar ist bezüglich $L^\infty(\Omega)$, während $u \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$ lediglich Lebesgue-messbar auf $\Omega \times (0,T)$ ist. Ist $u \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$ $L^\infty(\Omega)$-messbar, so folgt $u \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$.

Wir erinnern, in welchem Sinne wir für parabolische Gleichungen schwache Lösungen definieren können. Sei u eine klassische Lösung von

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(\cdot,0) = u_0 \quad \text{in } \Omega,$$

wobei f eine reguläre Funktion sei. Multipliziere die Differentialgleichung mit einer Testfunktion $w \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T))$, integriere über $\Omega \times (0,T)$ und integriere partiell:

$$\int_0^T (u_t, w)_{L^2} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w dx dt = \int_0^T \int_\Omega f w dx dt.$$

Eine schwache Lösung sollte einmal schwach bezüglich x differenzierbar sein, also $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ für fast alle t. Die Funktion $t \mapsto \nabla u(t)$ sollte quadratintegrabel sein. Dies bedeutet $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Die Zeitableitung erfüllt die Gleichung $u_t(t) = \Delta u(t) + f(t) \in H^{-1}(\Omega)$. Andererseits sollte $t \mapsto u_t(t)$ für fast alle t quadratintegrabel sein, damit das Integral über t Sinn macht. Wir fordern also $u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Dies heißt, dass $u(t)$ und $u_t(t)$ in verschiedenen Banachräumen liegen. Eine Verallgemeinerung dieses Konzepts führt auf sogenannte Evolutionstripel.

Seien dazu ein separabler Hilbertraum H und ein reflexiver, separabler Banachraum V gegeben, wobei die Einbettung $V \hookrightarrow H$ stetig und dicht sei. (Ein typisches Beispiel ist $H = L^2(\Omega)$ und $V = H_0^1(\Omega)$.) Nach Proposition 1.8 ist dann die Einbettung $H' \hookrightarrow V'$ stetig und dicht. Wir können mit Hilfe der Riesz-Abbildung den Raum H und seinen Dualraum H' identifizieren. Insbesondere gilt

$$\langle u, v\rangle_{V'} = (u, v)_H \quad \text{für } u \in H,\ v \in V.$$

Damit erhalten wir die folgende Inklusionskette:

$$V \hookrightarrow H \simeq H' \hookrightarrow V'.$$

Ein solches Tripel (V, H, V') nennen wir ein Evolutionstripel. Wir fassen zusammen:

Definition 3.3. *Seien H ein separabler Hilbertraum und V ein reflexiver, separabler Banachraum mit stetiger und dichter Einbettung $V \hookrightarrow H$. Dann heißt das Tripel $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ein* Gelfand-Tripel *oder* Evolutionstripel.

Ein Beispiel für ein Evolutionstripel ist gegeben durch

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

Wir suchen also allgemein schwache Lösungen parabolischer Gleichungen mit $u \in L^2(0, T; V)$ und $u_t \in L^2(0, T; V')$. Wir definieren daher für $1 < p < \infty$:

$$W^{1,p}(0, T; V, H) = \{u \in L^p(0, T; V) : u_t \in L^q(0, T; V')\}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Für diesen Raum gelten folgende Eigenschaften.

Proposition 3.4. *Seien $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ein Evolutionstripel und $1 < p < \infty$.*

(i) *Der Raum $W = W^{1,p}(0, T; V, H)$ ist mit der Norm*

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u_t\|_{L^q(0,T;V')}, \quad u \in W,$$

ein Banachraum.

(ii) *Der Raum $C^1([0, T]; V)$ ist dicht in $W^{1,p}(0, T; V, H)$.*

(iii) *Die Einbettung $W^{1,p}(0, T; V, H) \hookrightarrow C^0([0, T]; H)$ ist stetig (ggf. nach Auswahl eines geeigneten Repräsentanten).*

(iv) *Sei $u \in W^{1,p}(0, T; V, H)$. Dann ist die Abbildung $t \mapsto \|u(t)\|_H$ absolut stetig (also insbesondere fast überall differenzierbar), und es gilt*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2\langle u_t(t), u(t)\rangle_{V'} \quad \text{für fast alle } 0 < t < T.$$

Beweis. (i) Siehe Evans [10, Seite 287] oder Zeidler [23, Prop. 23.23(iv)].

(ii) Siehe Emmrich [9, Satz 8.1.9].

(iii) Wir zeigen nur, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für alle $u \in W^{1,p}(0,T; V,H)$ gilt

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H)} \le C\big(\|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u_t\|_{L^q(0,T;V')}\big).$$

Sei zunächst $u \in C^1([0,T];V)$. Dann gilt für alle $t, t^* \in [0,T]$:

$$\|u(t)\|_H^2 = \|u(t^*)\|_H^2 + 2\int_{t^*}^t (u_t(s), u(s))_H ds. \tag{3.1}$$

Es gibt ein $t^* \in [0,T]$, so dass

$$\|u(t^*)\|_H^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \|u(s)\|_H^2 ds. \tag{3.2}$$

Wegen $u_t(s) \in V \subset H \subset V'$ können wir schreiben:

$$(u_t(s), u(s))_H = \langle u_t(s), u(s)\rangle_{V'} \le \|u_t(s)\|_{V'}\|u(s)\|_V.$$

Setzen wir diese Ungleichung sowie (3.2) in (3.1) ein, so erhalten wir mit der Hölder- und dann der Young-Ungleichung

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_H^2 &\le \frac{1}{T}\int_0^T \|u(s)\|_H^2 ds + 2\int_0^T \|u_t(s)\|_{V'}\|u(s)\|_V ds \\ &\le \frac{1}{T}\|u\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|u\|_{L^p(0,T;V)}^2 + \|u_t\|_{L^q(0,T;V')}^2.\end{aligned}$$

Ist nun $p \ge 2$, so ergibt die Einbettung $L^p(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;H)$ die Behauptung. Anderenfalls verwenden wir die Interpolationsungleichung (die aus der Hölder-Ungleichung folgt)

$$\int_0^T \|u\|_H^2 dt \le \sup_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_H^{2-p}\int_0^T \|u\|_H^p dt \le \varepsilon\|u\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + C_1(\varepsilon)\Big(\int_0^T \|u\|_H^p dt\Big)^{2/p},$$

aus der

$$\|u(t)\|_H^2 \le \varepsilon\|u\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + C_2(\varepsilon)\|u\|_{L^p(0,T;V)}^2 + \|u_t\|_{L^q(0,T;V')}^2$$

folgt. Nehmen wir das Supremum über $t \in (0,T)$ und wählen wir $\varepsilon < 1$, so absorbiert die linke Seite den ersten Term auf der rechten Seite, und die Behauptung folgt, da $C^1([0,T];V)$ nach (ii) dicht in $W^{1,p}(0,T;V,H)$ liegt.

(iv) Folgt aus (3.1) nach dem Grenzwertübergang $t^* \to t$ und einem Dichtheitsargument. □

Die Eigenschaft (iii) des obigen Satzes sagt aus, dass eine schwache Lösung einer parabolischen Gleichung, die ein Element von $W^{1,p}(0,T;V,H)$ ist, den Anfangswert $u(0) = u_0$ im Sinne von H erfüllt.

Ist (u_k) eine Folge, so dass (u_k) in $L^p(0,T;V)$ und $(\partial_t u_k)$ in $L^q(0,T;V')$ mit $1/p + 1/q = 1$ beschränkt sind, so existiert eine Teilfolge mit den Eigenschaften

$$u_{k'} \rightharpoonup u \quad \text{in } L^p(0,T;V), \quad \partial_t u_{k'} \rightharpoonup \partial_t u \quad \text{in } L^q(0,T;V') \quad \text{für } k' \to \infty.$$

Wir haben bereits im vorigen Kapitel gesehen, dass bei nichtlinearen Gleichungen schwache Konvergenz im allgemeinen nicht ausreicht, um in den Nichtlinearitäten zum Grenzwert überzugehen. Allerdings ist unter den oben getroffenen Voraussetzungen die Folge (u_k) sogar in $L^p(0,T;H)$ kompakt, sofern $V \hookrightarrow H$ kompakt ist.

Theorem 3.5 (Lemma von Aubin). *Seien $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ein Evolutionstripel und $1 < p < \infty$. Die Einbettung $V \hookrightarrow H$ sei kompakt. Dann ist die Einbettung $W^{1,p}(0,T;V,H) \hookrightarrow L^p(0,T;H)$ kompakt.*

Für einen Beweis siehe zum Beispiel Showalter [19, Seite 106f.]. Beachte, dass die Einbettung $L^p(0,T;V) \hookrightarrow L^p(0,T;H)$ im allgemeinen *nicht* kompakt ist, selbst wenn $V \hookrightarrow H$ kompakt ist. Vielmehr ist eine zusätzliche Information über die Zeitableitung notwendig. Das Lemma von Aubin sagt aus, dass wenn (u_k) in $L^p(0,T;V)$ und $(\partial_t u_k)$ in $L^q(0,T;V')$ mit $1 < p < \infty$ beschränkt sind, dann existiert eine Teilfolge mit

$$u_{k'} \to u \quad \text{in } L^p(0,T;H) \quad \text{für } k' \to \infty.$$

Diese starke Konvergenz wird in vielen Fällen genügen, um in den Nichtlinearitäten den Grenzwert durchführen zu können.

Bemerkung. Das Lemma von Aubin gilt auch in der folgenden allgemeineren Version: Seien X, B, Y Banachräume mit kompakter Einbettung $X \hookrightarrow B$ und stetiger Einbettung $B \hookrightarrow Y$. Seien ferner $U \subset L^p(0,T;X)$ und $\{\partial u/\partial t : u \in U\} \subset L^r(0,T;Y)$ beschränkt, wobei entweder $1 \le p < \infty$, $r = 1$ oder $p = \infty$, $r > 1$. Dann ist U relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$.

3.2 Semilineare Gleichungen

Wir suchen in diesem Abschnitt Lösungen des semilinearen Anfangsrandwertproblems

$$u_t + L(u) = f(x,t,u) \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \tag{3.3}$$

Wir machen die folgenden Voraussetzungen: Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, der Differentialoperator $L(u)$ sei definiert durch

$$L(u) = -\operatorname{div}(A\nabla u) + cu,$$

wobei $A(x) = (a_{ij}(x))$ eine $(n \times n)$-Matrix und $c(x)$ eine Funktion seien. Ferner sei A symmetrisch und elliptisch. Außerdem gelte $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ und $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c \geq 0$ in Ω und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Schließlich sei die Funktion f eine Carathéodory-Funktion (d.h. messbar in (x,t) und stetig in u) und $(x,t) \mapsto f(x,t,u)$ sei für alle $u \in \mathbb{R}$ integrierbar.

Die folgenden Resultate gelten auch für zeitabhängige Funktionen A und c und inhomogene Dirichlet-Randbedingungen unter geeigneten Voraussetzungen. Wir verzichten auf die Darstellung der allgemeineren Situation, um die Präsentation nicht mit einer Vielzahl von Voraussetzungen zu überladen. Zuerst klären wir den Begriff der schwachen Lösung für (3.3).

Definition 3.6. *Seien $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ein Evolutionstripel und $T > 0$. Wir nennen u eine* schwache Lösung *von* (3.3), *wenn*

(i) *$u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ und $f(\cdot,\cdot,u) \in L^2(\Omega \times (0,T))$;*

(ii) *für alle $v \in L^2(0,T;V)$ gilt*

$$\int_0^T \langle u_t, v \rangle_{H^{-1}} dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla u^T A \nabla v + cuv) dxdt = \int_0^T \int_\Omega f(x,t,u) v dxdt;$$

(iii) *$u(\cdot,0) = u_0$ fast überall in Ω.*

Für *lineare* parabolische Gleichungen erinnern wir an das folgende Existenzresultat.

Theorem 3.7 (Existenz für lineare Gleichungen). *Es gelten die zu Beginn dieses Abschnitts gemachten Voraussetzungen. Ferner seien $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$ und $T > 0$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte schwache Lösung $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ von*

$$u_t + L(u) = f(x,t) \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega$$

in Sinne der Definition 3.6.

Wenn die Nichtlinearität $f(x,t,u)$ lipschitzstetig in u ist, können wir die Existenz von Lösungen von (3.3) beweisen.

Theorem 3.8 (Globale Existenz und Eindeutigkeit für semilineare Gleichungen). *Es gelten die zu Beginn dieses Abschnitts gemachten Voraussetzungen. Ferner sei $T > 0$, $f(\cdot,\cdot,0) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, und f sei lipschitzstetig in u gleichmäßig in (x,t), d.h., es existiert ein $L > 0$, so dass für alle $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$ und $u, v \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|f(x,t,u) - f(x,t,v)| \leq L|u - v|.$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte schwache Lösung von (3.3) *im Sinne von Definition 3.6.*

Beweis. Die Beweisidee lautet, den Fixpunktsatz von Banach (siehe Abschnitt 2.1) mit dem Raum $X = C^0([0,T^*];L^2(\Omega))$ anzuwenden. Es wird sich herausstellen, dass der Fixpunktoperator nur dann eine Kontraktion ist, wenn wir $T^* > 0$ hinreichend klein wählen. Damit folgt Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung im Zeitintervall $[0,T^*]$. Da T^* unabhängig von u gewählt werden kann, können wir dann die Lösung auf $[0,T]$ fortsetzen.

Schritt 1: Definition des Fixpunktoperators. Sei $v \in X$. Die Lipschitzstetigkeit von f impliziert $|f(x,t,v)| \leq C(1+|v|) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Nach Satz 3.7 existiert also eine eindeutig bestimmte schwache Lösung $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ von

$$u_t + L(u) = f(x,t,v(x,t)) \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega.$$

Nach Proposition 3.4 gilt $u \in X$. Dies definiert den Fixpunktoperator $S : X \to X$, $S(v) = u$. Wir müssen zeigen, dass S eine Kontraktion ist.

Schritt 2: S ist eine Kontraktion. Seien v_1, $v_2 \in X$ und $u_1 = S(v_1)$, $u_2 = S(v_2)$. Die Funktion $u_1 - u_2$ löst die Gleichung

$$(u_1-u_2)_t + L(u_1-u_2) = f(x,t,v_1) - f(x,t,v_2) \quad \text{in } \Omega,\ t>0, \quad (u_1-u_2)(0) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Verwenden wir die Testfunktion $u_1 - u_2 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ in der schwachen Formulierung dieser Gleichung und die Elliptizität von A, so folgt für $t \in (0,T^*)$

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle (u_1-u_2)_t, u_1-u_2\rangle_{V'} ds &+ \int_0^t \int_\Omega \big(\alpha|\nabla(u_1-u_2)|^2 + c(u_1-u_2)^2\big)dxds \\ &\leq \int_0^t \int_\Omega \big(f(x,s,v_1) - f(x,s,v_2)\big)(u_1-u_2)dxds.\end{aligned}$$

Nach Proposition 3.4 (iv) und wegen $(u_1-u_2)(0) = 0$ können wir das erste Integral auf der linken Seite schreiben als $\frac{1}{2}\|(u_1-u_2)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$. Die Lipschitzstetigkeit von f und die Poincaré-Ungleichung ergeben also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|(u_1-u_2)(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \alpha\int_0^t\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^2 dxds \\ &\leq \int_0^t \|f(\cdot,s,v_1) - f(\cdot,s,v_2)\|_{L^2(\Omega)}\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}ds \\ &\leq L\int_0^t \|v_1-v_2\|_{L^2(\Omega)}\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}ds \\ &\leq C_1\int_0^t \|v_1-v_2\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(u_1-u_2)\|_{L^2(\Omega)}ds \\ &\leq \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|\nabla(u_1-u_2)\|^2_{L^2(\Omega)}ds + \frac{C_1^2}{2\alpha}\int_0^t \|v_1-v_2\|^2_{L^2(\Omega)}ds.\end{aligned}$$

Wir nehmen das Maximum über $t \in [0,T^*]$ und folgern

$$\|S(v_1) - S(v_2)\|^2_{L^\infty([0,T^*];H)} = \|u_1-u_2\|^2_{L^\infty([0,T^*];H)} \leq \frac{C_1^2 T^*}{\alpha}\|v_1-v_2\|^2_{L^\infty([0,T^*];H)}.$$

Die Konstante C_1 hängt von der Lipschitzkonstante L und der Poincaré-Konstante ab. Wir wählen nun $T^* > 0$ so klein, dass $C_1^2 T^*/\alpha < 1$. Dann zeigt die obige Ungleichung, dass S auf X eine Kontraktion ist, und der Fixpunktsatz von Banach liefert die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung u auf $[0, T^*]$.

Schritt 3: Fortsetzung der lokalen Lösung. Es gilt nach Proposition 3.4 (iii) $u(t) \in L^2(\Omega)$ für alle $t \in [0, T^*]$. Insbesondere ist $u(T^*) \in L^2(\Omega)$. Wir können nun diese Funktion als Anfangswert verwenden und die obige Argumentation wiederholen. Dies liefert eine Lösung, die auf $[T^*, 2T^*]$ definiert ist, denn T^* ist unabhängig von u. Nach endlich vielen Schritten haben wir also eine Lösung auf $[0, T]$ konstruiert. Diese globale Lösung ist dann auch eindeutig, denn gäbe es zwei Lösungen u_1 und u_2, so könnten wir mit den Abschätzungen aus Schritt 2 sofort $u_1 - u_2 = 0$ schließen. □

Semilineare parabolische Gleichungen spielen in der chemischen Reaktionskinetik eine große Rolle. Die Forderung der Lipschitzstetigkeit von f ist eine starke Einschränkung. In Abschnitt 1.1 haben wir beispielsweise gesehen, dass $f(u) = R_0 - u^2$; diese Funktion ist nicht lipschitzstetig in $\mathbb{R}$. Wir behaupten, dass das Problem (3.3) auch für solche Funktionen zumindest lokal in der Zeit lösbar ist.

Theorem 3.9 (Lokale Existenz und Eindeutigkeit für semilineare Gleichungen). *Es gelten die zu Beginn dieses Abschnitts gemachten Voraussetzungen und es sei $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Ferner sei f lokal lipschitzstetig in u gleichmäßig in (x, t), d.h., für alle $R > 0$ existiert $L(R) > 0$, so dass*

$$|f(x,t,u) - f(x,t,v)| \le L(R)|u - v| \quad \text{für alle } |u| \le R,\ |v| \le R,\ x \in \Omega,\ t > 0,$$

und wachse höchstens polynomiell, d.h., es existieren Konstanten $K > 0$ und $r > 0$, so dass

$$|f(x,t,u)| \le K(1 + |u|^r) \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}.$$

Dann existiert ein $T^* > 0$, so dass (3.3) *auf dem Intervall $[0, T^*]$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in W^{1,2}(0, T^*; V, H)$ im Sinne von Definition 3.6 besitzt. Außerdem erfüllt u die Abschätzung*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} e^{\lambda t}, \quad 0 \le t \le T^*,$$

wobei $\lambda > 0$ nicht von u abhängt.

Der Beweis von Satz 3.9 basiert auf dem Fixpunktsatz von Banach und dem schwachen Maximumprinzip. Wir werden eine Testfunktion vom Typ $(u - Me^{\lambda t})^+$ verwenden. Dann ist ein Integral vom Typ

$$\int_0^T \langle u_t, (u - Me^{\lambda t})^+ \rangle_{H^{-1}} dt$$

zu berechnen. Dafür formulieren wir folgendes Lemma, dessen Beweis eine Übungsaufgabe ist.

Lemma 3.10. *Seien $z : [0,T] \to [0,\infty)$ stetig differenzierbar und $u \in W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$. Dann gilt für $0 \leq \tau \leq T$:*

$$\int_0^\tau \langle u_t, (u-z)^+\rangle_{H^{-1}} dt = \frac{1}{2}\int_\Omega \big((u-z)^+(\tau)^2 - (u-z)^+(0)^2\big)dx + \int_0^\tau \int_\Omega z_t(u-z)^+ dxdt.$$

Beweis von Satz 3.9. Seien $M = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, $T^* > 0$ und $\lambda > 0$ gegeben. Wir definieren die Menge

$$B = \{v \in C^0([0,T^*];L^2(\Omega)) : \|v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Me^{\lambda t},\ 0 \leq t \leq T^*\}.$$

Sei ferner $v \in B$ und $u \in W^{1,2}(0,T^*;V,H)$ die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Problems

$$u_t + L(u) = f(x,t,v(x,t)) \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega.$$

Diese Lösung existiert gemäß Satz 3.7, denn

$$|f(x,t,v)| \leq K(1+|v|^r) \leq K(1+M^r e^{r\lambda t}) \in L^2(\Omega \times (0,T^*)). \tag{3.4}$$

Wir behaupten, dass die Lösung u im Raum B liegt. Dazu beobachten wir, dass $(u - Me^{\lambda t})^+ \in L^2(0,T^*;V)$ eine Testfunktion ist und $(u - Me^{\lambda t})^+(0) = (u_0 - M)^+ = 0$ gilt. Wir erhalten

$$\int_0^\tau \langle u_t, (u-Me^{\lambda t})^+\rangle_{H^{-1}} dt + \int_0^\tau \int_\Omega \big(\underbrace{(\nabla(u-Me^{\lambda t})^+)^T A\nabla u}_{=\chi_{u>Me^{\lambda t}}\nabla u^T A \nabla u \geq 0} + \underbrace{cu(u-Me^{\lambda t})^+}_{\geq 0}\big)dxdt$$
$$= \int_0^\tau \int_\Omega f(x,t,v)(u-Me^{\lambda t})^+ dxdt.$$

Wir verwenden nun Lemma 3.10, die Elliptizität von A und die Abschätzung (3.4):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega (u-Me^{\lambda t})^+(\tau)^2 dx &+ \int_0^\tau \int_\Omega (Me^{\lambda t})_t (u-Me^{\lambda t})^+ dxdt \\ &\leq \int_0^\tau \int_\Omega f(x,t,v)(u-Me^{\lambda t})^+ dxdt\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega (u-Me^{\lambda t})^+(\tau)^2 dx &\leq \int_0^\tau \int_\Omega \big(f(x,t,v) - \lambda Me^{\lambda t}\big)(u-Me^{\lambda t})^+ dxdt \\ &\leq \int_0^\tau \int_\Omega \big(K(1+M^r e^{r\lambda t}) - \lambda Me^{\lambda t}\big)(u-Me^{\lambda t})^+ dxdt.\end{aligned}$$

Wir wählen nun $\lambda = K(2M^r+1)/M$ und, falls $r > 1$, $T^* \leq (\ln 2)/(\lambda(r-1))$. Dann folgt $e^{(r-1)\lambda t} \leq e^{(r-1)\lambda T^*} \leq 2$ für $0 \leq t \leq T^*$. Falls $r \leq 1$, erhalten wir $e^{(r-1)\lambda t} \leq 1$ unabhängig von der Wahl von T^*. Damit ist

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u-Me^{\lambda t})^+(\tau)^2 dx \leq \int_0^\tau \int_\Omega \big(K(1+M^r e^{r\lambda t}) - K(2M^r+1)e^{\lambda t}\big)(u-Me^{\lambda t})^+ dxdt$$

$$\le \int_0^\tau \int_\Omega K M^r e^{\lambda t} \underbrace{(e^{(r-1)\lambda t} - 2)}_{\le 0} (u - Me^{\lambda t})^+ dxdt \le 0.$$

Dies impliziert sofort $u(\cdot,t) \le Me^{\lambda t}$ in Ω, $t \in [0, T^*]$. Verwenden wir die Testfunktion $(-u - Me^{\lambda t})^+$, so ergibt sich nach einer ähnlichen Rechnung $-u(\cdot,t) - Me^{\lambda t} \le 0$. Insgesamt erhalten wir $|u(\cdot,t)| \le Me^{\lambda t}$, also $u \in B$. Dies definiert den Fixpunktoperator $S : B \to B$, $S(v) = u$. Es bleibt zu zeigen, dass S eine Kontraktion ist.

Seien v_1, $v_2 \in B$ und $u_1 = S(v_1)$, $u_2 = S(v_2)$. Mit der Testfunktion $u_1 - u_2$ in der Differenz der schwachen Formulierungen für u_1 bzw. u_2 folgt

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \langle (u_1 - u_2)_t, u_1 - u_2 \rangle_{H^{-1}} dt + \int_0^\tau \int_\Omega \big(\nabla(u_1 - u_2)^T A \nabla(u_1 - u_2) + c(u_1 - u_2)^2 \big) dxdt \\ = \int_0^\tau \int_\Omega \big(f(x,t,v_1) - f(x,t,v_2) \big)(u_1 - u_2) dxdt.\end{aligned}$$

Wir verwenden die Elliptizität von A und die Poincaré- und Young-Ungleichung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_\Omega (u_1 - u_2)(\tau)^2 dx + \alpha \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dxdt \\ &\le \int_0^\tau \|f(x,t,v_1) - f(x,t,v_2)\|_{L^2(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\le C_1 \int_0^\tau \|f(x,t,v_1) - f(x,t,v_2)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\le \frac{C_1^2}{2\alpha} \int_0^\tau \|f(x,t,v_1) - f(x,t,v_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.\end{aligned}$$

Aus der lokalen Lipschitzstetigkeit von f ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \|(u_1 - u_2)(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dxdt \\ \le \frac{C_1^2 L(Me^{\lambda t})\tau}{2\alpha} \|v_1 - v_2\|_{L^\infty(0,T^*;L^2(\Omega))}^2.\end{aligned}$$

Wir nehmen das Supremum über $\tau \in [0, T^*]$:

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty(0,T^*;L^2(\Omega))} \le \frac{C_1^2 L^* T^*}{\alpha} \|v_1 - v_2\|_{L^\infty(0,T^*;L^2(\Omega))},$$

wobei $L^* := \sup_{t \in (0,T^*)} L(Me^{\lambda t})$. Falls $C_1^2 L^* T^* / \alpha < 1$, so erhalten wir eine Kontraktion. Insgesamt müssen wir also $T^* > 0$ so wählen, dass $T^* < T$ and $C_1^2 L^* T^* < \alpha$. $\square$

Satz 3.9 schließt nicht aus, dass die Lösung doch global in der Zeit existiert. Das folgende Resultat zeigt jedoch, dass dies im allgemeinen falsch ist. Dazu betrachten wir wie Evans [10, Abschnitt 9.4.1] die spezielle Gleichung

$$u_t - \Delta u = u^2 \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \tag{3.5}$$

Da die Abbildung $u \mapsto u^2$ lokal lipschitzstetig ist, existiert eine Lösung lokal in der Zeit. Wir behaupten, dass für hinreichend großes $T > 0$ und $u_0 > 0$ keine Lösung von (3.5) existieren kann. Dieses Ergebnis kann folgendermaßen verstanden werden. Sind die diffusiven Kräfte vernachlässigbar, erhalten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$u_t = u^2, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0 > 0.$$

Die Lösung lautet

$$u(t) = \frac{1}{1/u_0 - t}, \quad t \geq 0,$$

und sie existiert nur für $t < 1/u_0$. Der Diffusionsterm $-\Delta u$ wirkt bekanntermaßen glättend, so dass der Reaktionsterm u^2 und der Diffusionsterm Δu im Wettbewerb stehen. Da $u \mapsto u^2$ superlinear wächst, erwarten wir, dass die Reaktionen schneller stattfinden als die Diffusion glätten kann. Mit anderen Worten: Die Lösung "explodiert" nach endlicher Zeit.

Proposition 3.11 (Nichtexistenz globaler Lösungen). *Sei u eine schwache Lösung von* (3.5) *mit $u_0 > 0$ und sei $w_1 > 0$ die Eigenfunktion von $-\Delta$ auf $H_0^1(\Omega)$ zum kleinsten Eigenwert $\lambda_1 > 0$ mit $\int_\Omega w_1 dx = 1$. Falls das Anfangsdatum so gewählt ist, dass $\int_\Omega u_0 w_1 dx > \lambda_1$, dann existiert ein $t^* > 0$, so dass*

$$\lim_{t \to t^*} \int_\Omega u(x,t) w_1(x) dx = \infty.$$

In diesem Sinne sagen wir, dass die Gleichung (3.5) *keine schwache Lösung besitzt, die global in der Zeit existiert.*

Beweis. Die Eigenwertgleichung

$$-\Delta w = \lambda w \quad \text{in } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

besitzt einen Eigenwert $\lambda_1 > 0$ mit Eigenfunktion $w_1 \in H^2(\Omega)$. Es ist möglich (nach dem Maximumprinzip), w_1 so zu wählen, dass $w_1 > 0$ in Ω und $\int_\Omega w_1 dx = 1$. Sei u eine schwache Lösung von (3.5). Da $u_t - \Delta u \geq 0$, $u(0) \geq 0$ und $u = 0$ auf $\partial\Omega$, folgt aus dem schwachen Maximumprinzip, dass $u \geq 0$ in Ω, $t > 0$. (Wähle $u^- = \min\{0, u\}$ als Testfunktion und rechne wie im Beweis von Theorem 3.9.) Wir definieren

$$z(t) = \int_\Omega u(t) w_1 dx, \quad t \geq 0.$$

Wegen $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ ist z für alle $t \geq 0$ definiert. Es folgt (ähnlich wie in Proposition 3.4)

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\langle u, w_1\rangle_{H^{-1}} = \langle u_t, w_1\rangle_{H^{-1}} = \langle \Delta u + u^2, w_1\rangle_{H^{-1}} = \int_\Omega (u\Delta w_1 + u^2 w_1)dx.$$

Im letzten Schritt haben wir zweimal partiell integriert. Da w_1 eine Eigenfunktion ist, erhalten wir

$$\frac{dz}{dt} = -\lambda_1 z + \int_\Omega u^2 w_1 dx.$$

Die Beweisidee lautet nun zu zeigen, dass das letzte Integral nach unten durch z^2 abgeschätzt werden kann. Dazu verwenden wir die Hölder-Ungleichung:

$$z = \int_\Omega u\sqrt{w_1}\sqrt{w_1}dx \leq \Big(\int_\Omega u^2 w_1 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega w_1 dx\Big)^{1/2} = \Big(\int_\Omega u^2 w_1 dx\Big)^{1/2},$$

denn $\int_\Omega w_1 dx = 1$. Daher ist $z^2 \leq \int_\Omega u^2 w_1 dx$ und

$$\frac{dz}{dt} \geq -\lambda_1 z + z^2, \quad t \geq 0.$$

Diese Differentialungleichung kann gelöst werden. Die Funktion $y(t) = e^{\lambda_1 t}z(t)$ erfüllt

$$\frac{dy}{dt} = e^{\lambda_1 t}\frac{dz}{dt} + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} z \geq e^{\lambda_1 t} z^2 = e^{-\lambda_1 t} y^2.$$

Folglich ist

$$\frac{d}{dt}\Big(-\frac{1}{y}\Big) = \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt} \geq e^{-\lambda_1 t}.$$

Integration dieser Ungleichung von 0 bis t ergibt

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} \geq -\frac{1}{\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - 1).$$

Wir lösen diese Ungleichung nach $y(t)$ auf:

$$y(t) \geq \frac{y(0)\lambda_1}{\lambda_1 - y(0)(1 - e^{-\lambda_1 t})}.$$

Diese Umformulierung ist möglich, falls der Nenner ungleich null ist. Wir wählen nun u_0 so, dass $z(0) = y(0) = \int_\Omega u_0 w_1 dx > \lambda_1$. Dann gibt es ein $t^* > 0$, so dass der obige Nenner gleich null wird, d.h. $y(t) \to \infty$ und $z(t) = e^{-\lambda_1 t}y(t) \to \infty$ für $t \to t^*$. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Das Ergebnis von Proposition 3.11 ist aus Sicht der Reaktionskinetik plausibel. Die rechte Seite der Gleichung

$$u_t - \Delta u = u^2$$

modelliert eine binäre Reaktion, bei der Moleküle entstehen. Tatsächlich wird eine Kettenreaktion beschrieben, und die Anzahl der Moleküle wächst über alle Maßen. Eine Lösung kann nicht für alle Zeiten existieren. Bei der Reaktionsgleichung

$$u_t - \Delta u = R_0 - u^2$$

wird eine binäre Reaktion beschrieben, bei der Moleküle vernichtet werden mit einem konstanten Quellterm. Falls keine Moleküle durch die Gebietswand fließen können, ist es plausibel, dass sich die Teilchendichte auf den Wert $u = \sqrt{R_0}$ (wegen $R_0 - u^2 = 0$) einpendelt und dass insbesondere eine globale Lösung existiert. Dieser Fall ist in Satz 3.8 jedoch nicht enthalten. Ähnlich wie bei den elliptischen Gleichungen ist die Monotonie von $u \mapsto R_0 - u^2$ entscheidend für die globale Existenz. Das folgende Resultat gilt für *monotone* semilineare Gleichungen.

Theorem 3.12 (Globale Existenz und Eindeutigkeit für monotone semilineare Gleichungen). *Es gelten die zu Beginn dieses Abschnitts gemachten Voraussetzungen und es seien $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ und $T > 0$. Ferner sei $f : \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

- *f ist eine Carathéodory-Funktion,*
- *$u \mapsto f(x,t,u)$ ist monoton fallend für fast alle $x \in \Omega$, $t > 0$,*
- *es existiere ein $M_0 > 0$, so dass $f(x,t,M_0) \leq 0$ und $f(x,t,-M_0) \geq 0$ für fast alle $x \in \Omega$, $t > 0$,*
- *für alle $M > 0$ gelte $|f(x,t,u)| \leq h_M(x,t) \in L^2(\Omega \times (0,T))$ für fast alle $x \in \Omega$, $t > 0$ und für alle $|u| \leq M$.*

Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ von (3.3) *im Sinne der Definition 3.6. Außerdem erfüllt u die Abschätzung*

$$|u| \leq \max\{M_0, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\} \quad \text{in } \Omega \times (0,T).$$

Die Voraussetzung $h_M \in L^2(\Omega)$ kann abgeschwächt werden (siehe Satz 2.16). Sie vereinfacht den Beweis des Satzes. Wir benötigen folgendes Hilfsergebnis, das ähnlich wie Lemma 2.24 bewiesen wird.

Lemma 3.13. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 \leq p < \infty$, (u_k) eine Folge mit $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$ und f eine Carathéodory-Funktion mit $|f(\cdot,u)| \leq h \in L^p(\Omega)$ für alle $u \in \mathbb{R}$. Dann folgt $f(\cdot,u_k) \to f(\cdot,u)$ in $L^p(\Omega)$.*

Beweis. Nach der Umkehrung des Satzes über die majorisierte Konvergenz existiert eine Teilfolge $(u_{k'})$ mit $u_{k'} \to u$ fast überall in Ω für $k' \to \infty$. Da f stetig in u ist, erhalten wir

$f(x, u_{k'}) \to f(x, u)$ fast überall. Ferner ist $|f(\cdot, u_{k'})|^p \leq h^p \in L^1(\Omega)$. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz folgt $f(\cdot, u_{k'}) \to f(\cdot, u)$ in $L^p(\Omega)$. Da u eindeutig bestimmt ist, konvergiert die gesamte Folge. □

Beweis von Satz 3.12. Wir wenden den Fixpunktsatz von Leray-Schauder an, um die Monotonie von f auszunutzen. Da f bezüglich u nur lokal beschränkt ist, benutzen wir außerdem die Abschneidemethode von Stampacchia. Seien dafür $v \in L^2(\Omega \times (0, T))$ und $\sigma \in [0, 1]$ gegeben und $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$ die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Problems

$$u_t + L(u) = \sigma f(x, t, v_M(x, t)) \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0) = \sigma u_0 \quad \text{in } \Omega, \tag{3.6}$$

wobei $v_M = \max\{-M, \min\{M, v\}\}$ und $M = \max\{M_0, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}$. Die Lösung existiert, denn $f(x, t, v_M(x, t))$ ist eine L^2-Funktion in (x, t). Dies definiert den Fixpunktoperator $S : L^2(\Omega \times (0, T)) \times [0, 1] \to L^2(\Omega \times (0, T))$, $S(v, \sigma) = u$. Es gilt $S(v, 0) = 0$ für alle v. Außerdem ist S stetig, denn ist $v_k \to v$ in $L^2(\Omega \times (0, T))$, $\sigma_k \to \sigma$ und $u_k = S(v_k, \sigma_k)$, so folgt aus den Voraussetzungen an f und Lemma 3.13

$$f(x, t, (v_k)_M) \to f(x, t, v_M) \quad \text{in } L^2((0, T) \times \Omega).$$

Da die rechte Seite der linearen Gleichung bezüglich k in L^2 beschränkt ist, folgt aus den A-priori-Abschätzungen, dass (u_k) in $W^{1,2}(0, T; V, H)$ beschränkt ist. Also existiert eine Teilfolge mit $u_{k'} \rightharpoonup u$ in $W^{1,2}(0, T; V, H)$ und – nach dem Lemma von Aubin (Satz 3.5) – $u_{k'} \to u$ in $L^2(\Omega \times (0, T))$. Das Lemma kann angewendet werden, da V kompakt in H einbettet. Wir können also den Grenzwert $k' \to \infty$ in der schwachen Formulierung von $u_{k'}$ durchführen und schließen, dass u eine schwache Lösung von (3.6) ist. Dies beweist $u = S(v, \sigma)$ und die Stetigkeit von S.

Um die Kompaktheit von S zu zeigen, verwenden wir u als Testfunktion in (3.6):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega u(\tau)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2 dx + \alpha \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt &\leq \sigma \int_0^\tau \int_\Omega f(x, t, v_M) u dxdt \\ &\leq \int_0^\tau \int_\Omega h_M |u| dxdt \leq \frac{1}{2}\|h_M\|^2_{L^2(\Omega \times (0,T))} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega \times (0,T))}. \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall schließen wir, dass $\|u\|_{L^2(0,T;V)} \leq C_1$. Dann ist auch u_t beschränkt, denn

$$\|u_t\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \|A\nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|-cu + \sigma f(x, t, v_M)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_2.$$

Aus dem Lemma von Aubin folgt, dass $u = S(v, \sigma)$ in einer kompakten Teilmenge von $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ liegt, d.h., S ist kompakt.

Der entscheidende Beweisschritt sind die gleichmäßigen Abschätzungen für alle Fixpunkte von $S(\cdot, \sigma)$. Sei $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$ ein solcher Fixpunkt. Wir verwenden die

Testfunktion $(u-M)^+$, die Elliptizität von L und Lemma 3.10:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u-M)^+(\tau)^2 dx + \int_0^\tau \int_\Omega cu(u-M)^+ dxdt \leq \int_0^\tau \int_\Omega f(x,t,u_M)(u-M)^+ dxdt.$$

Der zweite Term auf der linken Seite kann geschrieben werden als

$$\int_0^\tau \int_\Omega c(u-M)(u-M)^+ dxdt + M \int_0^\tau \int_\Omega c(u-M)^+ dxdt \geq 0.$$

Die rechte Seite kann wegen der Voraussetzungen an f nach oben abgeschätzt werden durch

$$\int_0^\tau \int_{\{u>M\}} f(x,t,M)(u-M)^+ dxdt \leq \int_0^\tau \int_{\{u>M\}} f(x,t,M_0)(u-M)^+ dxdt \leq 0,$$

denn $f(x,t,M_0) \leq 0$. Wir schließen, dass $(u-M)^+(\tau) = 0$, also $u \leq M$ in $\Omega \times (0,T)$.

Die Testfunktion $(u+M)^-$ ergibt

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u+M)^-(\tau)^2 dx + \int_0^\tau \int_\Omega cu(u+M)^- dxdt \leq \int_0^\tau \int_\Omega f(x,t,u_M)(u+M)^- dxdt.$$

Wir schätzen folgendermaßen ab:

$$\int_0^\tau \int_\Omega cu(u+M)^- dxdt = \int_0^\tau \int_\Omega c((u+M)^-)^2 dxdt - M \int_0^\tau \int_\Omega c(u+M)^- dxdt \geq 0.$$

Ferner ist wegen $f(x,t,-M_0) \geq 0$

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \int_\Omega f(x,t,u_M)(u+M)^- dxdt &\leq \int_0^\tau \int_{\{u<-M\}} f(x,t,-M)(u+M)^- dxdt \\ &\leq \int_0^\tau \int_{\{u<-M\}} f(x,t,-M_0)(u+M)^- dxdt \leq 0.\end{aligned}$$

Dies liefert $(u+M)^- = 0$ und damit $u \geq -M$. Insgesamt erhalten wir eine gleichmäßige Abschätzung für u in $L^\infty(\Omega \times (0,T))$ und wegen der Beschränktheit von Ω auch in $L^2(\Omega \times (0,T))$. Insbesondere haben wir $f(x,t,u_M) = f(x,t,u)$ gezeigt, da $|u| \leq M$. Die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Leray-Schauder sind erfüllt. Es existiert also eine Lösung von (3.3).

Es bleibt die Eindeutigkeit von Lösungen zu zeigen. Seien u_1 und u_2 zwei schwache Lösungen von (3.3). Wir benutzen die Testfunktion $u_1 - u_2$ in der Differenz der schwachen Formulierungen für u_1 bzw. u_2. Wegen der Elliptizität von L und der Nichtnegativität von c ergibt sich

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u_1-u_2)(\tau)^2 dx \leq \int_0^\tau \int_\Omega \big(f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2)\big)(u_1-u_2) dxdt \leq 0,$$

wobei wir die Monotonie von f verwendet haben. Daher ist $u_1 = u_2$ und das Eindeutigkeitsresultat folgt. □

3.3 Positivität und Langzeitverhalten

Satz 3.12 liefert die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Reaktions-Diffusionsgleichung

$$u_t - \Delta u = R_0 - u^2 \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega \tag{3.7}$$

mit den Randbedingungen $u = 0$ auf $\partial\Omega$, wobei $R_0 > 0$. Im Hinblick auf chemische Anwendungen ist es realistischer, homogene Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

vorauszusetzen. Für positive Anfangswerte u_0 erwarten wir, dass die Konzentration $u(t)$ positiv ist und für $t \to \infty$ gegen den stationären Zustand $\sqrt{R_0}$ konvergiert. Wir beweisen dies in diesem Abschnitt.

Wir untersuchen etwas allgemeiner monotone semilineare Gleichungen der Form

$$u_t + L(u) = f(u) \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega. \tag{3.8}$$

Die Voraussetzungen an Ω und $L(u)$ seien dieselben wie zu Beginn von Abschnitt 3.2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und monoton fallend. Die schwache Formulierung lautet wie folgt. Seien $V = H^1(\Omega)$ und $H = L^2(\Omega)$. Dann ist $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ein Evolutionstripel. Gesucht ist $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$, so dass für alle $v \in L^2(0, T; V)$

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{V'} dt + \int_0^T \int_\Omega (\nabla u^T A \nabla v + cuv) dx dt = \int_0^T \int_\Omega f(u) v dx dt.$$

Die Existenzresultate aus Abschnitt 3.2 sind nicht unmittelbar anwendbar, da wir hier Neumann-Randbedingungen vorausgesetzt haben. Die schwache Formulierung ist jedoch dieselbe wie die entsprechende Formulierung für Dirichlet-Probleme bis auf die Definition des Raumes V. Die Beweise der Sätze des vorigen Abschnitts gelten nun unverändert für die obige schwache Formulierung außer an den Stellen, an denen Eigenschaften des Raums V benutzt werden. Im vorliegenden Fall betrifft dies nur die Poincaré-Ungleichung. Gilt nämlich $V = H_0^1(\Omega)$, so folgt aus einer gleichmäßigen Abschätzung für ∇u in L^2 sofort eine Abschätzung für u in H^1. Dieses Argument ist im Falle $V = H^1(\Omega)$ nicht mehr gültig. Die Standard-Abschätzungen des vorigen Abschnitts liefern jedoch mehr als nur gleichmäßige Abschätzungen für ∇u in L^2, sondern zugleich Abschätzungen für u in $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ und insbesondere in $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Dies liefert eine Abschätzung für u in $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ ohne Verwendung der Poincaré-Ungleichung. Wir können also den Beweis von Satz 3.12 direkt auf das obige Neumann-Randwertproblem übertragen. Wir erhalten das folgende Existenzresultat.

Theorem 3.14 (Globale Existenz und Eindeutigkeit für semilineare Gleichungen mit Neumann-Rand). *Es gelten die Voraussetzungen zu Beginn von Abschnitt 3.2. Ferner seien $T > 0$ und $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und monoton fallend und es existiere ein $M_0 > 0$ mit $f(M_0) \leq 0$ und $f(-M_0) \geq 0$. Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ von (3.8) mit $|u| \leq \max\{M_0, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}$ in $\Omega \times (0,T)$.*

Wir behaupten, dass die Lösung von (3.8) positiv ist, sofern $u_0 > 0$.

Proposition 3.15. *Sei $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $u_0 \geq u_* > 0$ in Ω. Es existiere ein $m_0 > 0$, so dass $f(m_0) \geq 0$. Sei ferner $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ eine schwache Lösung von (3.8). Dann gilt*

$$u(\cdot,t) \geq \min\{m_0, u_*\}e^{-\lambda t} \quad \text{in } \Omega,\ t > 0,$$

wobei $\lambda = \sup_\Omega c$.

Die Funktion $f(u) = R_0 - u^2$ erfüllt die Voraussetzung der Proposition mit $m_0 = \sqrt{R_0}$. Die Lösung der Reaktion-Diffusionsgleichung (3.7) erfüllt also $u \geq \min\{\sqrt{R_0}, u_*\}$.

Beweis. Der Beweis illustriert eine Variante des Minimumprinzips. Eine erste Idee wäre, die Testfunktion $(u-m)^-$ mit $0 < m = \min\{m_0, u_*\}$ in der schwachen Formulierung von (3.8) zu verwenden. Wir erhalten unter Verwendung der Elliptizität von L und $f(u) \geq f(m) \geq f(m_0) \geq 0$ für $u \leq m$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega ((u-m)^-)^2 dx + \int_\Omega \big(c(u-m)(u-m)^- + cm(u-m)^-\big)dx \\ \leq \int_{\{u<m\}} f(u)(u-m)^- dx \leq 0.\end{aligned}$$

Wegen $c \geq 0$ folgt weiter

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega ((u-m)^-)^2 dx \leq -m\int_\Omega c(u-m)^- dx.$$

Das Problem ist nun, dass das Integral auf der rechten Seite nichtnegativ ist und nicht ohne weiteres abgeschätzt werden kann. Die Testfunktion $(u-m)^-$ führt also nicht zum Ziel. Der Grund liegt darin, dass $\inf u$ zwar für endliche Zeiten positiv ist, aber mit fortschreitender Zeit immer kleiner werden könnte. Die Konstante $m > 0$ ist womöglich für beliebige $T > 0$ nicht die untere Schranke.

Wir verwenden daher die Testfunktion $(u - me^{-\lambda t})^-$ mit einer zu bestimmenden Konstante $\lambda > 0$ (siehe auch den Beweis von Satz 3.9). Es ergibt sich mit Hilfe von Lemma 3.10

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega ((u-me^{-\lambda t})^-)^2 dx + \int_\Omega c\big(((u-me^{-\lambda t})^-)^2 + me^{-\lambda t}(u-me^{-\lambda t})^-\big)dx$$

$$\leq \int_\Omega f(u)(u - me^{-\lambda t})^- dx - (me^{-\lambda t})_t \int_\Omega (u - me^{-\lambda t})^- dx.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist wegen $f(u) \geq f(m) \geq 0$ für $u < me^{-\lambda t} \leq m$ nichtpositiv. Daher ist

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega ((u - me^{-\lambda t})^-)^2 dx \leq \int_\Omega m(\lambda - c)e^{-\lambda t}(u - me^{-\lambda t})^- dx.$$

Wählen wir $\lambda = \sup_\Omega c$, so ist das Integral auf der rechten Seite nichtpositiv und wir erhalten $(u - me^{-\lambda t})^- = 0$, also die Behauptung. □

Schließlich zeigen wir, dass die Lösung von (3.8) für $t \to \infty$ gegen die schwache Lösung des stationären Problems

$$L(u_\infty) = f(u_\infty) \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u_\infty}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \tag{3.9}$$

konvergiert. Die Lösbarkeit dieses Problems ist sichergestellt, wenn c strikt positiv ist, denn dies liefert eine Abschätzung für u_∞ in L^2. Der Diffusionsterm $\operatorname{div}(A\nabla u_\infty)$ ergibt eine Abschätzung für ∇u_∞ in L^2, also insgesamt eine Abschätzung für u_∞ in H^1. Dies garantiert die Kompaktheit des Fixpunktoperators. Nach dem Maximumprinzip gilt sogar $u_\infty \in L^\infty(\Omega)$. Ein detaillierter Beweis, der sehr ähnlich zum Beweis von Satz 2.16 ist, wird der Leserin bzw. dem Leser überlassen.

Theorem 3.16. *Sei $-f$ eine (stark) monotone Funktion, d.h., es existiert ein $\gamma \geq 0$ ($\gamma > 0$) mit*

$$-(f(u) - f(v))(u - v) \geq \gamma(u - v)^2 \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}.$$

Sei weiter $u \in W^{1,2}(0, T; V, H)$ eine schwache Lösung von (3.8). *Dann gilt*

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0 - u_\infty\|_{L^\infty(\Omega)} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

wobei $\lambda = \inf_\Omega c + \gamma$.

Beweis. Der Beweis illustriert eine Variante der Moser-Iterationstechnik. Wir zeigen Abschätzungen für $u - u_\infty$ in L^p und gehen dann zum Grenzwert $p \to \infty$ über. Sei p eine ungerade natürliche Zahl. Die Differenz $u - u_\infty$ löst die folgende Gleichung:

$$(u - u_\infty)_t - L(u - u_\infty) = f(u) - f(u_\infty).$$

Da sowohl u als auch u_∞ in $L^\infty(\Omega)$ liegen, können wir die Testfunktion $(u - u_\infty)^p$ in der schwachen Formulierung der obigen Gleichung verwenden und erhalten

$$\langle (u - u_\infty)_t, (u - u_\infty)^p \rangle_{V'} + p \int_\Omega (u - u_\infty)^{p-1} \nabla(u - u_\infty)^T A \nabla(u - u_\infty) dx$$

$$+\int_\Omega c(u-u_\infty)^{p+1}dx = \int_\Omega (f(u)-f(u_\infty))(u-u_\infty)^p dx.$$

Das erste Integral auf der linken Seite kann geschrieben werden als

$$\langle (u-u_\infty)_t, (u-u_\infty)^p\rangle_{V'} = \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u-u_\infty)^{p+1}dx.$$

Diese Beziehung gilt für alle regulären Funktionen und aus Dichtheitsgründen dann auch für Funktionen aus $W^{1,2}(0,T;V,H)$. Ein ausführlicher Beweis kann ähnlich wie für Lemma 3.10 geführt werden. Das zweite Integral wird wie folgt abgeschätzt:

$$\begin{aligned} p\int_\Omega &(u-u_\infty)^{p-1}\nabla(u-u_\infty)^T A\nabla(u-u_\infty)dx \\ &= \frac{4p}{(p+1)^2}\int_\Omega \nabla((u-u_\infty)^{(p+1)/2})^T A\nabla((u-u_\infty)^{(p+1)/2})dx \\ &\geq \frac{4p\alpha}{(p+1)^2}\int_\Omega |\nabla((u-u_\infty)^{(p+1)/2})|^2dx. \end{aligned}$$

Aus der starken Monotonie von $-f$ folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f(u)-f(u_\infty))(u-u_\infty)^p dx &= \int_\Omega (f(u)-f(u_\infty))(u-u_\infty)(u-u_\infty)^{p-1}dx \\ &\leq -\gamma\int_\Omega (u-u_\infty)^{p+1}dx \leq 0. \end{aligned}$$

Wir haben benutzt, dass $(u-u_\infty)^{p-1}\geq 0$, da $p-1$ gerade ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega (u-u_\infty)^{p+1}dx + \frac{4p\alpha}{p+1}\int_\Omega |\nabla((u-u_\infty)^{(p+1)/2})|^2dx \\ + (p+1)\int_\Omega (c+\gamma)(u-u_\infty)^{p+1}dx \leq 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Schreiben wir $F(t)=\|u(t)-u_\infty\|_{L^{p+1}(\Omega)}^{p+1}$, so haben wir die Differentialungleichung

$$F'(t)+(p+1)\lambda F(t)\leq 0$$

gezeigt, wobei $\lambda=\inf_\Omega c+\gamma$. Wir verwenden die folgende Version des Lemmas von Gronwall.

Lemma 3.17 (Gronwall). *Seien $\lambda_0\in\mathbb{R}$ und $F:[0,T]\to[0,\infty)$ eine absolut stetige (also fast überall differenzierbare Funktion) mit*

$$F'(t)+\lambda_0 F(t)\leq 0 \quad \textit{für fast alle } t\in[0,T].$$

Dann folgt $F(t)\leq F(0)e^{-\lambda_0 t}$ für $t\in[0,T]$.

Wir erhalten mit $\lambda_0 = (p+1)\lambda$ nach Ziehen der $(p+1)$-ten Wurzel:

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^{p+1}(\Omega)} \le \|u_0 - u_\infty\|_{L^{p+1}(\Omega)} e^{-\lambda t}.$$

Da $\|v\|_{L^p(\Omega)} \to \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$ für $p \to \infty$ und für alle $v \in L^\infty(\Omega)$ (siehe Übungsaufgaben), ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung. Wir haben das Integral

$$\frac{4p\alpha}{p+1} \int_\Omega |\nabla((u - u_\infty)^{(p+1)/2})|^2 dx$$

in (3.10) nicht ausgenutzt, da wir für Neumann-Probleme keine Poincaré-Ungleichung zur Verfügung haben. Im Falle eines Dirichlet-Problems können wir dieses Integral nach unten abschätzen durch

$$\frac{4p\alpha}{p+1} C_P^2 \int_\Omega |(u - u_\infty)^{(p+1)/2}|^2 dx = \frac{4p\alpha}{p+1} C_P^2 \int_\Omega (u - u_\infty)^{p+1} dx,$$

wobei $C_P > 0$ die Poincaré-Konstante ist. Damit ändert sich die Differentialungleichung zu

$$F'(t) + \Big((p+1)\lambda + \frac{4p\alpha}{p+1} C_P^2\Big) F(t) \le 0,$$

und das Lemma von Gronwall ergibt

$$\|u(t) - u_\infty\|_{L^{p+1}(\Omega)} \le \|u_0 - u_\infty\|_{L^{p+1}(\Omega)} \exp\Big(-\Big(\lambda + \frac{4p\alpha}{(p+1)^2} C_P^2\Big) t\Big).$$

Im Grenzwert $p \to \infty$ erhalten wir also dieselbe Abschätzung wie in Satz 3.16. Für endliche Werte von p ist die Abklingrate jedoch größer als im Falle von Neumann-Randbedingungen. □

Bemerkung. Streng genommen ist Satz 3.16 nicht anwendbar auf die Reaktions-Diffusionsgleichung (3.7), da $f(u) = R_0 - u^2$ nicht stark monoton ist:

$$-(f(u) - f(v))(u - v) = (u^2 - v^2)(u - v) = (u + v)(u - v)^2.$$

Unter den Voraussetzungen von Proposition 3.15 ist die Lösung u positiv, genauer: $u \ge m = \min\{\sqrt{R_0}, u_*\}$. Also ist

$$-(f(u) - f(v))(u - v) \ge 2m(u - v)^2 \quad \text{für alle } u, v \ge m.$$

Die Funktion $-f$ ist also streng monoton auf dem Intervall $[m, \infty)$ und Satz 3.16 ist anwendbar. Die Lösung des Randwertproblems

$$-\Delta u_\infty = R_0 - u_\infty^2 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u_\infty}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

ist konstant und lautet $u_\infty = \sqrt{R_0}$. Die Monotonie der rechten Seite impliziert sofort die eindeutige Lösbarkeit, also ist $u_\infty = \sqrt{R_0}$ die eindeutige Lösung. Aus Satz 3.16 folgt

$$\|u(t) - \sqrt{R_0}\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \quad \text{für } t \to \infty.$$

Wir haben bewiesen, dass die Konzentration gegen die konstante stationäre Konzentration konvergiert. □

3.4 Quasilineare Gleichungen

Unser Ziel ist die Untersuchung von quasilinearen Gleichungen der Form

$$u_t - \operatorname{div}(a(u)\nabla u) = 0.$$

Derartige Gleichungen beschreiben beispielsweise die Evolution einer Konzentration u mit dichteabhängigem Diffusionskoeffizienten $a(u)$. Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass $a(u)$ strikt positiv ist. Den Fall $a(u) \geq 0$ behandeln wir für das Beispiel $a(u) = u^m$ in Abschnitt 3.5. Tatsächlich können wir wesentlich allgemeinere Gleichungen behandeln, indem wir das Anfangsrandwertproblem abstrakt formulieren. Im folgenden gehen wir ähnlich wie Showalter [19, Abschnitt III.4] vor.

Sei $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ein Evolutionstripel, d.h., V ist ein separabler, reflexiver Banachraum und H ein separabler Hilbertraum mit stetiger und dichter Einbettung $V \hookrightarrow H$ (siehe Definition 3.3). Sei ferner $A : V \to V'$ ein Operator. Wir suchen eine Lösung $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$ des *abstrakten Cauchy-Problems*

$$u_t(t) + A(u(t)) = f(t), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \tag{3.11}$$

wobei $1 < p < \infty$. Die Funktion $f \in X'$ sei gegeben, wobei wir $X = L^p(0,T;V)$ und $X' = L^q(0,T;V')$, $1/p + 1/q = 1$, setzen. Nach Proposition 3.4 bettet der Raum $W^{1,p}(0,T;V,H)$ stetig in $C^0([0,T];H)$ ein, so dass der Anfangswert $u(0) = u_0$ im Sinne von H angenommen wird. Beachte, dass die Randbedingungen im Raum V formuliert sind.

Beispiel 3.18. (i) Ein typisches Beispiel ist $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ und $A = -\Delta$. Das Cauchy-Problem lautet dann

$$u_t - \Delta u = f(t) \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u(0) = u_0, \tag{3.12}$$

und u erfüllt homogene Dirichlet-Randbedingungen, $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Dieses Beispiel kann verallgemeinert werden: Der Operator A, definiert durch $u \mapsto -\operatorname{div}(a(u)\nabla u)$, bildet $V = H_0^1(\Omega)$ auf $V' = H^{-1}(\Omega)$ ab, denn, falls $0 \leq a(u) \leq a^*$ für alle $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\|A(u)\|_{V'} &= \sup_{\|v\|_V \leq 1} |\langle A(u), v\rangle_{V'}| = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \left| \int_\Omega a(u)\nabla u \cdot \nabla v dx \right| \\ &\leq a^* \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|u\|_V \|v\|_V \leq a^* \|u\|_V.\end{aligned}$$

(ii) Ein anderes Beispiel ist der Operator $A : V \to V'$ mit $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, definiert durch $A(u) = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p \geq 2$. Dies führt auf die sogenannte *p-Laplace-Gleichung*

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0,$$

die eine andere Verallgemeinerung der Wärmeleitungsgleichung (3.12) ist. Wir erhalten (3.12), wenn wir $p = 2$ wählen. Wir zeigen, dass A wohldefiniert ist. Seien u, $v \in V$. Mit der Hölder-Ungleichung und $1/p + 1/q = 1$ folgt

$$\begin{aligned}\langle A(u), v\rangle_{V'} &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx \le \Big(\int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)q} dx\Big)^{1/q}\Big(\int_\Omega |\nabla v|^p dx\Big)^{1/p} \\ &= \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Das Supremum über alle $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $\|v\|_V \le 1$ ergibt

$$\|A(u)\|_{V'} \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \le \|u\|_V^{p-1}.$$

Daher ist $A : V \to V'$. □

Wir können das abstrakte Cauchy-Problem auf zweierlei Arten interpretieren. Die *schwache Formulierung* lautet

$$\langle u_t(t), v\rangle_{V'} + \langle A(u(t)), v\rangle_{V'} = \langle f(t), v\rangle_{V'} \quad \text{für } v \in V,\ t > 0, \quad u(0) = u_0.$$

Damit diese Formulierung Sinn macht, sollte $f(t) \in V'$ gelten. In dieser Formulierung wird die Zeitabhängigkeit explizit vermerkt. Geben wir $f \in X' = L^q(0, T; V')$ vor, so können wir die Gleichung (3.11) auch als die *Operatorgleichung*

$$u' + A(u) = f \quad \text{in } X', \quad u(0) = u_0,$$

formulieren. Hier interpretieren wir A als einen Operator $A : X \to X'$, d.h., die Zeitabhängigkeit steckt in der Definition der Räume X und X'. Wir unterscheiden also die Operatoren $A : V \to V'$ und $A : X \to X'$.

Im folgenden führen wir einige Begriffe ein, die für die Existenz von Lösungen des abstrakten Cauchy-Problems benötigt werden. Wir erinnern, dass ein Operator $A : V \to V'$ *beschränkt* ist, wenn er beschränkte Mengen in V auf beschränkte Mengen in V' abbildet. Die in Beispiel 3.18 definierten Operatoren sind beschränkt.

Definition 3.19. *Seien V ein reflexiver Banachraum und $A : V \to V'$ ein Operator.*

(i) *A heißt* demistetig, *wenn für alle $(u_k) \subset V$ mit $u_k \to u$ in V folgt $A(u_k) \rightharpoonup A(u)$ in V' für $k \to \infty$.*

(ii) *A heißt* hemistetig, *wenn für alle $u, v, w \in V$ die reellwertige Funktion $t \mapsto \langle A(u + tv), w\rangle_{V'}$, $t \in [0, 1]$, stetig ist.*

(iii) *A heißt* vom Typ M, *wenn für alle $(u_k) \subset V$ mit den Eigenschaften*

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } V, \quad A(u_k) \rightharpoonup f \text{ in } V' \quad \text{und} \quad \limsup_{k\to\infty}\langle A(u_k), u_k\rangle_{V'} \le \langle f, u\rangle_{V'}$$

folgt, dass $A(u) = f$.

(iv) *A heißt* koerziv, *wenn für alle $u \in V$ gilt:*

$$\frac{\langle A(u), u\rangle_{V'}}{\|u\|_V} \to \infty, \quad \textit{wenn } \|u\|_V \to \infty.$$

(v) *A heißt* monoton, *wenn für alle u, $v \in V$ gilt*

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle_{V'} \geq 0.$$

Die Typ-M-Eigenschaft wird benutzt, um bei nur schwach konvergenten Folgen $u_k \rightharpoonup u$ und $A(u_k) \rightharpoonup f$ den Grenzwert $f = A(u)$ bei nichtlinearen Problemen identifizieren zu können.

Beispiel 3.20. Wir betrachten die Operatoren aus Beispiel 3.18.

(i) Seien $V = H_0^1(\Omega)$ und $A(u) = -\mathrm{div}(a(u)\nabla u)$, wobei $a \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ mit $a(u) \geq a_* > 0$ sei. Wir behaupten, dass A hemistetig und koerziv ist. Die Koerzivität ist schnell bewiesen: Mit $u \in V$ und der Poincaré-Ungleichung folgt

$$\frac{\langle A(u), u\rangle_{V'}}{\|u\|_V} = \frac{1}{\|u\|_V}\int_\Omega a(u)|\nabla u|^2 dx \geq a_* C\|u\|_V \to \infty \quad \text{für } \|u\|_V \to \infty.$$

Für den Nachweis der Hemistetigkeit betrachten wir für gegebene u, v, $w \in V$ die Abbildung

$$F(t) = \langle A(u+tv), w\rangle_{V'} = \int_\Omega a(u+tv)\nabla u \cdot \nabla w dx + t\int_\Omega a(u+tv)\nabla v \cdot \nabla w dx.$$

Sei $t_0 \in [0,1]$. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz gilt

$$\lim_{t\to t_0}\int_\Omega a(u+tv)\nabla u \cdot \nabla w dx = \int_\Omega a(u+t_0 v)\nabla u \cdot \nabla w dx.$$

Dies impliziert $F(t) \to F(t_0)$ für $t \to t_0$.

Der Operator A ist im allgemeinen *nicht* monoton (aber vom Typ M).

(ii) Seien $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $p \geq 2$ und $A(u) = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Dann ist A koerziv, monoton und demistetig. Seien nämlich u, $v \in V$. Die Koerzivität ist eine Konsequenz von

$$\frac{\langle A(u), u\rangle_{V'}}{\|u\|_V} = \frac{1}{\|u\|_V}\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla u dx = \frac{1}{\|u\|_V}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} \geq C\|u\|_V^{p-1}.$$

Für den Nachweis der Monotonie bemerken wir, dass die Funktion $x \mapsto \frac{1}{p}|x|^p$, $x \in \mathbb{R}^n$, konvex, also gemäß Beispiel 2.18 die Abbildung $x \mapsto \nabla\frac{1}{p}|x|^p = |x|^{p-2}x$ monoton

ist:
$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y) \cdot (x-y) \geq 0 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$
Daher erhalten wir
$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle_{V'} = \int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx \geq 0.$$
Dies zeigt die Monotonie von A. Sei nun $u_k \to u$ in V. Dann konvergiert
$$|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \to |\nabla u|^{p-2}\nabla u \quad \text{in } L^{p/(p-1)}(\Omega).$$
Dies impliziert wegen $\nabla v \in L^p(\Omega)$
$$\langle A(u_k), v \rangle_{V'} = \int_\Omega |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \cdot \nabla v dx \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx.$$
Also ist $A(u_k) \rightharpoonup A(u)$ in V' und A ist demistetig. □

Zwischen den obigen Begriffen bestehen folgende Zusammenhänge.

Lemma 3.21. *Sei $A : V \to V'$ ein Operator. Dann gilt:*
(i) *Wenn A hemistetig und monoton ist, dann ist A vom Typ M.*
(ii) *Wenn A beschränkt und vom Typ M ist, dann ist A demistetig.*
(iii) *Wenn A demistetig ist, dann auch hemistetig.*

Der Beweis dieses Lemmas ist eine Übungsaufgabe. Die verschiedenen Beziehungen sind in Abbildung 3.1 illustriert. Jeder Pfeil bedeutet eine Implikation. Der Beweis, dass lineare, monotone Operatoren stetig und hemistetige, monotone Operatoren demistetig sind, ist in Zeidler [23, Prop. 26.4] zu finden. Stetige Operatoren sind klarerweise demistetig, da nach Proposition 1.12 (i) aus starker Konvergenz die schwache Konvergenz folgt.

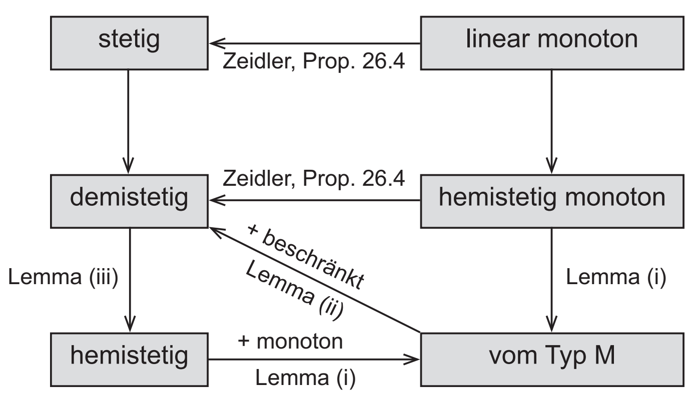

Abbildung 3.1: Beziehungen zwischen Eigenschaften von Operatoren.

Das Hauptresultat ist im folgenden Satz enthalten.

Theorem 3.22 (Existenz für das abstrakte Cauchy-Problem). *Seien $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ein Evolutionstripel, $1 < p < \infty$, $X = L^p(0,T;V)$ und $A : X \to X'$ ein beschränkter, koerziver Operator vom Typ M mit*

$$\int_0^t \langle A(u), u\rangle_{V'} ds \geq \alpha \int_0^t \|u\|_V^p ds \quad \textit{für alle } u \in X,\ 0 < t < T \tag{3.13}$$

für ein $\alpha > 0$. Seien ferner $u_0 \in H$ und $f \in X'$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$ von (3.11).

Beweis. Wir verwenden die Galerkin-Methode, um eine Lösung zu konstruieren.

Schritt 1: Lösung eines endlichdimensionalen Problems. Da V ein separabler Banachraum ist, existiert nach Zeidler [23, Prop. 21.49, p. 272] eine Basis (v_k) von V in dem Sinne, dass $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig und der Abschluss von $\cup_m \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$ gleich V ist. Definiere den endlichdimensionalen Raum $V_m = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$. Wir betrachten die folgenden Galerkin-Gleichungen: Finde $u_m(t) \in V$, so dass

$$\langle u_m'(t), v_k\rangle_{V'} + \langle A(u_m(t)), v_k\rangle_{V'} = \langle f(t), v_k\rangle_{V'}, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{3.14}$$

mit dem Anfangswert $u_m(0) = u_m^0$, wobei u_m^0 die Orthogonalprojektion in V_m von u_0 ist. Dann gilt $u_m^0 \to u_0$ in H für $m \to \infty$. Die obigen Gleichungen stellen ein nichtlineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen dar. Nach dem Satz von Peano ist das System lösbar, wenn die Nichtlinearität stetig ist. Wir müssen also nachweisen, dass die Einschränkung $A : V_m \to V_m'$ stetig ist.

Nach Lemma 3.21 (ii) ist $A : X \to X'$ demistetig. Wir behaupten, dass dann auch $A : V \to V'$ demistetig ist. Wähle $(u_k) \subset V$ mit $u_k \to u$ in V. Da (u_k) konstant in der Zeit ist, gilt sogar $u_k \to u$ in $X = L^p(0,T;V)$. Daraus folgt $A(u_k) \rightharpoonup A(u)$ in X'. Da u_k nicht von der Zeit abhängt, ergibt sich sofort $A(u_k) \rightharpoonup A(u)$ in V', d.h., $A : V \to V'$ ist demistetig. Es folgt, dass die Einschränkung $A : V_m \to V_m'$ stetig ist, denn

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|A(u_k) - A(u)\|_{V_m'} &= \lim_{k\to\infty} \sup_{\|v\|_{V_m} \leq 1} \big|\langle A(u_k) - A(u), v\rangle\big| \\ &= \sup_{\|v\|_{V_m} \leq 1} \lim_{k\to\infty} \big|\langle A(u_k) - A(u), v\rangle\big| = 0, \end{aligned}$$

und wir können den Grenzwert und die Supremumsbildung vertauschen, weil der Raum V_m' endlichdimensional ist. Es existiert also eine Lösung $u_m : [0, T_m] \to V_m$ von (3.14), die wir in der Form $u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_k^m(t) v_k$ schreiben können.

Theoretisch könnte $T_m \to 0$ für $m \to \infty$ gelten, so dass wir im Grenzwert $m \to \infty$ keine sinnvolle Lösung erhalten würden. Wir behaupten aber, dass wir $T_m = T$ wählen, also das Existenzintervall maximal ausweiten können. Um dies zu zeigen, leiten wir

A-priori-Abschätzungen her. Wir multiplizieren (3.14) mit d_k^m und summieren über alle $k = 1 \ldots, m$:

$$\langle u_m', u_m \rangle_{V'} + \langle A(u_m), u_m \rangle_{V'} = \langle f, u_m \rangle_{V'}. \tag{3.15}$$

Der erste Term kann nach Proposition 3.4 als die Zeitableitung von $\frac{1}{2}\|u_m\|_H^2$ geschrieben werden, und der Term auf der rechten Seite wird mit Hilfe der Norm von f in V' abgeschätzt. Dies ergibt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_H^2 + \langle A(u_m), u_m \rangle_{V'} \le \|f\|_{V'}\|u_m\|_V, \quad 0 \le t \le T_m.$$

Integration über $(0, t)$, Verwendung der Koerzivitätsungleichung (3.13) und Anwendung von Proposition 3.4 (iv) liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_H^2 + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u_m\|_V^p ds &\le \frac{1}{2}\|u_m^0\|_H^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{V'}\|u_m(s)\|_V ds - \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u_m\|_V^p ds \\ &\le \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{V'}\|u_m(s)\|_V ds - \frac{\alpha}{2}\|u_m\|_X^p. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Wegen $p > 1$ ist die rechte Seite beschränkt bezüglich m, und wir erhalten

$$\|u_m(t)\|_H \le C(u_0, T, f), \quad 0 \le t \le T_m. \tag{3.17}$$

Wir können also die Lösung $u_m(t)$ fortsetzen bis $t = T$. Dies impliziert $T_m = T$.

Schritt 2: A-priori-Abschätzungen und Grenzwert $m \to \infty$. Die Abschätzung (3.16) zeigt, dass (u_m) in $L^\infty(0, T; H)$ und $X = L^p(0, T; V)$ beschränkt ist. Daraus folgt die Existenz einer Teilfolge $(u_{m'})$ mit

$$u_{m'} \rightharpoonup u \quad \text{in } X, \quad u_{m'}(T) \rightharpoonup u^* \quad \text{in } H. \tag{3.18}$$

Wir erinnern, dass $W^{1,p}(0, T; V, H)$ stetig in $C^0([0, T]; H)$ einbettet, also $u_m(T) \in H$ definiert ist. Da A beschränkt ist, ist auch die Folge $(A(u_m))$ in X' beschränkt und es existiert eine Teilfolge mit

$$A(u_{m'}) \rightharpoonup b \quad \text{in } X', \tag{3.19}$$

wobei die beiden Teilfolgen in (3.18) und (3.19) ohne Einschränkung übereinstimmen mögen (ansonsten wählen wir eine Teilfolge von $(u_{m'})$ aus (3.18); für diese Teilfolge gilt (3.18) und (3.19)).

Multipliziere die Galerkin-Gleichungen (3.14) mit $\phi \in C^1([0, T])$, integriere über $(0, T)$ und integriere partiell bezüglich t:

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u_m(s), \phi'(s)v_k)_H ds + \int_0^T \langle A(u_m(s)) - f(s), \phi(s)v_k \rangle_{V'} ds \\ = (u_m(0), \phi(0)v_k)_H - (u_m(T), \phi(T)v_k)_H, \quad k = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Wegen (3.18) und (3.19) können wir den Grenzwert $m' \to \infty$ in dieser Gleichung durchführen und erhalten

$$-\int_0^T (u(s), \phi'(s)v_k)_H ds + \int_0^T \langle b(s) - f(s), \phi(s)v_k\rangle_{V'} ds \\ = (u(0), \phi(0)v_k)_H - (u^*, \phi(T)v_k)_H, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Da (v_k) eine Basis von V und $C^1([0,T])$ dicht in $L^p(0,T)$ ist, ist die Menge aller Funktionen von der Form ϕv_k (oder deren Linearkombinationen) mit $\phi \in C^1([0,T])$ dicht in $X = L^p(0,T;V)$. Dies bedeutet

$$-\int_0^T \langle u, v_t\rangle_{V'} ds + \int_0^T \langle b - f, v\rangle_{V'} ds = (u_0, v(0))_H - (u^*, v(T))_H$$

für alle $v \in W^{1,p}(0,T;V,H)$. Dies ist die schwache Formulierung der Operatorgleichung

$$u_t + b = f \quad \text{in } X', \quad u(0) = u_0, \quad u(T) = u^*. \tag{3.20}$$

Es bleibt $b = A(u)$ zu zeigen.

Schritt 3: Identifikation des Grenzwerts. Für die Identifikation von $b = A(u)$ benutzen wir die Typ-M-Eigenschaft von A. Wir integrieren die spezielle Galerkin-Gleichung (3.15) über $(0,T)$ und verwenden Proposition 3.4:

$$\int_0^T \langle A(u_m), u_m\rangle_{V'} ds - \int_0^T \langle f, u_m\rangle_{V'} ds = \frac{1}{2}\|u_m(0)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u_m(T)\|_H^2.$$

Der Ausdruck $\int_0^T \langle \cdot, \cdot\rangle_{V'} ds$ ist gleich $\langle \cdot, \cdot\rangle_{X'}$, so dass wir

$$\langle A(u_m), u_m\rangle_{X'} = \langle f, u_m\rangle_{X'} + \frac{1}{2}\|u_0^m\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u_m(T)\|_H^2$$

schreiben können. Wir wenden auf beiden Seiten den Limsup an:

$$\limsup_{m'\to\infty} \langle A(u_{m'}), u_{m'}\rangle_{X'} = \limsup_{m'\to\infty} \Big(\langle f, u_{m'}\rangle_{X'} + \frac{1}{2}\|u_{m'}^0\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u_{m'}(T)\|_H^2\Big). \tag{3.21}$$

Da $u_{m'}$ schwach in X gegen u konvergiert, ist der erste Term auf der rechten Seite gleich

$$\limsup_{m'\to\infty} \langle f, u_{m'}\rangle_{X'} = \langle f, u\rangle_{X'}.$$

Die Folge $(u_{m'}^0)$ konvergiert stark in H gegen u_0, so dass

$$\limsup_{m'\to\infty} \|u_{m'}^0\|_H^2 = \|u_0\|_H^2.$$

Die Folge $(u_{m'}(T))$ konvergiert schwach in H gegen $u^* = u(T)$ (siehe (3.18)). Die Norm $\|u_{m'}(T)\|_H$ konvergiert im allgemeinen nicht, aber es gilt:

$$\|u(T)\|_H^2 \leq \liminf_{m'\to\infty} \|u_{m'}(T)\|_H^2$$

oder nach Multiplikation mit -1:

$$\limsup_{m'\to\infty}(-\|u_{m'}(T)\|_H^2) \leq -\|u(T)\|_H^2.$$

Daher folgt aus (3.21)

$$\limsup_{m'\to\infty}\langle A(u_{m'}), u_{m'}\rangle_{X'} \leq \langle f, u\rangle_{X'} + \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2. \tag{3.22}$$

Nach Proposition 3.4 (iv) und (3.20) folgt

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 = \int_0^T \langle u_t, u\rangle_{V'} dt = \int_0^T \langle f - b, u\rangle_{V'} dt = \langle f - b, u\rangle_{X'}.$$

Setzen wir dies in (3.22) ein, so ergibt sich

$$\limsup_{m'\to\infty}\langle A(u_{m'}), u_{m'}\rangle_{X'} \leq \langle f, u\rangle_{X'} - \langle f - b, u\rangle_{X'} = \langle b, u\rangle_{X'}.$$

Wir haben folgende Eigenschaften gezeigt:

$$u_{m'} \rightharpoonup u \quad \text{in } X, \quad A(u_{m'}) \rightharpoonup b \quad \text{in } X' \quad \text{und} \quad \limsup_{m'\to\infty}\langle A(u_{m'}), u_{m'}\rangle_{X'} \leq \langle b, u\rangle_{X'}.$$

Da A vom Typ M ist, erhalten wir $A(u) = b$. Dies zeigt, dass u die Operatorgleichung $u_t + A(u) = f$ in X' mit $u(0) = u_0$ in H löst. □

Die Voraussetzungen von Satz 3.22 beziehen sich auf den Orts-Zeit-Operator $A : X \to X'$. Im allgemeinen werden wir nur den Ortsoperator $A : V \to V'$ vorzuliegen haben (siehe etwa Beispiel 3.18). Es ist also zu klären, welche Voraussetzungen $A : V \to V'$ erfüllen muss, damit der Existenzsatz 3.22 angewendet werden kann. Hierfür zeigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.23. *Sei $A : V \to V'$ ein hemistetiger und monotoner Operator, der im folgenden Sinne beschränkt und koerziv ist:*

$$\|A(u)\|_{V'} \leq C\|u\|_V^{p-1}, \quad \langle A(u), u\rangle_{V'} \geq \alpha\|u\|_V^p \quad \textit{für alle } u \in V,$$

wobei $1 < p < \infty$. Dann ist der Orts-Zeit-Operator $A : X \to X'$ monoton, vom Typ M, beschränkt und koerziv mit

$$\|A(u)\|_{X'} \leq C^{1/q}\|u\|_X^{p-1}, \quad \langle A(u), u\rangle_{X'} \geq \alpha\|u\|_X^p \quad \textit{für alle } u \in X$$

(mit derselben Konstante $C > 0$ wie oben).

Beweis. Die Beschränktheit von $A : X \to X'$ ergibt sich mit der Hölder-Ungleichung wegen $X' = L^q(0,T;V')$ und $q(p-1) = p$ aus

$$\|A(u)\|_{X'} = \Big(\int_0^T \|A(u)\|_{V'}^q dt\Big)^{1/q} \le C\Big(\int_0^T \|u\|_V^{q(p-1)} dt\Big)^{1/q} = C\|u\|_X^{p-1}.$$

Die Monotonie von $A : V \to V'$ überträgt sich sofort auf $A : X \to X'$, ebenso die Koerzivität. Wir zeigen nun, dass $A : X \to X'$ hemistetig ist. Dann folgt mit Lemma 3.21 (i), dass A vom Typ M ist. Seien $t_k \to t$ und $u, v, w \in X$. Dann ist

$$\langle A(u + t_k v), w\rangle_{X'} = \int_0^T \langle A(u + t_k v), w\rangle_{V'} ds. \tag{3.23}$$

Da $A : V \to V'$ hemistetig ist, gilt $\langle A(u + t_k v), w\rangle_{V'} \to \langle A(u + tv), w\rangle_{V'}$. Die Beschränkheit liefert

$$\|A(u + t_k v)\|_{V'} \le C\|u + t_k v\|_V^{p-1} \le C'\big(\|u\|_V^{p-1} + |t_k|^{p-1}\|v\|_V^{p-1}\big).$$

Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz können wir in (3.23) den Grenzwert $t_k \to t$ durchführen und erhalten die Hemistetigkeit von $A : X \to X'$. □

Satz 3.22 liefert nur die Existenz, aber nicht notwendigerweise die Eindeutigkeit einer Lösung. Die Lösung ist eindeutig, wenn der Operator zusätzlich monoton ist.

Theorem 3.24 (Eindeutigkeit für das abstrakte Cauchy-Problem). *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 3.22. Außerdem sei der Operator $A : V \to V'$ monoton. Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$ von* (3.11).

Beweis. Seien u_1 und u_2 zwei schwache Lösungen. Verwenden wir $u_1 - u_2$ als Testfunktion in der schwachen Formulierung für die Differenz der Gleichungen für u_1 bzw. u_2, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u_1 - u_2)(t)\|_H^2 &= \langle (u_1 - u_2)_t(t), (u_1 - u_2)(t)\rangle_{V'} \\ &= -\langle A(u_1(t)) - A(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle_{V'} \le 0.\end{aligned}$$

Wegen $(u_1 - u_2)(0) = 0$ folgt $(u_1 - u_2)(t) = 0$ für alle $t \ge 0$, also Eindeutigkeit. □

Beispiel 3.25. Wir betrachten die p-Laplace-Gleichung

$$u_t - \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \tag{3.24}$$

wobei $p \ge 2$. Wir haben bereits in Beispiel 3.20 gezeigt, dass der Operator $A : V \to V'$, definiert durch $A(u) = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ und $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, monoton, demistetig und koerziv mit

$$\langle A(u), u\rangle_{V'} \ge C\|u\|_V^p$$

ist. Aus der Demistetigkeit folgt mit Lemma 3.21 (iii) die Hemistetigkeit von $A : V \to V'$. Außerdem ist A beschränkt, denn aus der Hölder-Ungleichung erhalten wir

$$|\langle A(u), v\rangle_{V'}| = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx \le \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_V^{p-1}\|v\|_V,$$

also $\|A(u)\|_{V'} \le \|u\|_V^{p-1}$. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3.23 erfüllt, und der Operator $A : X \to X'$ ist beschränkt, koerziv und vom Typ M. Nach Satz 3.24 existiert genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$ (mit $H = L^2(\Omega)$) von (3.24). $\square$

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz 3.24 ist leider auf das zweite Beispiel

$$u_t - \operatorname{div}(a(u)\nabla u) = 0$$

nicht anwendbar, da der Operator $A(u) = -\operatorname{div}(a(u)\nabla u)$, $u \in V = H_0^1(\Omega)$, zwar beschränkt und koerziv, aber im allgemeinen weder monoton noch vom Typ M ist (außer $a(u)$ ist monoton bzw. beschränkt). Die Techniken im Beweis von Satz 3.22 können zwar verwendet, müssen aber modifiziert werden, um den Beweis auf die obige quasilineare Gleichung anzupassen. Diese Situation ist typisch für nichtlineare Gleichungen: Es gibt keinen allgemeinen Existenzsatz, der alle nichtlinearen Gleichungen umfasst, und meistens muss die Existenz von Lösungen eines gegebenen nichtlinearen Problems neu bewiesen werden. Hierfür können allerdings die vorgestellten Techniken, wie Maximumprinzipien, Fixpunktsätze, Monotonieeigenschaften usw., verwendet werden.

Theorem 3.26 (Existenz und Eindeutigkeit für quasilineare Diffusionsgleichungen). *Seien $a \in C^0(\mathbb{R})$ mit $0 < a_* \le a(u) \le a^*$ für alle $u \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Dann existiert genau eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ von*

$$u_t - \operatorname{div}(a(u)\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(\cdot,0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \tag{3.25}$$

wobei $V = H_0^1(\Omega)$ und $H = L^2(\Omega)$.

Beweis. Der Beweis ist eine Modifikation des Beweises von Satz 3.22.

Schritt 1: Lösung der Galerkin-Gleichungen. Sei (v_k) eine Orthonormalbasis von H, die bezüglich des Skalarprodukts $(u,v)_V = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$ orthogonal ist. Eine derartige Basis kann aus den Eigenfunktionen von $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$ konstruiert werden. Die Eigenfunktionen bilden nämlich eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega)$, und sie erfüllen

$$(v_j, v_k)_V = \int_\Omega \nabla v_j \cdot \nabla v_k dx = -\int_\Omega \Delta v_j v_k dx = \lambda_j \int_\Omega v_j v_k dx = \lambda_j \delta_{jk}.$$

Wir betrachten die Galerkin-Gleichungen

$$(u_m'(t), v_k)_H + \langle A(u_m(t)), v_k\rangle_{V'} = 0, \quad k = 1,\dots,m,$$

wobei $A(u) = -\operatorname{div}(a(u)\nabla u)$, und suchen $u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_k^m(t)v_k$ im Raum $V_m = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$. Die Anfangswerte lauten $u_m(0) = u_m^0$, wobei $u_m^0 \to u_0$ in H. Die Galerkin-Gleichungen bilden ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Koeffizienten d_k^m. Da der Operator A stetig ist, folgt die Existenz einer lokalen Lösung in $[0, T_m]$.

Schritt 2: A-priori-Abschätzungen. Multiplizieren wir die Galerkin-Gleichungen mit d_k^m und summieren über $k = 1, \ldots, m$, so folgt

$$\begin{aligned}
0 &= (u_m'(t), u_m(t))_H + \langle A(u_m(t)), u_m(t)\rangle_{V'} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \int_\Omega a(u_m(t))\nabla u_m(t) \cdot \nabla u_m(t) dx \\
&\geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + a_* \int_\Omega |\nabla u_m(t)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Integrieren wir diese Ungleichung über $(0, t)$, so ergibt sich

$$\|u_m(t)\|_H^2 + 2a_*\|u_m\|_X^2 \leq \|u_m(0)\|_H^2 \leq \|u_0\|_H^2, \tag{3.26}$$

wobei $X = L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Aus dieser Abschätzung können wir die schwache Konvergenz einer Teilfolge von (u_m) gegen u schließen. Um zum Grenzwert $m \to \infty$ in den Galerkin-Gleichungen gehen zu können, müssen wir zeigen, dass $a(u_m)$ gegen $a(u)$ konvergiert. Da (u_m) nur schwach konvergiert, können wir dies nicht ohne weiteres folgern. Im Beweis von Satz 3.22 hatten wir zwar ein ähnliches Problem; dort hatten wir aber vorausgesetzt, dass A vom Typ M ist, was die Identifikation des Grenzwerts der Nichtlinearität erlaubte. Hier benötigen wir ein anderes Hilfsmittel. Dazu zeigen wir zunächst, dass auch $(\partial_t u_m) = (u_m')$ beschränkt ist.

Sei $v \in V$ mit $v = v_0 + v^\perp$ und $v_0 \in V_m$. Dann ist $v^\perp = v - v_0$ bezüglich H orthogonal zu v_0. Aus

$$\langle u_m'(t), v\rangle_{V'} = (u_m'(t), v)_H = (u_m'(t), v_0)_H = -\langle A(u_m(t)), v_0\rangle_{V'}$$

folgt

$$\|\partial_t u_m(t)\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} |\langle u_m'(t), v\rangle_{V'}| \leq \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|A(u_m(t))\|_{V'}\|v_0\|_V \leq \|A(u_m(t))\|_{V'}, \tag{3.27}$$

denn $\|v\|_V \leq 1$ impliziert $\|v_0\|_V \leq 1$. Weiter erhalten wir

$$\langle A(u_m(t)), v\rangle_{V'} = \int_\Omega a(u_m(t))\nabla u_m(t) \cdot \nabla v dx \leq a^*\|u_m(t)\|_V\|v\|_V,$$

so dass $\|A(u_m(t))\|_{V'} \leq a^*\|u_m(t)\|_V$. Daher liefert (3.27) nach Integration über $(0, T)$

$$\|\partial_t u_m\|_{X'}^2 = \int_0^T \|\partial_t u_m(t)\|_{V'}^2 dt \leq (a^*)^2 \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 dt = (a^*)^2\|u_m\|_X^2 \leq C, \tag{3.28}$$

wobei wir für die letzte Ungleichung (3.26) benutzt haben. Die obigen gleichmäßigen Abschätzungen zeigen, dass es eine Teilfolge gibt mit

$$u_{m'} \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(0,T;V), \quad \partial_t u_{m'} \rightharpoonup \partial_t u \quad \text{in } L^2(0,T;V'). \tag{3.29}$$

Schritt 3: Grenzwert $m' \to \infty$. Wir wollen in der Galerkin-Gleichung

$$\int_0^T \langle \partial_t u_m, v\rangle_{V'} dt + \int_0^T \int_\Omega a(u_m)\nabla u_m \cdot \nabla v dx dt = 0 \quad \text{für alle } v \in V_m \tag{3.30}$$

zum Grenzwert $m' \to \infty$ gehen. Dazu müssen wir zeigen, dass $a(u_{m'})$ konvergiert. Hierfür verwenden wir das Lemma von Aubin (Satz 3.5). Dieses Lemma besagt, dass beschränkte Folgen in $W^{1,2}(0,T;V,H)$ eine stark konvergente Teilfolge in $L^2(0,T;H)$ besitzen. Daher folgt aus (3.29) die Existenz einer Teilfolge, die wir wiederum mit $(u_{m'})$ bezeichnen, so dass

$$u_{m'} \to u \quad \text{in } L^2(0,T;H).$$

Da die Funktion a in $\mathbb{R}$ beschränkt ist, erhalten wir aus Lemma 3.13

$$a(u_{m'}) \to a(u) \quad \text{in } L^2(0,T;H).$$

Wir können also in (3.30) den Grenzwert $m' \to \infty$ durchführen und erhalten

$$\int_0^T \langle \partial_t u, v\rangle_{V'} dt + \int_0^T \int_\Omega a(u)\nabla u \cdot \nabla v dx dt = 0 \quad \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T)).$$

Diese Gleichung gilt aus Dichtheitsgründen auch für alle $v \in X = L^2(0,T;V)$. Dies beweist die Existenz einer schwachen Lösung von (3.25), wenn wir $u(0) = u_0$ zeigen können. Nun folgt aus der gleichmäßigen Abschätzung (3.28), dass (u_m) in $H^1(0,T;V')$ beschränkt ist. Da in einer Raumdimension der Raum H^1 stetig in C^0 einbettet, ist (u_m) in $C^0([0,T];V')$ beschränkt und insbesondere ist $(u_m(0))$ in V' beschränkt. Daher existiert eine Teilfolge mit $u_{m'}(0) \rightharpoonup w$ in V' für ein $w \in V'$. Wir müssen zeigen, dass $w = u(0)$. Der Beweis ist etwas technisch; siehe den Beweis von Satz 6.26, Schritt 4 im Vorlesungsskript zur Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen". (Die Idee lautet, einmal bezüglich der Zeit partiell zu integrieren: $\langle u_t, v\rangle = -(u, v_t)_{L^2} + (u(0), v(0))_{L^2}$ für Testfunktionen v mit $v(T) = 0$.)

Schritt 4: Eindeutigkeit einer Lösung. Seien u_1, $u_2 \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ zwei schwache Lösungen von (3.25). Dann erfüllt die Differenz die schwache Formulierung

$$\int_0^t \langle (u_1-u_2)_t, v\rangle_{V'} ds + \int_0^t \int_\Omega \big(a(u_1)\nabla u_1 - a(u_2)\nabla u_2\big) \cdot \nabla v dx ds = 0.$$

Verwenden wir die Testfunktion $u_1 - u_2$, erhalten wir wegen $(u_1 - u_2)(0) = 0$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u_1-u_2)(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \big(a(u_1)\nabla u_1 - a(u_2)\nabla u_2\big) \cdot \nabla(u_1-u_2) dx ds = 0.$$

Das zweite Integral kann leider nicht ohne weiteres abgeschätzt werden. Wir verwenden hier die sogenannte duale Methode bzw. H^{-1}-Methode.

Definiere dafür $b(u) = \int_0^u a(s)ds$, $u \in \mathbb{R}$. Dann ist $\nabla b(u) = a(u)\nabla u$, und die Differentialgleichung in (3.25) kann als

$$u_t - \Delta b(u) = 0 \tag{3.31}$$

geschrieben werden. Sei für gegebenes $t \in [0,T]$ $w(t) \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung von

$$\Delta w(t) = (u_1 - u_2)(t) \in L^2(\Omega), \quad w(t) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Da die rechte Seite eine $L^2(0,T)$-Funktion ist, ist w eine Funktion aus $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Außerdem ist $\Delta w_t = (u_1 - u_2)_t \in L^2(0,T;V')$. Wir können also w als Testfunktion in der Differenz der Gleichungen (3.31) für u_1 und u_2 verwenden:

$$\int_0^t \langle \Delta w_t, w\rangle_{V'} ds + \int_0^t \int_\Omega \nabla(b(u_1) - b(u_2)) \cdot \nabla w dx ds = 0.$$

Wir integrieren in beiden Integralen partiell:

$$\int_0^t (\nabla w_t, \nabla w)_H ds + \int_0^t \int_\Omega (b(u_1) - b(u_2))\Delta w dx ds = 0.$$

Die Randintegrale verschwinden, da aus $b(0) = 0$ und $u_1 - u_2 = 0$ auf $\partial\Omega$ $b(u_1) - b(u_2) = 0$ auf $\partial\Omega$ folgt. Mit Proposition 3.4 ergibt sich

$$\int_0^t (\nabla w_t, \nabla w)_H ds = \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|\nabla w(0)\|_H^2 = \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|_H^2,$$

denn $(u_1 - u_2)(0) = 0$ und daher $w(0) = 0$. Folglich ist

$$\frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|_H^2 = -\int_0^t \int_\Omega (b(u_1) - b(u_2))(u_1 - u_2) dx ds \le 0,$$

da die Funktion b monoton wachsend ist. Es folgt $\nabla w(t) = 0$, also $(u_1 - u_2)(t) = 0$ für fast alle $t \in (0,T)$. □

Bemerkung. Der obige Eindeutigkeitsbeweis wird die duale Methode genannt, da das Randwertproblem $\Delta w = u_1 - u_2$ in Ω, $w = 0$ auf $\partial\Omega$ das zu (3.31) duale Problem ist. Der Name H^{-1}-Methode rührt daher, dass die Norm $\|\nabla w\|_H$ als die H^{-1}-Norm von $u_1 - u_2$ interpretiert werden kann. Die elliptische Abschätzung ergibt nämlich

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \le \|u_1 - u_2\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

wenn wir als H_0^1-Norm den Ausdruck $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ verwenden. Andererseits gilt

$$\|u_1 - u_2\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|\Delta w\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1} |\langle \Delta w, v\rangle_{H^{-1}}|$$

$$= \sup_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1} |(\nabla w, \nabla v)_{L^2}| \le \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}.$$

Beide Ungleichungen implizieren

$$\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} = \|u_1 - u_2\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

d.h. die Behauptung. □

3.5 Die Poröse-Medien-Gleichung

Wir analysieren die quasilineare parabolische Gleichung

$$u_t - \Delta(u^m) = 0 \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u^m = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \tag{3.32}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $m > 1$ seien. Damit u^m für alle $m > 1$ definiert ist, fordern wir, dass $u_0 \ge 0$. Dann erwarten wir nach dem Maximumprinzip, dass $u(t) \ge 0$ für alle $t > 0$. Die obige Gleichung ähnelt (3.25), wenn wir sie in der Form

$$u_t - \operatorname{div}(mu^{m-1}\nabla u) = 0$$

schreiben. Die Theorie aus Abschnitt 3.4 ist jedoch nicht anwendbar, da die Funktion $a(u) = mu^{m-1}$ nicht nach unten durch eine positive Konstante beschränkt ist, sondern nur $a(u) \ge 0$ gilt. Man nennt (3.32) auch eine *degeneriert* parabolische Gleichung. Dennoch ist es möglich, die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von (3.32) zu zeigen. Die Degeneriertheit an der Stelle $u = 0$ führt allerdings dazu, dass wir den Lösungsbegriff abschwächen müssen: Wir können nicht $u(t) \in H^1(\Omega)$ erwarten, sondern nur $u(t)^m \in H^1(\Omega)$. Wir definieren daher:

Definition 3.27. *Wir nennen eine Funktion $u \ge 0$ eine* schwache Lösung *von* (3.32), *wenn*

$$u^m \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

für alle $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ gilt

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{H^{-1}} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla(u^m) \cdot \nabla v dx dt = 0$$

und $u(0) = u_0$ im Sinne des $H^{-1}(\Omega)$.

Theorem 3.28. *Seien $T > 0$, $m > 1$ und $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$ mit $u_0 \ge 0$ in Ω. Dann existiert genau eine schwache Lösung von* (3.32) *im Sinne der Definition 3.27.*

Beweis. Schritt 1: Eindeutigkeit von Lösungen. Die Eindeutigkeit wird wie im Beweis von Satz 3.26 bewiesen werden, indem wir dort $b(u) = u^m$ setzen.

Schritt 2: Lösung eines approximativen Problems. Um die Degeneriertheit der Gleichung zu umgehen, regularisieren wir das Problem, d.h., wir führen einen Parameter $\varepsilon > 0$ ein, so dass der regularisierte Differentialoperator elliptisch wird. Wir erhalten eine Lösung des ursprünglichen Problems, indem wir den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ durchführen. Diese Vorgehensweise ist typisch für nichtlineare Differentialgleichungen, die nicht mit Hilfe von Standardresultaten gelöst werden können.

Wir regularisieren zweifach. Zum einen nehmen wir an, dass das Anfangsdatum beschränkt ist. Außerdem addieren wir zum Diffusionskoeffizienten die Zahl $\varepsilon \in (0,1)$ hinzu, so dass er strikt positiv ist. Seien also $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ mit $u_0 \geq 0$ und $\varepsilon \in (0,1)$. Wir betrachten das regularisierte Problem

$$\partial_t u_\varepsilon - \operatorname{div}(a_\varepsilon(u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon) = 0 \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u_\varepsilon(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \tag{3.33}$$

wobei $a_\varepsilon(u) = mu_M^{m-1} + \varepsilon$ und $u_M = \max\{0, \min\{u, M\}\}$. Dann erfüllt a_ε die Ungleichungen $0 < \varepsilon \leq a_\varepsilon(u) \leq mM^{m-1} + \varepsilon$. Nach Satz 3.26 existiert also eine eindeutig bestimmte Lösung $u_\varepsilon \in W^{1,2}(0,T;V,H)$.

Wir beweisen im folgenden einige Abschätzungen für u_ε, die gleichmäßig in ε sind. Verwenden wir $(u_\varepsilon - M)^+ \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, wobei $M = \sup_\Omega u_0$, als Testfunktion in der schwachen Formulierung von (3.33), so folgt

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u_\varepsilon - M)^+(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega a_\varepsilon(u_\varepsilon)|\nabla(u_\varepsilon - M)^+|^2 dxds = 0.$$

Daher ist $u_\varepsilon \leq M$. Auf ähnliche Weise können wir mit Hilfe der Testfunktion u_ε^- zeigen, dass $u_\varepsilon \geq 0$ gilt. Hierfür benötigen wir die Eigenschaft $u_0 \geq 0$, damit $u_\varepsilon(0)^- = 0$ erfüllt ist. Die Funktion u_ε ist also beschränkt. Daher ist $\nabla(u_\varepsilon^m) = mu_\varepsilon^{m-1}\nabla u_\varepsilon$ eine Funktion aus L^2. Außerdem gilt $u_\varepsilon = 0$ und $u_\varepsilon^m = 0$ auf $\partial\Omega$ im schwachen Sinne. Also können wir $u_\varepsilon^m \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ als Testfunktion verwenden und erhalten

$$\int_0^t \langle \partial_t u_\varepsilon, u_\varepsilon^m \rangle_{H^{-1}} ds + \int_0^t \int_\Omega \big(|\nabla u_\varepsilon^m|^2 + m\varepsilon u_\varepsilon^{m-1}|\nabla u_\varepsilon|^2\big) dxds = 0.$$

Das erste Integral kann ähnlich wie in Lemma 3.10 umformuliert werden, so dass

$$\frac{1}{m+1}\int_\Omega \big(u_\varepsilon(t)^{m+1} - u_\varepsilon(0)^{m+1}\big) dx + \int_0^t \int_\Omega \big(|\nabla u_\varepsilon^m|^2 + m\varepsilon u_\varepsilon^{m-1}|\nabla u_\varepsilon|^2\big) dxds = 0.$$

Mit der Testfunktion u_ε folgt nach einer analogen Rechnung

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \big(u_\varepsilon(t)^2 - u_\varepsilon(0)^2\big) dx + \int_0^t \int_\Omega \big(mu_\varepsilon^{m-1}|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2\big) dxds = 0.$$

Wir erhalten die gleichmäßigen Abschätzungen

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^{m+1}(\Omega))} + \|u_\varepsilon^m\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C\|u_0\|_{L^{m+1}(\Omega)}, \tag{3.34}$$

Die Abschätzung für $\sqrt{\varepsilon}u_\varepsilon$ wird unbrauchbar im Grenzwert $\varepsilon \to 0$, ist aber nützlich bei der Durchführung des Grenzwerts. Für die Zeitableitung können wir die folgende Abschätzung herleiten:

$$\begin{aligned}\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &= \|\mathrm{div}((mu_\varepsilon^{m-1}+\varepsilon)\nabla u_\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\ &\le \|mu_\varepsilon^{m-1}\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \varepsilon\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &= \|\nabla u_\varepsilon^m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \varepsilon\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C\|u_0\|_{L^{m+1}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Schritt 3: Grenzwert $\varepsilon \to 0$. Wegen (3.34) existiert eine Teilfolge, so dass für $\varepsilon' \to 0$

$$u_{\varepsilon'} \rightharpoonup^* u \quad \text{in } L^\infty(0,T;L^{m+1}(\Omega)), \quad u_{\varepsilon'}^m \rightharpoonup z \quad \text{in } L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist kompakt, daher ist auch die Einbettung der Dualräume $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ kompakt (siehe Zeidler [23, Prop. 21.35]). Die Beschränktheit von (u_ε) in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ und von $(\partial_t u_\varepsilon)$ in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ impliziert also gemäß dem Lemma von Aubin, dass (u_ε) kompakt in $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ ist. Es gilt also für eine Teilfolge:

$$u_{\varepsilon'} \to u \quad \text{in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Wir müssen zeigen, dass $z = u^m$. Dies folgt, wenn wir zeigen können, dass (u_ε) punktweise fast überall gegen u konvergiert. Leider können wir weder aus der schwachen Konvergenz in L^2 noch aus der starken Konvergenz in H^{-1} die punktweise Konvergenz folgern. Allerdings können wir die Identifikation $z = u^m$ unter Zuhilfenahme der Monotonie der Abbildung $x \mapsto x^m$ beweisen. Hierfür verwenden wir wieder den Trick von Browder und Minty. Da das Produkt $\langle u_{\varepsilon'}, u_{\varepsilon'}^m\rangle_{H^{-1}}$ gegen $\langle u, z\rangle_{H^{-1}} = \int_\Omega uzdx$ konvergiert, folgt für alle $v \in L^2(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ aus

$$0 \le \int_0^T \int_\Omega (u_{\varepsilon'} - v)(u_{\varepsilon'}^m - v^m)dxdt = \int_0^T \langle u_{\varepsilon'} - v, u_{\varepsilon'}^m - v^m\rangle_{H^{-1}}dt$$

im Grenzwert $\varepsilon' \to 0$

$$0 \le \int_0^T \langle u - v, z - v^m\rangle_{H^{-1}}dt = \int_0^T \int_\Omega (u-v)(z-v^m)dxdt.$$

Aus Dichtheitsgründen gilt diese Ungleichung auch für alle $v \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$. Wählen wir $v = u \pm \lambda w$ mit $\lambda > 0$ und $w \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$, so ergibt sich wie in den obigen Abschnitten $z = u^m$.

Wir können nun den Grenzwert $\varepsilon' \to 0$ in der schwachen Formulierung

$$\int_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon'}, v\rangle_{H^{-1}}dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla(u_{\varepsilon'}^m + \varepsilon' u_{\varepsilon'}) \cdot \nabla v dxdt = 0, \quad v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

durchführen. Da nach (3.34) $\sqrt{\varepsilon}\nabla u_\varepsilon$ in $L^2(\Omega \times (0,T))$ beschränkt ist, gilt

$$\Big|\int_0^T \int_\Omega \varepsilon' \nabla u_{\varepsilon'} \cdot \nabla v dxdt\Big| \le \sqrt{\varepsilon'}\|\sqrt{\varepsilon'}\nabla u_{\varepsilon'}\|_{L^2(\Omega\times(0,T))}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \to 0.$$

Wir erhalten

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle_{H^{-1}} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla(u^m)\cdot\nabla v dx dt = 0, \quad v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Die Randbedingung wird im schwachen Sinne $u^m = 0$ auf $\partial\Omega$ erfüllt, denn es gilt $z(t) = u(t)^m \in H_0^1(\Omega)$. Da $u_\varepsilon \in H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$, gilt die Anfangsbedingung im Sinne des $H^{-1}(\Omega)$.

Schritt 4: Allgemeine Anfangsdaten. Wir hatten angenommen, dass $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Wir betrachten nun allgemeine Anfangsdaten $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$. Ist $(u_{0,k}) \subset L^\infty(\Omega)$ eine Folge mit $u_{0,k} \to u_0$ in $L^{m+1}(\Omega)$ für $k\to\infty$, so existiert eine Lösungsfolge (u_k), die (3.32) mit $u_k(0) = u_{0,k}$ löst. Die Abschätzung (3.34) ist unabhängig von k, da $(u_{0,k})$ in $L^{m+1}(\Omega)$ beschränkt ist. Die Folge (u_k) ist nicht nach oben beschränkt, da diese Schranke von $\sup_\Omega u_{0,k}$ abhängt, aber wir benötigen diese Schranke nicht, um den Grenzwert $k\to\infty$ durchführen zu können. Die Abschätzungen (3.34) sind ausreichend, um in der schwachen Formulierung

$$\int_0^T \langle \partial_t u_k, v\rangle_{H^{-1}} dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla(u_k^m)\cdot\nabla v dx dt = 0, \quad v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

zum Limes $k\to\infty$ übergehen zu können. □

Bemerkung. Der Existenzsatz für die Poröse-Medien-Gleichung kann in verschiedenerlei Hinsicht verallgemeinert werden.

(i) Die Bedingung $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$ kommt aus der Energieabschätzung (3.34). Sie kann abgeschwächt werden. Nach Vazquez [22] genügt $u_0 \in L^1(\Omega)$. In diesem Fall existiert genau eine Lösung u von (3.32) mit $u \in C^0([0,\infty);L^1(\Omega))$. Man kann zeigen, dass u sogar unendlich oft stetig differenzierbar auf der Menge $\{(x,t)\in\Omega\times(0,\infty) : u(x,t) > 0\}$ ist. In der Nähe der Menge $\{u=0\}$ nimmt die Regularität allerdings ab.

Es ist außerdem möglich, Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen der allgemeineren Gleichung

$$u_t - \Delta f(u) = 0$$

mit entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen zu zeigen, wenn f streng monoton wachsend ist, einer Wachstumsbedingung genügt und $f(0) = 0$ erfüllt. Der Beweis hiervon ist nahezu identisch mit dem Beweis von Satz 3.28.

(ii) Die Poröse-Medien-Gleichung im Ganzraum besitzt eine explizite Lösung, nämlich die *Barenblatt-Funktion*

$$u(x,t) = t^{-\alpha}\Big(C - \beta\frac{m-1}{2m}\frac{|x|^2}{t^{2\beta}}\Big)_+^{1/(m-1)}, \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,$$

wobei $z_+ = \max\{0,z\}$ den Positivteil von z bedeute,

$$\alpha = \frac{n}{n(m-1)+2}, \quad \beta = \frac{1}{n(m-1)+2},$$

und die Konstante C wird durch die totale Masse vermittels der Massenerhaltungsgleichung $\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t_0)dx$ bestimmt, sofern die Masse $M = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t_0)dx$ zur Zeit t_0 bekannt ist. Die Barenblatt-Lösung hat die Gestalt eines "umgedrehten Paraboloids", das beim Nulldurchgang abgeschnitten ist. Für $t \to 0$ konvergiert die Barenblatt-Lösung gegen ein Vielfaches der Delta-Distribution, nämlich $M\delta_0$. Mit zunehmender Zeit wird das Paraboloid flacher und dehnt sich aus. Die Lösung besitzt interessanterweise für alle $t > 0$ einen kompakten Träger. Dies bedeutet, dass ein freier Rand $\{u = 0\}$ existiert und sich der positive Teil der Lösung $\{u > 0\}$ mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet. Dies steht im Kontrast zur unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Lösungen gleichmäßig parabolischer Gleichungen und ist dadurch begründet, dass der Diffusionskoeffizient mu^{m-1} für kleine Werte von u so klein wird, dass er die Ausbreitung hindert.
(iii) Anstelle der Regularisierung des Differentialoperators kann eine andere Regularisierung gewählt werden. Dazu wird die Poröse-Medien-Gleichung erst mit positiven Anfangs- und Randdaten

$$u_\varepsilon = \varepsilon \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u_\varepsilon(0) = u_0 + \varepsilon \quad \text{in } \Omega$$

gelöst. Man kann zeigen, dass das so regularisierte Problem ein Vergleichsprinzip für glatte Lösungen erfüllt, d.h., sind u_1 und u_2 zwei Lösungen von (3.33) mit $u_1 \leq u_2$ auf $\partial\Omega$ und $u_1(0) \leq u_2(0)$ in Ω, so folgt $u_1 \leq u_2$ in $\Omega \times (0,T)$. Ist daher $\varepsilon \leq \varepsilon'$, so gilt für die Lösung u_ε in Schritt 2 des obigen Beweises $u_\varepsilon = \varepsilon \leq \varepsilon' = u_{\varepsilon'}$ auf $\partial\Omega$ und $u_\varepsilon(0) = u_0 + \varepsilon \leq u_0 + \varepsilon' = u_{\varepsilon'}(0)$, und wir schließen $u_\varepsilon \leq u_{\varepsilon'}$. Die Folge (u_ε) ist also punktweise monoton fallend und nach unten beschränkt (da nichtnegativ). Nach dem Satz über die monotone Konvergenz existiert der punktweise Grenzwert $u = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$. Dann folgt aber aus $u_\varepsilon^m \rightharpoonup z$ in L^2 wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts, dass $z = u^m$. Ein vollständiger Beweis ist in Schweizer [18, Abschnitt 11] zu finden. □

Bemerkung. Es ist möglich, die starke Konvergenz der Folge $(u_{\varepsilon'})$ in L^2 zu beweisen. Dies liefert einen alternativen Beweis für die Identität $z = u^m$. Die Idee lautet zu zeigen, dass (u_ε) zwar nicht in H^1, aber in einem Raum mit geringerer Regularität, der kompakt in L^2 einbettet, liegt. Hierzu benötigen wir etwas Theorie der *Sobolev-Räume mit reellem Index*. Seien $s > 0$ und $1 < p < \infty$. Wir definieren den Raum

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{k,p}(\Omega) : s = k + \theta,\ k \in \mathbb{N}_0,\ \theta \in [0,1),\ \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} < \infty\},$$

wobei

$$\|u\|^p_{W^{s,p}(\Omega)} = \|u\|^p_{W^{k,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\Omega^2} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\theta}} dxdy.$$

Diese Räume sind reflexive Banachräume. Wir schreiben $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$. Für $s = 1$ stimmt der Raum $W^{s,p}(\Omega)$ mit dem in Abschnitt 1.2 definierten Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega)$ überein; siehe Adams [1, p. 204]. Wenn $\partial\Omega \in C^1$, so ist die Einbettung

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$$

stetig, wenn $p \leq r \leq np/(n-sp)$ (falls $n > sp$), $p \leq r < \infty$ (falls $n = sp$) und $p \leq r \leq \infty$ (falls $n < sp$); siehe Adams [1, Thm. 7.57]. Ferner ist die Einbettung

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s',p}(\Omega)$$

kompakt, wenn Ω beschränkt mit $\partial\Omega \in C^1$ und $s > s' > 0$ erfüllt ist (siehe Grisvard [12, Thm. 1.4.3.2]).
Wir verwenden das folgende Lemma von Chavent-Jaffre, dessen Beweis eine Übungsaufgabe ist.

Lemma 3.29 (Chavent-Jaffre). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $0 < s < 1$ und $1 < p < \infty$. Seien ferner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ eine hölderstetige Funktion, d.h. $|f(x) - f(y)| \le c_H|x-y|^\theta$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, wobei $c_H > 0$ und $\theta \in (0,1)$, und $u \in W^{s,p}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\|f(u)\|_{W^{\theta s,p/\theta}(\Omega)} \le c_H \|u\|^\theta_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

Wir wenden das Lemma auf $f(x) = x^{1/m}$ mit $\theta = 1/m$ und $p = 2$ an. Dann folgt

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{s/m,2m}(\Omega)} \le c_H \|u_\varepsilon^m\|^{1/m}_{W^{s,2}(\Omega)} \le C_0 \|u_\varepsilon^m\|^{1/m}_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Mit (3.34) ergibt sich die Abschätzung

$$\|u_\varepsilon\|^{2m}_{L^{2m}(0,T;W^{s/m,2m}(\Omega))} = \int_0^T \|u_\varepsilon\|^{2m}_{W^{s/m,2m}(\Omega)} dt \le C_0^{2m} \int_0^T \|u_\varepsilon^m\|^2_{H^1(\Omega)} dt \le C_1. \tag{3.35}$$

Aus den obigen Einbettungen folgt, dass für $s' < s$ die Einbettung

$$W^{s/m,2m}(\Omega) \hookrightarrow W^{s'/m,2m}(\Omega) \hookrightarrow L^{2m}(\Omega)$$

kompakt ist. Wir können also das Lemma von Aubin anwenden und schließen, dass (u_ε) relativ kompakt in $L^2(\Omega \times (0,T))$ ist:

$$u_{\varepsilon'} \to u \quad \text{in } L^2(\Omega \times (0,T)).$$

Eine Teilfolge konvergiert punktweise fast überall gegen u, woraus $u_{\varepsilon'}^m \to u^m$ punktweise fast überall folgt, also $z = u^m$. □

4 Weitere nichtlineare Gleichungen

In diesem Kapitel stellen wir weitere nichtlineare Gleichungen vor, um die Vielfalt möglicher Nichtlinearitäten zu illustrieren. Wir beschränken uns auf einige Beispiele, die in den Anwendungen eine gewisse Rolle spielen bzw. die die Anwendung bestimmter Techniken gestatten. Wegen der Komplexität der Probleme und der Fragestellungen werden wir nicht alle vorgestellten Resultate beweisen.

4.1 Stationäre Navier-Stokes-Gleichungen

In diesem Abschnitt analysieren wir die stationären inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen

$$-\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{4.1}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ sei. Die vektorwertige Funktion u beschreibt die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit, p den Druck, und f ist eine äußere Kraft. Wir werden eine schwache Formulierung für dieses Problem herleiten und einen Existenzsatz vorstellen. Dazu gehen wir wie in Ruzicka [17, Abschnitt 3.2] vor.

Die Schwierigkeit der Lösung von (4.1) besteht darin, dass sich in beiden Differentialgleichungen der entsprechende Term mit der höchsten Ableitung auf die Geschwindigkeit u bezieht. Lösen wir also für gegebenes p die erste Gleichung in (4.1), so muss die Lösung nicht notwendigerweise die zweite Gleichung erfüllen. Lösen wir die zweite Gleichung für u und die erste Gleichung für p, so haben wir Schwierigkeiten, Kompaktheit zu zeigen, da der Divergenzoperator die Differentiationsordnung nur um eins erhöht, der Laplace-Operator die Differentiationsordnung jedoch um zwei erniedrigt. Die Idee lautet, den Druck in der ersten Gleichung zu eliminieren. Multiplizieren wir die erste Gleichung in (4.1) mit einer vektorwertigen Testfunktion v (im Sinne eines Skalarprodukts) mit $v = 0$ auf $\partial\Omega$, integrieren über Ω und integrieren partiell, so erhalten wir

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla v dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla)u \cdot v dx - \int_\Omega p \operatorname{div} v dx = \int_\Omega f \cdot v dx.$$

Hierbei ist ∇u die Ableitungsmatrix von u und

$$\nabla u : \nabla v = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Der Ausdruck $(u \cdot \nabla)u \cdot v$ ist zu verstehen als die Summe

$$\sum_{i,j=1}^{3} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j.$$

Falls $\operatorname{div} v = 0$, so verschwindet das Integral mit dem Druck, und es bleibt nur eine Gleichung für u zu lösen. Wir definieren also einen Raum mit genau dieser Eigenschaft:

$$X = \{v \in H_0^1(\Omega)^3 : \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \Omega\}.$$

Er wird versehen mit der Norm

$$\|v\|_X^2 = \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} = \sum_{i,j=1}^{3} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Damit wird X ein reflexiver, separabler Banachraum (siehe Übungsaufgaben).

Wir leiten nun die schwache Formulierung her. Sei u eine klassische Lösung von (4.1). Wir multiplizieren (4.1) mit $v \in X$, integrieren über Ω, verwenden $\operatorname{div} v = 0$ und integrieren partiell:

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla v dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot v dx = \int_\Omega f \cdot v dx, \quad v \in X. \tag{4.2}$$

Um das Randwertproblem als Operatorgleichung zu formulieren, definieren wir die folgenden Operatoren:

$$\begin{aligned}
&A_1 : X \to X', && \langle A_1 u, v\rangle_{X'} = \int_\Omega \nabla u : \nabla v dx, \\
&A_2 : X \to X', && \langle A_2 u, v\rangle_{X'} = \int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot v dx, \\
&b \in X', && \langle b, v\rangle_{X'} = \int_\Omega f \cdot v dx.
\end{aligned}$$

Dann ist (4.2) äquivalent zur Operatorgleichung

$$A_1 u + A_2 u = b \quad \text{in } X'. \tag{4.3}$$

Die Operatoren A_1 und A_2 erfüllen die folgenden Eigenschaften.

Lemma 4.1. *Der Operator A_1 ist linear, stetig, koerziv und monoton. Der Operator A_2 ist beschränkt und stark stetig (d.h. aus $u_k \rightharpoonup u$ folgt $A_2 u_k \to A_2 u$). Die Summe $A = A_1 + A_2$ ist beschränkt, koerziv und vom Typ M.*

Wir bemerken, dass stark stetige Operatoren auch kompakt sind. Ist der Operator linear, so folgt aus der Kompaktheit auch die starke Stetigkeit (dies kann man direkt nachrechnen).

Beweis. Die Eigenschaften für A_1 sind einfach zu beweisen, da A_1 eine vektorwertige Variante von $A = -\Delta$ auf $H_0^1(\Omega)$ ist. Wir zeigen zuerst die Beschränktheit von A_2. Seien $u, v \in X$. Dann ergibt die Hölder-Ungleichung

$$|\langle A_2 u, v\rangle_{X'}| \le \int_\Omega |u|\, |\nabla u|\, |v| dx \le \|u\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^4(\Omega)}.$$

Nun bettet $H^1(\Omega)$ stetig in den Raum $L^4(\Omega)$ ein, sofern die Raumdimension $n \leq 4$ ist (was wir vorausgesetzt haben). Daher folgt

$$|\langle A_2 u, v\rangle_{X'}| \leq C\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Wir erhalten $\|A_2 u\|_{X'} \leq C\|u\|^2_X$, d.h., A_2 ist beschränkt.

Um die starke Stetigkeit zu zeigen, sei $u_k \rightharpoonup u$ in X. Wegen der kompakten Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ existiert eine Teilfolge mit $u_{k'} \to u$ in $L^4(\Omega)$. Wir müssen zeigen, dass $A_2 u_k \to A_2 u$ in X', also

$$\|A_2 u_k - A_2 u\|_{X'} = \sup_{\|v\|_X \leq 1} \big|\langle A_2 u_k - A_2 u, v\rangle\big| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Angenommen, dies gilt nicht. Dann existieren $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(v_k) \subset X$ mit $\|v_k\|_X \leq 1$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\big|\langle A_2 u_k - A_2 u, v_k\rangle\big| \geq \varepsilon \tag{4.4}$$

erfüllt ist. Da (v_k) nach Konstruktion in X beschränkt ist, existiert eine Teilfolge mit $v_{k'} \rightharpoonup v$ in X und $v_{k'} \to v$ in $L^4(\Omega)$. Wir schätzen folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned}
&\big|\langle A_2 u_{k'} - A_2 u, v_{k'}\rangle\big| \\
&\quad = \left|\int_\Omega \big(((u_{k'} - u)\cdot\nabla)u_{k'}\cdot v_{k'} + (u\cdot\nabla)(u_{k'} - u)\cdot(v_{k'} - v) + (u\cdot\nabla)(u_{k'} - u)\cdot v\big)dx\right| \\
&\quad \leq \|u_{k'} - u\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla u_{k'}\|_{L^2(\Omega)}\|v_{k'}\|_{L^4(\Omega)} + \|u\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla(u_{k'} - u)\|_{L^2(\Omega)}\|v_{k'} - v\|_{L^4(\Omega)} \\
&\qquad + \left|\int_\Omega (u\cdot\nabla)(u_{k'} - u)\cdot v dx\right|.
\end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert gegen null, da $u_{k'} \to u$ in $L^4(\Omega)$, der zweite, weil $v_{k'} \to v$ in $L^4(\Omega)$, und der dritte, da $\nabla(u_{k'} - u) \rightharpoonup 0$ in $L^2(\Omega)$. Dies ist ein Widerspruch zu (4.4). Also ist A_2 stark stetig.

Die Beschränktheit von A ist klar, da beide Operatoren A_1 und A_2 beschränkt sind. Für den Nachweis der Koerzivität sei $u \in X$. Dann ist $\operatorname{div} u = 0$ und

$$\langle A_2 u, u\rangle_{X'} = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i u_j dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial |u|^2}{\partial x_j} dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\operatorname{div} u)|u|^2 dx = 0.$$

Aus der Koerzivität von A_1 folgt daher $\langle Au, u\rangle_{X'} = \langle A_1 u, u\rangle_{X'} \geq \alpha\|u\|^2_X$.

Es bleibt zu zeigen, dass A vom Typ M ist. Seien $u_k \rightharpoonup u$ in X, $Au_k \rightharpoonup b$ in X' und $\limsup_{k\to\infty}\langle Au_k, u_k\rangle_{X'} \leq \langle b, u\rangle_{X'}$. Da A_2 stark stetig ist, folgt $A_2 u_k \to A_2 u$ in X', also $A_1 u_k \rightharpoonup b - A_2 u$ in X'. Außerdem wissen wir, dass $\langle A_2 u_k, u_k\rangle_{X'} = 0$, woraus folgt

$$\limsup_{k\to\infty}\langle A_1 u_k, u_k\rangle_{X'} \leq \langle b, u\rangle_{X'} = \langle b - A_2 u, u\rangle_{X'}.$$

Nach Lemma 3.21 (i) ist A_1 vom Typ M, so dass wir die Beziehung $A_1 u = b - A_2 u$ erhalten. Dies ergibt $Au = (A_1 + A_2)u = b$. Also ist auch A vom Typ M. $\square$

Für beschränkte, koerzive Operatoren vom Typ M können wir ein Analogon von Satz 3.22 für abstrakte Operatorgleichungen zeigen.

Theorem 4.2. *Seien X ein reflexiver, separabler Hilbertraum, $A_1 : X \to X'$ ein monotoner und hemistetiger Operator und $A_2 : X \to X'$ ein stark stetiger Operator. Die Summe $A = A_1 + A_2$ sei beschränkt, koerziv und vom Typ M. Dann existiert zu jedem $b \in X'$ eine Lösung der Operatorgleichung*

$$(A_1 + A_2)(u) = b.$$

Beweis. Wir verwenden die Galerkin-Methode. Sei $(v_k) \subset X$ eine Orthonormalbasis. Wir suchen eine Lösung $u_m = \sum_{k=1}^m d_k^m v_k$ des Gleichungssystems

$$0 = \langle Au_m - b, v_k \rangle_{X'} = \Big\langle A\Big(\sum_{j=1}^m d_j^m v_j \Big) - b, v_k \Big\rangle_{X'} =: g_k(d^m), \quad k = 1, \dots, m,$$

wobei $d^m = (d_1^m, \dots, d_m^m)$. Zunächst müssen wir sicherstellen, dass dieses Gleichungssystem lösbar ist. Dazu bemerken wir, dass wegen der starken Stetigkeit von A_2 und der Hemistetigkeit und Monotonie von A_1 gemäß Lemma 3.21 die Summe $A = A_1 + A_2$ demistetig ist. Dies impliziert die Stetigkeit von $g = (g_1, \dots, g_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Sei nun $R = 2\|b\|_{X'}/\alpha$. Dann folgt für alle $\|u_m\|_X = |d^m| = R$ wegen der Koerzivität von A:

$$g(d^m) \cdot d^m = \sum_{k=1}^m g_k(d^m) d_k^m = \langle Au_m - b, u_m \rangle_{X'} \geq \alpha \|u_m\|_X^2 - \|b\|_{X'} \|u_m\|_X = \frac{2}{\alpha} \|b\|_{X'}^2 > 0,$$

wenn $b \neq 0$. Falls $b = 0$, ergibt sich ebenfalls $g(d^m) \cdot d^m = \alpha \|u_m\|_X^2 > 0$. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 2.20, das eine Folgerung des Fixpunktsatzes von Brouwer ist, erfüllt, und wir erhalten die Existenz von $d^m \in \mathbb{R}^m$ mit $g(d^m) = 0$, und es gilt die A-priori-Abschätzung

$$\|u_m\|_X \leq R.$$

Es existiert also eine Teilfolge mit $u_{m'} \rightharpoonup u$ in X. Wir behaupten, dass u die Operatorgleichung $Au = b$ löst.

Hierfür benutzen wir die Typ-M-Eigenschaft von A. Da A beschränkt ist, folgt aus $\|u_m\|_X \leq R$ die Ungleichung $\|A(u_m)\|_{X'} \leq C(R)$, also existiert eine Teilfolge mit $u_{m'} \rightharpoonup u$ in X und $A(u_{m'}) \rightharpoonup z$ in X'. Aus den Galerkin-Gleichungen folgt dann

$$0 = \lim_{m' \to \infty} \langle A(u_{m'}) - b, v \rangle_{X'} = \langle z - b, v \rangle_{X'} \quad \text{für alle } v \in \operatorname{span}\{v_1, v_2, \dots\}.$$

Daher ist $z = b$. Setzen wir $v = u_{m'}$ in die Galerkin-Gleichungen ein, so ergibt sich weiter

$$0 = \lim_{m' \to \infty} \langle A(u_{m'}) - b, u_{m'} \rangle_{X'},$$

also wegen der schwachen Konvergenz von $(u_{m'})$

$$\lim_{m'\to\infty} \langle A(u_{m'}), u_{m'} \rangle_{X'} = \lim_{m'\to\infty} \langle b, u_{m'} \rangle_{X'} = \langle b, u \rangle_{X'}.$$

Wir haben gezeigt, dass

$$u_{m'} \rightharpoonup u \quad \text{in } X, \quad A(u_{m'}) \rightharpoonup b \quad \text{in } X', \quad \lim_{m'\to\infty} \langle A(u_{m'}), u_{m'} \rangle_{X'} = \langle b, u \rangle_{X'}.$$

Da A vom Typ M ist, folgt $Au = b$. □

Wir können nun folgendes Existenzresultat zeigen.

Theorem 4.3 (Existenz für die stationären Navier-Stokes-Gleichungen). *Es gelten die Voraussetzungen zu Beginn dieses Abschnitts und es sei $f \in L^2(\Omega)^3$. Dann existiert eine schwache Lösung $(u, p) \in X \times L^2(\Omega)$ von* (4.1).

Beweis. Aus Lemma 4.1 und Satz 4.2 folgt die Existenz einer Funktion u, die die schwache Formulierung (4.2) löst. Es bleibt zu zeigen, dass eine Funktion p existiert, so dass für alle $v \in H_0^1(\Omega)^3$

$$\int_\Omega \nabla u : \nabla v dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot v dx - \int_\Omega p \operatorname{div} v dx = \int_\Omega f \cdot v dx$$

erfüllt ist. Dies ist im wesentlichen eine Konsequenz aus der Tatsache, dass differenzierbare Vektorfelder als die direkte Summe eines divergenzfreien Vektorfeldes und eines Gradienten geschrieben werden können, d.h., für alle v existieren Funktionen u und p, so dass

$$v = u + \nabla p, \quad \text{wobei} \quad \operatorname{div} u = 0.$$

Mit anderen Worten: Ist ein Vektorfeld F orthogonal zum Raum X, so ist F ein Gradient, d.h. $F = -\nabla p$ für eine Funktion p. Diese Aussage wird in dem folgenden Satz, den wir nicht beweisen, präzisiert.

Theorem 4.4 (De Rham). *Sei $F \in (H_0^1(\Omega)^3)'$, so dass $\langle F, v \rangle = 0$ für alle $v \in X$ (X wie oben). Dann existiert ein $p \in L^2(\Omega)$ mit $\int_\Omega p dx = 0$, so dass*

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega p \operatorname{div} v dx \quad \textit{für alle } v \in H_0^1(\Omega)^3.$$

Wir wenden diesen Satz an auf das Funktional

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega \nabla u : \nabla v dx + \int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot v dx - \int_\Omega f \cdot v dx,$$

das nach Konstruktion des Raumes X die Voraussetzungen des Satzes von Rham erfüllt. Dies endet den Beweis. □

Bemerkung. Der Nachweis der Eindeutigkeit von schwachen Lösungen der stationären Navier-Stokes-Gleichungen ist erstaunlich delikat. Die Eindeutigkeit folgt, wenn die Norm $\|f\|_{X'}$ hinreichend klein ist. Seien nämlich u und v zwei schwache Lösungen von (4.2) und ziehe die beiden Gleichungen voneinander ab. Mit der Testfunktion $u-v$ folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 dx &= -\int_\Omega \big((u\cdot\nabla)u\cdot(u-v) - (v\cdot\nabla)v\cdot(u-v)\big)dx \\ &= -\int_\Omega \big(((u-v)\cdot\nabla)u\cdot(u-v) + (v\cdot\nabla)(u-v)\cdot(u-v)\big)dx. \qquad (4.5)\end{aligned}$$

Das zweite Integral verschwindet, denn aus $\operatorname{div}(v)=0$ folgt

$$\int_\Omega (v\cdot\nabla)(u-v)\cdot(u-v)dx = \frac{1}{2}\int_\Omega (v\cdot\nabla)|u-v|^2 dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}(v)|u-v|^2 dx = 0.$$

Für das erste Integral schätzen wir mit der Hölder-, Sobolev- und Poincaré-Ungleichung folgendermaßen ab:

$$-\int_\Omega ((u-v)\cdot\nabla)u\cdot(u-v)dx \le \|u-v\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|\nabla(u-v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Mit der Testfunktion u in (4.2) folgt

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega f\cdot u dx \le \|f\|_{X'}\|u\|_X = \|f\|_{X'}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

und damit $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{X'}$. Daher ergibt sich aus (4.5), dass

$$\|\nabla(u-v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le C\|\nabla(u-v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|f\|_{X'}\|\nabla(u-v)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

und falls $C\|f\|_{X'} < 1$, gilt $\|\nabla(u-v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le 0$ und folglich $u=v$ in Ω. Die Eindeutigkeit von schwachen Lösungen für beliebige Funktionen f ist ein offenes Problem. $\square$

4.2 Schrödinger-Gleichung

Wir betrachten ein quantenmechanisches Teilchen in einem beschränkten Gebiet Ω, dessen Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf dem Gebietsrand verschwindet (d.h., das Teilchen kann den Rand nicht durchdringen). Dann kann das Teilchen durch die Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega,\ t>0, \quad u=0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad u(0)=u_0 \quad \text{in } \Omega, \qquad (4.6)$$

beschrieben werden. Diese Gleichung ist *nicht* vom parabolischen Typ. Sei u_0 eine Eigenfunktion von

$$\Delta v = \lambda v \quad \text{in } \Omega, \quad v=0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

mit Eigenwert λ. Dann ist durch

$$u(x,t) = e^{\mathrm{i}\lambda t}u_0(x)$$

eine spezielle Lösung von (4.6) gegeben. In der Lösungsformel sind die Orts- und Zeitabhängigkeiten separiert. Insbesondere zeigt die Lösung wegen des Ausdrucks $e^{i\lambda t}$ ein Schwingungsverhalten mit Frequenz λ. Für allgemeinere Anfangsfunktionen ist die Lösung eine Überlagerung von "Schwingungen" mit mehreren Frequenzen. In diesem Sinne besitzt die Schrödinger-Gleichung einen Wellencharakter. Wir werden hierauf weiter unten noch genauer eingehen.

Zunächst werden wir einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die lineare Gleichung beweisen. Wir betrachten ein etwas allgemeineres Problem. Wir gehen wie in Dautray und Lions [7, Abschnitt 18.7] vor. Seien $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ ein Evolutionstripel (mit komplexwertigen Hilberträumen) und $a : V \times V \to \mathbb{C}$ eine stetige sesquilineare Form, so dass

(i) für alle $u, v \in V: \; a(u,v) = \overline{a(v,u)}$, (4.7)

(ii) es existieren $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, so dass für alle $v \in V: \; a(v,v) + \lambda\|v\|_H^2 \geq \alpha\|v\|_V^2$. (4.8)

Die erste Eigenschaft nennt man *Schiefsymmetrie*. Die zweite Eigenschaft ist eine verallgemeinerte Version der *Koerzivität*. Ein Beispiel für eine schiefsymmetrische und koerzive Sesquilinearform ist gegeben durch

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \overline{\nabla v} dx, \quad u, v \in V = H_0^1(\Omega). \tag{4.9}$$

Mit $H = L^2(\Omega)$ ist nämlich $a(u,u) + \|u\|_H^2 = \|u\|_V^2$. Wir lösen das folgende Problem:

$$\langle u_t(t), v\rangle_{V'} + \mathrm{i}a(u(t),v) = (f(\cdot,t),v)_H, \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \tag{4.10}$$

für alle $v \in L^2(0,T;V)$.

Mit der obigen Sesquilinearform und $f = 0$ erhalten wir die Schrödinger-Gleichung (4.6). Wir zeigen nun:

Theorem 4.5 (Existenz und Eindeutigkeit für lineares abstraktes Schrödinger-Problem). *Seien $f \in L^2(0,T;H)$ mit $f_t \in L^2(0,T;V')$ und $u_0 \in V$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in W^{1,2}(0,T;V,H)$ von (4.10). Sie erfüllt $u \in L^\infty(0,T;V)$ und $u_t \in L^\infty(0,T;V')$.*

Beweis. Der Beweis der Eindeutigkeit ist eine Übungsaufgabe. Wir verwenden die Galerkin-Methode, um die Existenz einer Lösung zu zeigen. Sei (v_k) eine Orthonormalbasis von V und definiere den endlich-dimensionalen Raum $V_m = \mathrm{span}\{v_1,\ldots,v_m\}$. Es existiert eine Folge (u_m^0) mit $u_m^0 \in V_m$, so dass $u_m^0 \to u_0$ in V für $m \to \infty$ und $\|u_m^0\|_V \leq \|u_0\|_V$. Wir betrachten die Galerkin-Gleichungen

$$(u_m'(t), v_k)_H + \mathrm{i}a(u_m(t),v_k) = (f(\cdot,t),v_k)_H, \quad t > 0, \quad u_m(0) = u_m^0.$$

Wir suchen eine Lösung im Raum V_m, d.h. $u_m(t) = \sum_{k=1}^m d_k^m(t)v_k$. Damit werden die Galerkin-Gleichungen ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Koeffizienten d_k^m, das auf $(0,T)$ eindeutig lösbar ist. Das Ziel ist nun die Herleitung geeigneter A-priori-Abschätzungen und der Grenzwert $m \to \infty$.

Wir zeigen drei Abschätzungen. Multipliziere zuerst die Galerkin-Gleichungen mit $\overline{d_k^m}$ und summiere über $k = 1, \ldots, m$:

$$(u_m'(t), u_m(t))_H + \mathrm{i}a(u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t))_H.$$

Hierbei haben wir verwendet, dass das Skalarprodukt auf H sesquilinear ist. Addieren wir zu dieser Gleichung die konjugiert komplexe, erhalten wir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 = \mathrm{Re}(f(t), u_m(t))_H.$$

Integrieren wir über t und verwenden die Young-Ungleichung, ergibt sich

$$\|u_m(t)\|_H^2 - \|u_m(0)\|_H^2 = 2\int_0^t \mathrm{Re}(f(s), u_m(s))_H ds \leq \int_0^t \|f(s)\|_H^2 ds + \int_0^t \|u_m(s)\|_H^2 ds,$$

und das Lemma von Gronwall impliziert

$$\|u_m(t)\|_H^2 \leq e^t\Big(\|u_m(0)\|_H^2 + \int_0^T \|f(s)\|_H^2 ds\Big), \quad t \in [0,T]. \tag{4.11}$$

Dies liefert eine Abschätzung für u_m in $L^\infty(0,T;H)$.

Im nächsten Schritt multiplizieren wir die Galerkin-Gleichungen mit $\overline{(d_k^m)'}$ und summieren über $k = 1, \ldots, m$:

$$\|u_m'(t)\|_H^2 + \mathrm{i}a(u_m(t), u_m'(t)) = (f(t), u_m'(t))_H.$$

Wir subtrahieren die konjugiert komplexe Gleichung:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}a(u_m(t), u_m'(t)) + \mathrm{i}\overline{a(u_m(t), u_m'(t))} &= (f(t), u_m'(t))_H - \overline{(f(t), u_m'(t))_H} \\ &= 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f(t), u_m'(t))_H, \end{aligned}$$

was wegen der Schiefsymmetrie von a gleichbedeutend ist mit

$$\frac{d}{dt}a(u_m(t), u_m(t)) = a(u_m(t), u_m'(t)) + a(u_m'(t), u_m(t)) = 2\mathrm{Im}(f(t), u_m'(t))_H.$$

Dies ergibt nach Integration über $(0,t)$ und partieller Integration bezüglich t

$$\begin{aligned} a(u_m(t), u_m(t)) - a(u_m(0), u_m(0)) &= 2\int_0^t \mathrm{Im}\langle f(s), u_m'(s)\rangle_{V'} ds \\ &= 2\mathrm{Im}\langle f(t), u_m(t)\rangle_{V'} - 2\mathrm{Im}\langle f(0), u_m(0)\rangle_{V'} - 2\int_0^t \mathrm{Im}\langle f'(s), u_m(s)\rangle_{V'} ds. \end{aligned}$$

Die Koerzivität von a und die Young-Ungleichung liefern

$$\begin{aligned}
\alpha\|u_m(t)\|_V^2 - a(u_m(0),u_m(0)) &\le a(u_m(t),u_m(t)) + \lambda\|u_m(t)\|_H^2 - a(u_m(0),u_m(0)) \\
&\le 2\|f(t)\|_{V'}\|u_m(t)\|_V + 2\|f(0)\|_{V'}\|u_m^0\|_V \\
&\quad + 2\int_0^t \|f'(s)\|_{V'}\|u_m(s)\|_V ds + |\lambda|\,\|u_m(t)\|_H^2 \\
&\le \frac{\alpha}{2}\|u_m(t)\|_V^2 + \frac{2}{\alpha}\|f(t)\|_{V'}^2 + 2\|f(0)\|_{V'}\|u_m^0\|_V \\
&\quad + \int_0^t \|u_m(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|f'(s)\|_{V'}^2 ds + |\lambda|\,\|u_m(t)\|_H^2.
\end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite kann von der linken Seite absorbiert werden. Nach Voraussetzung liegt f im Raum $H^1(0,T;V')$, der stetig in $C^0([0,T];V')$ einbettet. Daher ist der zweite Term $\|f(t)\|_{V'}$ auf der rechten Seite gleichmäßig bezüglich $t \in (0,T)$ beschränkt. Dies ist auch der Fall für den dritten Term, da $\|u_m^0\|_V \le \|u_0\|_V$. Der fünfte Term ist beschränkt, da wir $f' \in L^2(0,T;V')$ vorausgesetzt haben. Die Abschätzung (4.11) zeigt, dass der letzte Term $\|u_m(t)\|_H$ gleichmäßig bezüglich $t \in (0,T)$ und $m \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. Wir können also das Lemma von Gronwall anwenden und erhalten

$$\|u_m(t)\|_V^2 \le C(T)\big(\|u_0\|_V^2 + \|f\|_{L^2(0,T;H)}^2 + \|f'\|_{L^2(0,T;V')}^2\big), \quad t \in (0,T), \tag{4.12}$$

mit einer Konstanten $C(T) > 0$, die nur von α und T abhängt. Wir haben gezeigt, dass (u_m) in $L^\infty(0,T;V)$ beschränkt ist.

Aus (4.12) folgt, dass (u_m') in $L^\infty(0,T;V')$ beschränkt ist, denn aus der Stetigkeit von a folgt für alle $v \in V_m$

$$|\langle u_m'(t),v\rangle_{V'}| \le |a(u_m(t),v)| + |(f(t),v)_H| \le C\|u_m(t)\|_V\|v\|_V + \|f(t)\|_{V'}\|v\|_V$$

und ähnlich wie weiter oben folgt daraus wegen (4.12) und $u_m' \in V_m$ die Abschätzung

$$\|u_m'\|_{L^\infty(0,T;V')} = \sup_{(0,T)}\sup_{\|w\|_V=1}|\langle u_m',w\rangle_{V'}| = \sup_{(0,T)}\sup_{\|w\|_V=1}|(u_m',v)_H| \le C, \tag{4.13}$$

wobei wir $w = v + v^\perp$ mit $v \in V_m$, $v^\perp \in V_m^\perp$ und $V_m \oplus V_m^\perp = H$ geschrieben und $(u_m',w)_H = (u_m',v)_H$ verwendet haben.

Die Abschätzungen (4.12) und (4.13) zeigen, dass eine Teilfolge existiert mit

$$u_{m'} \rightharpoonup^* u \quad \text{in } L^\infty(0,T;V), \quad u_{m'}' \rightharpoonup^* u' \quad \text{in } L^\infty(0,T;V').$$

Wir können den Grenzwert $m \to \infty$ in der Galerkin-Gleichung

$$\int_0^T \langle u_m',\chi v\rangle_{V'}dt + \mathrm{i}\int_0^T a(u_m,\chi v)dt = \int_0^T (f,v)_H\chi dt, \quad v \in V_m,$$

mit einer stückweise konstanten Funktion $\chi : (0,T) \to \mathbb{C}$ durchführen (denn a ist linear) und erhalten

$$\int_0^T \langle u', \chi v\rangle_{V'} dt + \mathrm{i} \int_0^T a(u, \chi v) dt = \int_0^T (f, v)_H \chi dt$$

für alle $\chi : (0,T) \to \mathbb{C}$ und $v \in V$. Wir können jede Funktion in $L^2(0,T;V)$ durch $v_N = \sum_{j=1}^N \chi_j v$ approximieren und erhalten daher die Behauptung des Satzes nach einem Dichtheitsargument. □

Wir betrachten die Sesquilinearform (4.9) zur Schrödinger-Gleichung (4.6). Satz 4.5 liefert das folgende Korollar.

Korollar 4.6 (Existenz und Eindeutigkeit für die lineare Schrödinger-Gleichung). *Seien $f \in L^2(\Omega \times (0,T))$ mit $f_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ und $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung u von* (4.10) *mit $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)$ und $u_t \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$.*

Bemerkung. Der obige Existenzsatz für die Schrödinger-Gleichung kann verallgemeinert werden.
(i) Die Schrödinger-Gleichung ist nicht nur auf $[0,\infty)$, sondern auf ganz $\mathbb{R}$ lösbar. Dies können wir einsehen, indem wir die Zeit mittels $t \mapsto -t$ transformieren und die Gleichung

$$\mathrm{i}u_t - \Delta u = 0$$

untersuchen. Die abstrakte Formulierung lautet

$$-\langle u_t, v\rangle_{V'} + \mathrm{i}a(u,v) = 0.$$

Wir erkennen aus dem Beweis von Satz 4.5, dass das Vorzeichen von $\langle u_t, v\rangle_{V'}$ keine Rolle spielt. Wir erhalten also auch eine Lösung auf dem Intervall $(-\infty, 0)$.
(ii) Es genügt, Anfangsdaten $u_0 \in L^2(\Omega)$ vorauszusetzen. Dann existiert eine Lösung $u \in C^0(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ mit $u_t \in C^0(\mathbb{R}; D')$ und $D = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Für einen Beweis siehe Cazenave [5, Prop. 3.1.1]. □

Die Schrödinger-Gleichung hat einige bemerkenswerte Eigenschaften. Wir haben bereits gesehen, dass die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert werden kann. Die Schrödinger-Gleichung ist also keine Diffusionsgleichung; sie ähnelt vielmehr eher einer Wellengleichung. Um dies genauer zu erörtern, betrachten wir die Schrödinger-Gleichung auf dem Ganzraum $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = u_0. \tag{4.14}$$

Für glatte Anfangsdaten können wir dieses Problem explizit lösen.

Proposition 4.7. *Sei $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann lautet die eindeutige Lösung von* (4.14)

$$u(x,t) = \left(\frac{1}{4\pi \mathrm{i}t}\right)^{n/2} e^{\mathrm{i}|x|^2/(4t)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}x\cdot y/2t} e^{\mathrm{i}|y|^2/(4t)} u_0(y)dy,$$

und sie erfüllt die Ungleichung

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le (4\pi|t|)^{-n/2}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis. Die Proposition folgt durch Fourier-Transformation von (4.14). Wir erinnern, dass die Fourier-Transformation einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definiert ist durch

$$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ik\cdot x}dx, \quad k \in \mathbb{R}^n.$$

Sie hat die Eigenschaft, dass $\widehat{\nabla f}(k) = \mathrm{i}k\widehat{f}(k)$ und damit

$$\widehat{\Delta f}(k) = -|k|^2\widehat{f}(k)$$

gelten. Eine Rechnung zeigt, dass die Fouriertransformierte der Funktion

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi \mathrm{i}t)^{n/2}} e^{\mathrm{i}|x|^2/4t}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

gegeben ist durch $\widehat{K}_t(k) = \exp(-\mathrm{i}|k|^2 t)$.

Die Fourier-Transformierte der Schrödinger-Gleichung (4.14),

$$\mathrm{i}\widehat{u}_t - |k|^2\widehat{u} = 0, \quad \widehat{u}(0) = \widehat{u}_0, \quad k \in \mathbb{R}^n,$$

kann explizit gelöst werden:

$$\widehat{u}(k,t) = e^{-\mathrm{i}|k|^2 t}\widehat{u}_0(k), \quad k \in \mathbb{R}^n.$$

Dies kann geschrieben werden als

$$\widehat{u}(t) = \widehat{K}_t\widehat{u}_0 = \widehat{K_t * u_0},$$

wobei $K_t * u_0$ die Faltung von K_t und u_0 bezeichnet. Die Inverse der Fourier-Transformation ergibt

$$u(x,t) = (K_t * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y)u_0(y)dy = \frac{1}{(4\pi \mathrm{i}t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}|x-y|^2/(4t)} u_0(y)dy,$$

was die erste Behauptung zeigt. Die Abschätzung ist eine Konsequenz aus

$$|u(x,t)| \le \frac{1}{(4\pi|t|)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(y)|dy.$$

Damit ist die Proposition bewiesen. □

Wir bemerken, dass die Lösung der Schrödinger-Gleichung (4.14) in der L^2-Norm nicht abklingt, sondern erhalten bleibt:

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

(Multipliziere (4.14) mit $\overline{u}$ und integriere; siehe auch den Beweis von Lemma 4.9.) Die Lösung $|u|^2$ erfüllt also eine Erhaltungsgleichung (ähnlich wie die Lösung der Wellengleichung), klingt aber in der L^∞-Norm exponentiell ab (ähnlich wie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung). Die Erhaltungseigenschaft wird übrigens auch durch die *formale* Schreibweise $u(t) = e^{\mathrm{i}t\Delta}u_0$ ausgedrückt, wobei der Operator $A = e^{\mathrm{i}t\Delta} : D(A) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ähnlich wie der Operator $e^{-t\Delta}$ für parabolische Gleichungen durch die Spektraldarstellung definiert werden kann.

Die Lösung der Wellengleichung ist im allgemeinen nicht regulärer als der Anfangswert – im Gegensatz zur Lösung parabolischer Gleichungen, die sehr stark regularisieren. Satz 4.5 zeigt, dass die Lösung $u(t) \in V$ nur so regulär ist wie der Anfangswert $u_0 \in V$. In diesem Sinne ähnelt die Schrödinger-Gleichung der Wellengleichung. Allerdings besitzt die Schrödinger-Gleichung eine bemerkenswerte Regularisierungseigenschaft, die durch die sogenannten Strichartz-Ungleichungen ausgedrückt wird.

Theorem 4.8 (Strichartz-Ungleichungen). *Seien $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und u eine Lösung von* (4.14). *Dann gilt*

$$\|u\|_{L^{2+4/n}(\mathbb{R};L^{2+4/n}(\mathbb{R}^n))} \le C_1\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R};L^p(\mathbb{R}^n))} \le C_2\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

wobei $r = 4p/(n(p-2))$, $2 \le p < 2n/(n-2)$ (wenn $n \le 2$, dann ist $p \le \infty$ erlaubt) und $C_1, C_2 > 0$.

Für einen Beweis verweisen wir auf Strauss [20], Reed/Simon, Band 2 [15] oder Cazenave [5, Thm. 3.2.5]. Der Satz sagt aus, dass die Lösung für fast alle $t \in \mathbb{R}$ die Eigenschaft $u(t) \in L^p$ für gewisse $p > 2$ besitzt, obwohl u_0 nur in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegt. Allerdings gilt diese Eigenschaft nur für fast alle $t \in \mathbb{R}$; sie kann im allgemeinen nicht für alle $t \neq 0$ gelten. Die Lösung besitzt sogar eine noch bessere Regularität. Ist $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so gilt $u(t) \in H^{1/2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$ (siehe Cazenave [5, Rem. 3.4.7]). Wir gewinnen also für fast alle $t \in \mathbb{R}$ lokal im Ort eine "halbe" Ableitung.

Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen kann auch für die semilineare Schrödinger-Gleichung unter gewissen Voraussetzungen an die Nichtlinearität bewiesen werden:

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u - f(u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = u_0. \tag{4.15}$$

In den physikalischen Anwendungen ist hauptsächlich der Fall

$$f(u) = g(|u|^2)u \quad \text{mit} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

von Interesse. Die reellwertige Funktion $g(|u|^2)$ kann als eine Art Selbstinteraktionspotential interpretiert werden. Ein typisches Beispiel ist die kubische Funktion $f(u) = \pm|u|^2 u$.

Die Analysis von (4.15) basiert auf sogenannten *Energie-Abschätzungen*. Wir nennen das Funktional

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\Big)dx, \quad \text{wobei } F(u) = \frac{1}{2}G(|u|^2),\ G' = g,\ G(0) = 0,$$

die *Energie* des Systems. Die Funktion F ist so definiert, dass $F'(u) = g(|u|^2)u = f(u)$. Im Falle $f(u) = \pm|u|^2 u$ gilt $F(u) = \pm\frac{1}{4}|u|^4$. Wir zeigen nun für glatte Lösungen, dass die Energie konstant ist.

Lemma 4.9. *Sei u eine klassische Lösung von* (4.15). *Dann gilt*

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad E(u(t)) = E(u_0) \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Wir multiplizieren (4.15) mit $\overline{u}$ und die konjugiert komplexe Gleichung mit u:

$$\mathrm{i}u_t\overline{u} + \Delta u\overline{u} - g(|u|^2)|u|^2 = 0, \quad -\mathrm{i}\overline{u}_t u + \Delta\overline{u}u - g(|u|^2)|u|^2 = 0,$$

und ziehen die Gleichungen voneinander ab:

$$\mathrm{i}\partial_t|u|^2 + \Delta u\overline{u} - \Delta\overline{u}u = 0.$$

Nach Integration über $\mathbb{R}^n$ und partieller Integration folgt

$$\mathrm{i}\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = 0,$$

also die erste Gleichung des Lemmas.

Für den Nachweis der zweiten Gleichung multiplizieren wir (4.15) mit $\overline{u_t}$ und die konjugiert komplexe Gleichung mit u_t:

$$\mathrm{i}u_t\overline{u_t} + \Delta u\overline{u_t} - g(|u|^2)u\overline{u_t} = 0, \quad -\mathrm{i}\overline{u_t}u_t + \Delta\overline{u}u_t - g(|u|^2)\overline{u}u_t = 0,$$

addieren beide Gleichungen und integrieren über $\mathbb{R}^n$:

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \big(\nabla u \cdot \overline{\nabla u_t} + \overline{\nabla u} \cdot \nabla u_t + g(|u|^2)(u\overline{u}_t + \overline{u}u_t)\big)dx = 0.$$

Dies ergibt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt}|\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} g(|u|^2)\frac{d}{dt}|u|^2 dx = 0$$

und wegen $\partial_t F(u) = \frac{1}{2}g(|u|^2)\partial_t|u|^2$ folgt

$$0 = \frac{d}{dt}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}^n} F(u)dx\Big) = 2\frac{dE}{dt}(u).$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Die Energiegleichung aus Lemma 4.9 liefert eine A-priori-Abschätzung, wenn $F(u)$ nichtnegativ ist oder zumindest geeignet abgeschätzt werden kann.

Lemma 4.10. *Wir nehmen an, dass für alle $u \in \mathbb{C}$*

$$F(u) \geq -C_1(|u|^2 + |u|^q), \quad 2 \leq q < 2 + \frac{4}{n}, \; C_1 > 0, \tag{4.16}$$

erfüllt ist. Sei ferner u eine klassische Lösung von (4.15). *Dann gilt*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C_2,$$

wobei $C_2 > 0$ von $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ und $E(u_0)$ abhängt.

Beweis. Wir benutzen den folgenden Spezialfall der *Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung*:

$$\|v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq K\|v\|^\theta_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla v\|^{1-\theta}_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \theta = 1 - \frac{n(r-2)}{2r}, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^n),$$

und $r \geq 2$ ist so, dass die Einbettung $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$ stetig ist (dies sichert $0 \leq \theta \leq 1$).

Aus Lemma 4.9, (4.16) und der obigen Ungleichung folgt mit $r = q$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= E(u_0) - \int_{\mathbb{R}^n} F(u(t))dx \leq E(u_0) + C_1\big(\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u(t)\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}\big) \\ &\leq E(u_0) + C_1\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + K^q C_1\|u_0\|^{\theta q}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla u(t)\|^{(1-\theta)q}_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Die Voraussetzung $q < 2 + 4/n$ impliziert $(1-\theta)q = n(q-2)/2 < 2$, so dass wir die Young-Ungleichung anwenden können:

$$\|u_0\|^{\theta q}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla u(t)\|^{(1-\theta)q}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C(\varepsilon, \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}).$$

Der erste Term auf der rechten Seite kann für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ absorbiert werden:

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_3(\varepsilon, \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}).$$

Definieren wir die rechte Seite als C_2, so folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe der Strichartz-Ungleichungen, dem Fixpunktsatz von Banach und Halbgruppentheorie kann der folgende Satz bewiesen werden (siehe Strauss [20]).

Theorem 4.11 (Existenz und Eindeutigkeit für semilineare Schrödinger-Gleichungen). *Es gelten die Voraussetzungen an F aus Lemma 4.10. Ferner sei $f \in C^1$ mit $|f'(u)| \leq C_0|u|^p$ für alle $u \in \mathbb{C}$, wobei $0 < p < 4/(n-2)$ (und $0 < p < \infty$, falls $n \leq 2$). Außerdem sei $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ mit $E(u_0) < \infty$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^0(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^n))$ von* (4.15).

Beispiel 4.12. Wir prüfen anhand eines Beispiels, unter welchen Bedingungen die Voraussetzungen von Satz 4.11 erfüllt sind.

(i) Sei $f(u) = |u|^2 u$. Dann ist $F(u) = \frac{1}{4}|u|^4$. Da F nichtnegativ ist, erfüllt F die Ungleichung (4.16) für alle $n \geq 1$. Dagegen ist die Ungleichung $p = 2 < 4/(n-2)$ genau dann erfüllt, wenn $n \leq 3$.

(ii) Sei $f(u) = -|u|^2 u$. Dann ist $F(u) = -\frac{1}{4}|u|^4$ und $q = 4$ in der Bedingung (4.16). Es gilt $4 = q < 2 + 4/n$ genau dann, wenn $n = 1$. □

Es bleibt die Frage offen, was geschieht, wenn die Voraussetzungen von Satz 4.11 verletzt sind. Betrachte etwa den Fall $f(u) = -|u|^{4/n}u$. Dann ist $q = 2 + 4/n$, was die Voraussetzung (4.16) immer verletzt. Man kann zeigen, dass die Funktion

$$u(x,t) = v\Big(\frac{|x|}{t^* - t}\Big)\big(4\pi \mathrm{i}(t^* - t)\big)^{-n/2} e^{\mathrm{i}|x|^2/(4(t^*-t))}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq t < t^*,$$

eine spezielle Lösung von (4.15) ist, wobei $u_0(x) = v(|x|)$ und v ist eine Lösung von

$$-\Delta v - (4\pi)^{-2}|v|^{4/n}v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Es gilt natürlich Erhaltung in der L^2-Norm, $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, aber $u(0,t^*)$ ist unbeschränkt in der L^∞- und H^1-Norm. Wir erwarten also, dass nicht für alle Nichtlinearitäten eine Lösung existieren kann. Tatsächlich gilt folgendes Resultat (siehe Cazenave [5, Rem. 6.5.1]).

Theorem 4.13 (Existenz und Nichtexistenz für nichtlineare Schrödinger-Gleichungen). *Sei $f(u) = \lambda|u|^\alpha u$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $0 < \alpha < 4/(n-2)$ (und $\alpha < \infty$, wenn $n \leq 2$). Dann gilt:*

(i) *Wenn $\lambda > 0$, so sind alle Lösungen von* (4.15) *global in der Zeit.*

(ii) *Wenn $\lambda < 0$ und $\alpha < 4/n$, so sind alle Lösungen von* (4.15) *global.*

(iii) *Wenn $\lambda < 0$ und $\alpha \geq 4/n$, so sind die Lösungen von* (4.15) *nur dann global, wenn $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ klein genug ist. Für hinreichend große $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ existieren die Lösungen nur lokal in der Zeit.*

Beachte, dass der Wert $4/n$ in (ii) und (iii) des Satzes der Schranke $q = 2 + 4/n$ für $F(u)$ entspricht.

4.3 Hamilton-Jacobi-Gleichungen

Um Hamilton-Jacobi-Gleichungen zu motivieren, betrachten wir die im ersten Kapitel vorgestellten Euler-Gleichungen

$$n_t + \operatorname{div}(nv) = 0, \quad (nv)_t + \operatorname{div}(nv \otimes v) + \nabla p = 0.$$

Wir erinnern, dass n die Teilchendichte, v die Geschwindigkeit und p der Druck der Flüssigkeit darstellen. Wir nehmen an, dass die Flüssigkeit homogen und inkompressibel, d.h. $n = \text{const.} = 1$, und der Druck konstant ist, $\nabla p = 0$. Außerdem betrachten wir eine *laminare Strömung*, d.h., die Geschwindigkeit kann als Gradient einer Funktion S geschrieben werden, $v = \nabla S$. Dann erhalten wir

$$0 = \operatorname{div}(\nabla S) = \Delta S, \quad 0 = (\nabla S)_t + \operatorname{div}(\nabla S \otimes \nabla S).$$

Wir behaupten, dass $\operatorname{div}(\nabla S \otimes \nabla S) = \frac{1}{2}\nabla|\nabla S|^2$. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla S \otimes \nabla S)_i &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_j}\Big) = \sum_j \Big(\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j} + \frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j \Big(\frac{\partial S}{\partial x_j}\Big)^2 + \frac{\partial S}{\partial x_i}\Delta S = \frac{1}{2}(\nabla|\nabla S|^2)_i.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\nabla\Big(S_t + \frac{1}{2}|\nabla S|^2\Big) = 0.$$

Das Geschwindigkeitspotential S ist also eine Lösung der Gleichung

$$S_t + \frac{1}{2}|\nabla S|^2 = \text{const. in } x.$$

Diese Gleichung ist eine spezielle Form der *Hamilton-Jacobi-Gleichung*

$$u_t + H(x, \nabla u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \quad u(0) = u_0, \tag{4.17}$$

wobei $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig sei. Um diese Gleichungen zu lösen, könnte man zuerst nach schwachen Lösungen, also Lösungen $u \in L^2(0, T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))$ von

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} H(x, \nabla u) v dx dt = 0$$

für alle $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ mit $u(0) = u_0$ in $\mathbb{R}^n$, suchen. Wir verwenden Funktionen aus $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ anstatt $H^1(\mathbb{R}^n)$ wie in den vorigen Kapiteln, damit $H(\nabla u, x)$ definiert ist. Die Problematik dieses Lösungsbegriffs ist jedoch, dass es im allgemeinen mehrere solcher Lösungen gibt. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel (siehe Evans [10]).

Beispiel 4.14. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$u_t + u_x^2 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R},\ t > 0, \quad u(0) = 0,$$

besitzt die Lösungen $u_1 = 0$ und

$$u_2(x, t) = \min\{0, |x| - t\} = \begin{cases} 0 & : |x| \geq t \\ x - t & : 0 \leq x \leq t \\ -x - t & : -t \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Beide Lösungen sind lipschitzstetig und insbesondere aus $L^2(0,T;W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$. Man kann zeigen, dass es unendlich viele lipschitzstetige Lösungen gibt. Unser Lösungsbegriff ist also so schwach, dass wir die Eindeutigkeit von Lösungen verlieren. $\square$

Im folgenden führen wir einen neuen Lösungsbegriff ein, sogenannte *Viskositätslösungen*, die die Eindeutigkeit von Lösungen garantieren. Wir gehen vor wie Evans [10, Kapitel 10]. Eine Idee, die Existenz von Lösungen der Hamilton-Jacobi-Gleichung (4.17) zu zeigen, lautet, das Problem zu regularisieren:

$$\partial_t u_\varepsilon + H(x, \nabla u_\varepsilon) - \varepsilon \Delta u_\varepsilon = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n,\ t > 0, \quad u_\varepsilon(0) = u_0. \tag{4.18}$$

Damit erhalten wir eine quasilineare parabolische Gleichung, die wir unter geeigneten Voraussetzungen an H lösen können. Können wir geeignete Abschätzungen für u_ε, die unabhängig von ε sind, herleiten, so können wir den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ durchführen und erhalten im Grenzwert eine Lösung der Gleichung (4.17). Diese Technik wird die *Methode des Viskositätsgrenzwerts* genannt.

Wir rechnen allerdings damit, dass wir nicht ohne weiteres gleichmäßige Abschätzungen für ∇u_ε finden werden (sondern allenfalls für $\sqrt{\varepsilon}\nabla u_\varepsilon$). Unsere Hoffnung lautet, wenigstens gleichmäßige Abschätzungen für u_ε in L^∞ zu gewinnen. Ist dann diese Folge außerdem gleichstetig, so können wir den Satz von Arzelà-Ascoli anwenden und die Konvergenz

$$u_{\varepsilon'} \to u \quad \text{gleichmäßig in } K \times (0,T)$$

für eine Teilfolge $(u_{\varepsilon'})$ von (u_ε) schließen, wobei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge sei. Der Grenzwert $u \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ ist ein Kandidat für eine Lösung von (4.17). Natürlich müssen wir erklären, in welchem Sinne u diese Gleichung löst, da ∇u nicht definiert sein muss. Hierfür verwenden wir im wesentlichen das Maximumprinzip. Dies führt auf den Begriff der *Viskositätslösung*. Im folgenden motivieren wir diesen Begriff.

Seien u eine glatte Lösung von (4.17) und $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ eine Testfunktion mit der Eigenschaft, dass $u - v$ an der Stelle (x_0, t_0) ein *striktes* lokales Maximum besitzt, d.h., in einer Umgebung von (x_0, t_0) gilt

$$(u-v)(x_0,t_0) > (u-v)(x,t) \quad \text{für alle } (x,t) \neq (x_0,t_0). \tag{4.19}$$

Wir nehmen an, wir haben eine Folge von Lösungen u_ε von (4.18) gefunden, so dass $u_\varepsilon \to u$ lokal gleichmäßig in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Wir behaupten, dass es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so dass für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ die Differenz $u_\varepsilon - v$ ein lokales Maximum an einer Stelle $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ besitzt und dass $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \to (x_0, t_0)$ für $\varepsilon \to 0$ gilt.

Um dies zu beweisen, bemerken wir, dass es wegen (4.19) eine Kugel $B = B_r(x_0, t_0)$ gibt, so dass

$$\max_{(x,t)\in\partial B} (u-v)(x,t) < (u-v)(x_0,t_0).$$

Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\max_{(x,t)\in\partial B} (u_\varepsilon - v)(x,t) < (u_\varepsilon - v)(x_0, t_0).$$

Dies bedeutet, dass $u_\varepsilon - v$ ein lokales Maximum an einem Punkt $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ im Innern von B annimmt. Ersetzen wir r durch eine Folge $r_\varepsilon \to 0$, so erhalten wir die Behauptung.

Da nun $u_\varepsilon - v$ ein lokales Maximum an einer Stelle $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ besitzt, müssen die Gleichungen

$$\nabla u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) = \nabla v(x_\varepsilon, t_\varepsilon), \quad \partial_t u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) = \partial_t v(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$$

und die Ungleichung

$$-\Delta u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \geq -\Delta v(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$$

erfüllt sein. Damit ergibt sich für die regularisierte Hamilton-Jacobi-Gleichung (4.18)

$$\begin{aligned}\partial_t v(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(x_\varepsilon, \nabla v(x_\varepsilon, t_\varepsilon)) &= \partial_t u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(x_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon)) \\ &= \varepsilon\Delta u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \leq \varepsilon\Delta v(x_\varepsilon, t_\varepsilon).\end{aligned}$$

Wir führen den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ durch und verwenden $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \to (x_0, t_0)$:

$$v_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla v(x_0, t_0)) \leq 0. \tag{4.20}$$

Diese Ungleichung ist eine Konsequenz der Annahme, dass $u - v$ an (x_0, t_0) ein striktes lokales Maximum besitzt. Sollte dieses Maximum *nicht* strikt sein, betrachten wir die Funktion

$$w_\delta(x,t) = v(x,t) + \delta(|x - x_0|^2 + |t - t_0|^2), \quad \delta > 0.$$

Dann besitzt die Differenz $u - w_\delta$ an (x_0, t_0) ein striktes lokales Maximum, und wir schließen wie oben $\partial_t w_\delta(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla w_\delta(x_0, t_0)) \leq 0$. Der Grenzwert $\delta \to 0$ liefert dann wieder (4.20).

Wir haben gezeigt:

$$u - v \text{ besitzt ein lokales Maximum an } (x_0, t_0) \;\Rightarrow\; v_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla v(x_0, t_0)) \leq 0.$$

Analog können wir beweisen:

$$u - v \text{ besitzt ein lokales Minimum an } (x_0, t_0) \;\Rightarrow\; v_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla v(x_0, t_0)) \geq 0.$$

Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 4.15. *Eine beschränkte, gleichmäßig stetige Funktion u ist eine* Viskositätslösung *der Hamilton-Jacobi-Gleichung* (4.17), *falls $u(0) = u_0$ in $\mathbb{R}^n$ erfüllt ist und wenn für alle $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ gilt:*

(i) *Wenn $u - v$ ein lokales Maximum an $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ besitzt, dann*
$v_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla v(x_0, t_0)) \leq 0$;

(ii) *Wenn $u - v$ ein lokales Minimum an $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ besitzt, dann* $v_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla v(x_0, t_0)) \geq 0$.

Bemerkung. In ähnlicher Weise können wir Viskositätslösungen von stationären Gleichungen der Form

$$H(x, u, \nabla u) = 0$$

definieren. Eine beschränkte, gleichmäßig stetige Funktion u ist eine Viskositätslösung dieser Gleichung, wenn für alle $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ aus der Aussage, dass $u - v$ ein lokales Maximum (Minimum) an x_0 besitzt, folgt, dass

$$H(x_0, u(x_0), \nabla v(x_0)) \leq 0 \quad (\geq 0).$$

In der Literatur wird zuweilen nur die Stetigkeit von u gefordert, siehe z.B. Bressan [3]. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung kann auch auf beschränkten Gebieten mit geeigneten Randbedingungen betrachtet werden; die Definition einer Viskositätslösung ist dann entsprechend. Es ist sogar möglich, Viskositätslösungen für Gleichungen der Form

$$H(x, u, \nabla u, D^2 u) = 0$$

zu definieren, siehe die Arbeit von Crandall, Ishii und Lions [6]. □

Beispiel 4.16. Als Beispiel betrachten wir die Funktion $H(x, p) = |p| - 1$, also die Gleichung

$$|u_x| - 1 = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad u(-1) = u(1) = 0$$

(siehe Evans [10, Problem 10.4]). Wir behaupten, dass $u(x) = 1 - |x|$ eine Viskositätslösung ist. Für $x_0 \neq 0$ ist u stetig differenzierbar, und die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist exakt erfüllt. Sei daher $x_0 = 0$. Wir müssen zeigen, dass, falls $u - v$ für eine Funktion $v \in C^\infty(-1, 1)$ ein Maximum (Minimum) an $x_0 = 0$ besitzt, dann $|v_x(0)| - 1 \leq 0$ (≥ 0) erfüllt ist.

Falls $u - v$ an $x_0 = 0$ ein lokales Maximum hat, dann gilt für alle x aus einer Umgebung von $x_0 = 0$

$$1 - v(0) = (u - v)(0) \geq (u - v)(x) = 1 - |x| - v(x).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{v(x) - v(0)}{|x|} \geq -1.$$

Für $x \to 0$, $x > 0$ folgt $v_x(0) \geq -1$; für $x \to 0$, $x < 0$ erhalten wir $v_x(0) \leq 1$, also insgesamt $|v_x(0)| \leq 1$.

Hat $u - v$ an $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, so folgt für hinreichend kleines $|x|$

$$1 - v(0) = (u - v)(0) \leq (u - v)(x) = 1 - |x| - v(x)$$

oder
$$\frac{v(x)-v(0)}{|x|} \leq -1.$$
Im Grenzwert $x \to 0$, $x > 0$ (bzw. $x < 0$) ergibt sich $v_x(0) \leq -1$ (bzw. $v_x(0) \geq 1$), also $|v_x(0)| \geq 1$. Dies beweist unsere Behauptung.

Interessanterweise ist $u(x) = |x| - 1$ *keine* Viskositätslösung von $|u_x| - 1 = 0$, denn sei $v(x) = -x^2 + 1$. Dann nimmt $(u - v)(x) = |x| + x^2 - 2$ an $x_0 = 0$ ein lokales Minimum an, aber es ist $|v_x(x_0)| - 1 = 2|x_0| - 1 = -1$, Widerspruch. Man kann zeigen, dass die Funktion $u(x) = |x| - 1$ eine Viskositätslösung von $1 - |u_x| = 0$, $x \in (-1, 1)$, ist. □

Wenn die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung gemäß der Methode des Viskositätsgrenzwerts gewonnen wurde, so ist sie wegen der obigen Betrachtungen eine Viskositätslösung. Allerdings können Viskositätslösungen auch mit anderen Techniken erhalten werden, und in diesem Fall sind die Eigenschaften (i) und (ii) der Definition nachzuweisen.

Die obige Definition wirft einige Fragen auf:

- Sind klassische Lösungen der Hamilton-Jacobi-Gleichung Viskositätslösungen? Umgekehrt: Sind stetig differenzierbare Viskositätslösungen auch klassische Lösungen?
- Ist die Viskositätslösung eindeutig?
- Existiert eine Viskositätslösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung?

Die drei Fragen können unter geeigneten Voraussetzungen bejaht werden. Wir beweisen dies für die ersten beiden Fragen; der Existenzbeweis ist sehr technisch, und wir verweisen hierfür auf Evans [10, Abschnitt 10.3].

Wir beantworten zuerst die erste Frage. Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ eine klassische Lösung von (4.17), die beschränkt und gleichmäßig stetig sei. Wir behaupten, dass u eine Viskositätslösung von (4.17) ist. Ist nämlich v eine glatte Funktion und nimmt $u - v$ ein lokales Maximum an (x_0, t_0) an, so gilt
$$\nabla u(x_0, t_0) = \nabla v(x_0, t_0), \quad u_t(x_0, t_0) = v_t(x_0, t_0).$$
Dann ist aber
$$v_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla v(x_0, t_0)) = u_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla u(x_0, t_0)) = 0.$$
Eine ähnliche Argumentation gilt für lokale Minima. Damit ist bewiesen, dass klassische Lösungen Viskositätslösungen sind. Für die umgekehrte Behauptung benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 4.17. *Sei $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ an $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann existiert eine Funktion $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften*
$$u(x_0) = v(x_0), \quad u - v \text{ besitzt ein striktes lokales Maximum an } x_0.$$

Beweis. Der Beweis stammt von Evans [10, p. 544ff.]. Wir können ohne Einschränkung voraussetzen, dass $x_0 = 0$, $u(0) = 0$ und $\nabla u(0) = 0$ gilt, da wir anderenfalls die Funktion $\widetilde{u}(x) = u(x + x_0) - u(x_0) - \nabla u(x_0) \cdot x$ anstatt u betrachten können, für die $\widetilde{u}(0) = 0$ und $\nabla \widetilde{u}(0) = 0$ erfüllt ist. Eine Taylor-Entwicklung von u, $u(x) = u(0) + \nabla u(0) \cdot x + o(|x|) = o(|x|)$ für $x \to 0$, zeigt, dass es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$u(x) = |x| f(x), \quad f(0) = 0.$$

Die Funktion

$$F(r) = \max_{x \in B_r(0)} |f(x)|, \quad r \geq 0,$$

ist stetig (da f stetig ist), monoton wachsend (da die Kugeln $B_r(0)$ mit zunehmendem Radius r größer werden), und es gilt $F(0) = \max_{x=0} |f(x)| = |f(0)| = 0$.

Mit dieser Funktion konstruieren wir nun die Testfunktion

$$v(x) = \int_{|x|}^{2|x|} F(r) dr + |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir behaupten, dass $u - v$ ein striktes lokales Maximum an $x_0 = 0$ hat. Wegen der Monotonie von F können wir v abschätzen durch $|v(x)| \leq F(2|x|)(2|x| - |x|) + |x|^2$. Daraus folgt zum einen $v(0) = 0$, zum anderen wegen $|v(x)|/|x| \leq F(2|x|) + |x|$ auch $\nabla v(0) = 0$. Aus $\nabla |x| = x/|x|$ ergibt sich

$$\nabla v(x) = \frac{2x}{|x|} F(2|x|) - \frac{x}{|x|} F(|x|) + 2x, \quad x \neq 0,$$

also ist v stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$. Die gewünschte Eigenschaft folgt für $x \neq 0$ aus

$$\begin{aligned} u(x) - v(x) &= |x| f(x) - \int_{|x|}^{2|x|} F(r) dr - |x|^2 \leq \underbrace{|x| F(|x|) - \int_{|x|}^{2|x|} F(r) dr}_{\leq 0, \text{ da } F \text{ monoton wachsend}} - |x|^2 \\ &\leq -|x|^2 < 0 = u(0) - v(0). \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $u - v$ an 0 ein striktes lokales Maximum besitzt. □

Der folgende Satz zeigt, dass differenzierbare Viskositätslösungen Lösungen im klassischen Sinn sind.

Theorem 4.18. *Sei u eine Viskositätslösung von* (4.17), *und sei u an der Stelle $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ differenzierbar. Dann gilt*

$$u_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla u(x_0, t_0)) = 0.$$

Beweis. Wir wenden das obige Lemma auf $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ anstatt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ an: Es existiert eine Funktion $v \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$, so dass $u(x_0, t_0) = v(x_0, t_0)$ und $u - v$ besitzt an (x_0, t_0) ein striktes lokales Maximum. Sei v_ε eine C^∞-Regularisierung von v, so dass $v_\varepsilon \to v$ in $C^1(\mathbb{R}^{n+1})$ gleichmäßig in einer Umgebung von (x_0, t_0). Dann hat $u - v_\varepsilon$ ein lokales Maximum an einer Stelle $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ und $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \to (x_0, t_0)$ für $\varepsilon \to 0$. Da u eine Viskositätslösung ist, folgt

$$\partial_t v_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(x_\varepsilon, \nabla v(x_\varepsilon, t_\varepsilon)) \le 0.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\partial_t v_\varepsilon$ und ∇v_ε ergibt sich im Grenzwert $\varepsilon \to 0$

$$v_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla v(x_0, t_0)) \le 0. \tag{4.21}$$

Da $u - v$ ein lokales Maximum an (x_0, t_0) hat und u nach Voraussetzung an dieser Stelle differenzierbar ist, muss gelten:

$$\nabla u(x_0, t_0) = \nabla v(x_0, t_0), \quad u_t(x_0, t_0) = v_t(x_0, t_0).$$

Setzen wir dies in (4.21) ein, so folgt

$$u_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla u(x_0, t_0)) \le 0.$$

Schließlich wenden wir das obige Lemma auf $-u$ an und erhalten die Existenz einer C^1-Funktion v, so dass $u - v$ ein lokales Minimum an (x_0, t_0) hat. Ähnlich wie oben folgt dann

$$u_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla u(x_0, t_0)) \ge 0$$

und damit die Behauptung. $\square$

Für das Eindeutigkeitsresultat betrachten wir die Hamilton-Jacobi-Gleichung (4.17) auf $\mathbb{R}^n \times (0, T)$, also auf einem endlichen Zeitintervall. In der Definition von Viskositätslösungen müssen wir dann das Intervall $(0, \infty)$ durch $(0, T)$ ersetzen. Zuerst beweisen wir folgendes Lemma.

Lemma 4.19. *Sei u eine Viskositätslösung von (4.17) auf $\mathbb{R}^n \times (0, T)$. Es habe $u - v$ ein lokales Maximum (Minimum) an $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, T]$. Dann gilt*

$$v_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla v(x_0, t_0)) \le 0 \quad (\ge 0).$$

Beweis. Falls $t_0 < T$, ist nichts zu beweisen, da die Ungleichung dann gerade der Definition der Viskositätslösung entspricht. Sei also $t_0 = T$, und es habe $u - v$ an der Stelle (x_0, T) ein striktes lokales Maximum. Wir definieren

$$w(x, t) = v(x, t) + \frac{\varepsilon}{T - t}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t < T.$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ besitzt $u - w$ ein lokales Maximum an $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ und $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \to (x_0, T)$ für $\varepsilon \to 0$, wobei $0 < t_\varepsilon < T$. Weil u eine Viskositätslösung ist, folgt

$$w_t(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(x_\varepsilon, \nabla w(x_\varepsilon, t_\varepsilon)) \leq 0.$$

Dies bedeutet

$$\begin{aligned} v_t(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(x_\varepsilon, \nabla v(x_\varepsilon, t_\varepsilon)) &\leq v_t(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{(T - t_\varepsilon)^2} + H(x_\varepsilon, \nabla v(x_\varepsilon, t_\varepsilon)) \\ &= w_t(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(x_\varepsilon, \nabla w(x_\varepsilon, t_\varepsilon)) \leq 0. \end{aligned}$$

Im Grenzwert $\varepsilon \to 0$ erhalten wir

$$v_t(x_0, T) + H(x_0, \nabla v(x_0, T)) \leq 0$$

und damit die Behauptung. Die Aussage mit einem lokalen Minimum impliziert die umgekehrte Ungleichung.

Der folgende Satz ist das Hauptergebnis unserer Untersuchungen.

Theorem 4.20. *Die Funktion $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei lipschitzstetig im folgenden Sinne: Es existiere eine Konstante $L \geq 0$, so dass für alle $x, y, p, q \in \mathbb{R}^n$ gelte*

$$|H(x, p) - H(x, q)| \leq L|p - q|, \quad |H(x, p) - H(y, p)| \leq L(1 + |p|)|x - y|.$$

Dann existiert höchstens eine Viskositätslösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung (4.17).

Beweis. Der Beweis basiert auf der *Methode der Variablendopplung*, d.h. anstatt (x_0, t_0) betrachten wir (x_0, y_0, t_0, s_0). Seien u und w zwei verschiedene Viskositätslösungen von (4.17) mit denselbem Anfangswert. Dann ist

$$\sigma = \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]} (u - w)(x, t) > 0.$$

(Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $\sigma > 0$.) Wir definieren für $\varepsilon, \lambda \in (0, 1)$

$$f(x, y, t, s) = u(x, t) - w(y, s) - \lambda(t + s) - \varepsilon^{-2}\big(|x - y|^2 + |t - s|^2\big) - \varepsilon\big(|x|^2 + |y|^2\big).$$

Das Ziel lautet, mit Hilfe der Lipschitzstetigkeit von H einen Widerspruch zur Voraussetzung $\lambda > 0$ herbeizuführen. Dazu benötigen wir eine Reihe technischer Abschätzungen.

1. Nach Definition sind Viskositätslösungen beschränkt; also existiert (x_0, y_0, t_0, s_0) mit

$$f(x_0, y_0, t_0, s_0) = \max_{\mathbb{R}^{2n} \times [0,T]^2} f(x, y, t, s).$$

Wir können ε, $\lambda \in (0,1)$ so klein wählen, dass

$$f(x_0, y_0, t_0, s_0) \geq \max_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} f(x,x,t,t) \geq \frac{\sigma}{2}. \tag{4.22}$$

Insbesondere gilt $f(0,0,0,0) \leq f(x_0, y_0, t_0, s_0)$, was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} \lambda(t_0 + s_0) + &\varepsilon^{-2}\big(|x_0 - y_0|^2 + |t_0 - s_0|^2\big) + \varepsilon\big(|x_0|^2 + |y_0|^2\big) \\ &\leq u(x_0, t_0) - w(y_0, s_0) - \big(u(0,0) - w(0,0)\big). \end{aligned}$$

Diese Ungleichung zeigt (wegen der Beschränktheit von u und w), dass

$$|x_0 - y_0| + |t_0 - s_0| \leq C\varepsilon, \quad \varepsilon\big(|x_0|^2 + |y_0|^2\big) \leq C \tag{4.23}$$

mit einer von ε unabhängigen Konstante $C > 0$. Die letztere Ungleichung impliziert mit der Young-Ungleichung

$$\varepsilon\big(|x_0| + |y_0|\big) = \varepsilon^{1/4}\varepsilon^{3/4}\big(|x_0| + |y_0|\big) \leq \varepsilon^{1/2} + C\varepsilon^{3/2}\big(|x_0|^2 + |y_0|^2\big) \leq C\varepsilon^{1/2}. \tag{4.24}$$

2. Nach Definition des Maximums haben wir $f(x_0, y_0, t_0, s_0) \geq f(x_0, x_0, t_0, t_0)$, was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) - w(y_0, s_0) - &\lambda(t_0 + s_0) - \varepsilon^{-2}\big(|x_0 - y_0|^2 + |t_0 - s_0|^2\big) - \varepsilon\big(|x_0|^2 + |y_0|^2\big) \\ &\geq u(x_0, t_0) - w(x_0, t_0) - 2\lambda t_0 - 2\varepsilon|x_0|^2. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung kann äquivalent formuliert werden als

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2}\big(|x_0 - y_0|^2 + |t_0 - s_0|^2\big) &\leq w(x_0, t_0) - w(y_0, s_0) - \lambda(t_0 + s_0) + 2\lambda t_0 \\ &\qquad - \varepsilon\big(|x_0|^2 + |y_0|^2 - 2|x_0|^2\big) \\ &= w(x_0, t_0) - w(y_0, s_0) + \lambda(t_0 - s_0) + \varepsilon(x_0 + y_0) \cdot (x_0 - y_0). \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von w folgt

$$|w(x_0, t_0) - w(y_0, s_0)| \leq \omega_w(|x_0 - y_0| + |t_0 - s_0|),$$

wobei ω_w eine stetige Funktion mit $\omega_w(r) \to 0$ für $r \to 0$ sei. Wegen der Abschätzungen (4.23) und (4.24) ergibt sich also

$$\varepsilon^{-2}\big(|x_0 - y_0|^2 + |t_0 - s_0|^2\big) \leq \omega_w(|x_0 - y_0| + |t_0 - s_0|),$$

und daher

$$|x_0 - y_0| + |t_0 - s_0| \leq o(\varepsilon).$$

Dies verbessert die erste Abschätzung in (4.23).

3. Nun ist auch u gleichmäßig stetig, d.h.

$$|u(x_0,t_0) - u(y_0,s_0)| \le \omega_u(|x_0 - y_0| + |t_0 - s_0|),$$

wobei ω_u eine stetige Funktion mit $\omega_u(r) \to 0$ für $r \to 0$ sei. Nach (4.22) ist $f(x_0,y_0,t_0,s_0) \ge \sigma/2$, also

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{2} &\le f(x_0,y_0,t_0,s_0) \le u(x_0,t_0) - w(y_0,s_0)\\ &= u(x_0,t_0) - u(x_0,0) + \underbrace{u(x_0,0) - w(x_0,0)}_{=0} + w(x_0,0) - w(x_0,t_0)\\ &\quad + w(x_0,t_0) - w(y_0,s_0)\\ &\le \omega_u(t_0) + \omega_w(t_0) + \underbrace{\omega_w(|x_0 - y_0| + |t_0 - s_0|)}_{=\omega_w(o(\varepsilon))}.\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass Obiges $\omega_u(t_0) + \omega_w(t_0) \ge \sigma/4$ impliziert. Dann muss aber $t_0 \ge t^* > 0$ für ein $t^* > 0$ gelten. Analog können wir $s_0 \ge t^* > 0$ zeigen.

4. Nach Definition nimmt f an (x_0,y_0,t_0,s_0) ein Maximum an. Dann nimmt $(x,t) \mapsto f(x,y_0,t,s_0)$ ein Maximum an (x_0,t_0) an. Gemäß der Definition von f bedeutet dies, dass $u - v$ ein Maximum an (x_0,t_0) annimmt, wobei

$$v(x,t) = w(y_0,s_0) + \lambda(t + s_0) + \varepsilon^{-2}\big(|x - y_0|^2 + |t - s_0|^2\big) + \varepsilon\big(|x|^2 + |y_0|^2\big).$$

Nun ist u eine Viskositätslösung von (4.17); also gilt, ggf. unter Verwendung von Lemma 4.19,

$$0 \ge v_t(x_0,t_0) + H(x_0, \nabla v(x_0,t_0)) = \lambda + 2\varepsilon^{-2}(t_0 - s_0) + H\big(x_0, 2\varepsilon^{-2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon x_0\big). \tag{4.25}$$

Nach einem ähnlichen Argument wie oben besitzt $(y,s) \mapsto -f(x_0,y,t_0,s)$ ein Minimum an (y_0,s_0). Also hat $w - v$ ein Minimum an (y_0,s_0), wobei

$$v(y,s) = u(x_0,t_0) - \lambda(t_0 + s) - \varepsilon^{-2}\big(|x_0 - y|^2 + |t_0 - s|^2\big) - \varepsilon\big(|x_0|^2 + |y|^2\big).$$

Auch w ist eine Viskositätslösung von (4.17), was

$$0 \le v_s(y_0,s_0) + H(y_0, \nabla v(y_0,s_0)) = -\lambda + 2\varepsilon^{-2}(t_0 - s_0) + H\big(y_0, 2\varepsilon^{-2}(x_0 - y_0) - 2\varepsilon y_0\big)$$

impliziert. Nehmen wir die Differenz von dieser Ungleichung und (4.25), so folgt

$$2\lambda \le H\big(y_0, 2\varepsilon^{-2}(x_0 - y_0) - 2\varepsilon y_0\big) - H\big(x_0, 2\varepsilon^{-2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon x_0\big).$$

Nach Voraussetzung ist H lipschitzstetig (im Sinne der Voraussetzung des Satzes), so dass wir

$$2\lambda \le H(y_0, 2\varepsilon^{-2}(x_0 - y_0) - 2\varepsilon y_0) - H(y_0, 2\varepsilon^{-2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon x_0)$$

$$
\begin{aligned}
&+ H(y_0, 2\varepsilon^{-2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon x_0) - H(x_0, 2\varepsilon^{-2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon x_0) \\
&\le 2\varepsilon L|x_0 + y_0| + L\big(1 + |2\varepsilon^{-2}(x_0 - y_0) + 2\varepsilon x_0|\big)|x_0 - y_0| \\
&\le C\varepsilon(|x_0| + |y_0|) + C|x_0 - y_0|\big(1 + \varepsilon^{-2}|x_0 - y_0| + \varepsilon|x_0|\big)
\end{aligned}
$$

erhalten. Oben haben wir bewiesen, dass $\varepsilon(|x_0| + |y_0|) \le C\varepsilon^{1/2}$ und $|x_0 - y_0| + |t_0 - s_0| = o(\varepsilon)$ gelten. Dann folgt $\varepsilon^{-2}|x_0 - y_0|^2 = o(1)$ und der Grenzwert $\varepsilon \to 0$ in der obigen Ungleichung liefert $|x_0 - y_0| \to 0$ ($\varepsilon \to 0$) und

$$\lambda \le 0,$$

was ein Widerspruch zu $\lambda > 0$ ist. □

Die Frage der Existenz von Viskositätslösungen ist delikater. Sie führt auf Kontrollprobleme, da die Ungleichungen in der Definition der Viskositätslösung mit den Optimalitätsbedingungen der Kontrolltheorie zusammenhängen. Wir zitieren nur ein spezielles Existenzresultat aus Evans [10, Abschnitt 10.3.4].

Theorem 4.21. *Sei $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion mit $\lim_{|p|\to\infty} H(p)/|p| = \infty$ und sei der Anfangswert $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lipschitzstetig und beschränkt. Dann existiert eine eindeutige Viskositätslösung von*

$$u_t + H(\nabla u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n,\ t > 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Interessanterweise ist diese Viskositätslösung explizit gegeben durch

$$u(x,t) = \min_{y\in\mathbb{R}^n} \Big(tL\Big(\frac{x-y}{t}\Big) + u_0(y)\Big),$$

wobei L die sogenannte Legendre-Transformation von H ist:

$$L(q) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n} (p\cdot q - H(p)), \quad q \in \mathbb{R}^n.$$

4.4 Eine logarithmische Gleichung vierter Ordnung

Wir stellen exemplarisch eine Gleichung vierter Ordnung vor, nämlich die *Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn-Gleichung* (kurz: DLSS-Gleichung)

$$u_t + (u(\ln u)_{xx})_{xx} = 0 \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u(0) = u_0, \tag{4.26}$$

in einem Intervall $\Omega = (0,1)$, versehen mit den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 1, \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t > 0. \tag{4.27}$$

In gewisser Weise kann diese Gleichung als eine Verallgemeinerung der Wärmeleitungsgleichung auf höhere Ableitungen interpretiert werden, denn letztere Gleichung kann geschrieben werden als $u_t = u_{xx} = (u(\ln u)_x)_x$. Die Gleichung (4.26) ist parabolisch, denn sie kann formuliert werden als

$$u_t + u_{xxxx} - \left(\frac{u_x^2}{u}\right)_{xx} = 0,$$

und der Hauptteil $u_t + u_{xxxx}$ ist parabolisch. Die Gleichung (4.26) beschreibt den Grenzwert einer gewissen Zufallsdichte, die im Zusammenhang mit Teilchensystemen mit Spin steht, oder die Elektronendichte in einem speziellen Halbleitermaterial.

Die Gleichung (4.26) ist von besonderem Interesse, da die Lösungen für nichtnegative Anfangswerte aus physikalischen Gründen ebenfalls nichtnegativ sein sollten. Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung kann diese Eigenschaft mit dem Maximumprinzip bewiesen werden. Dies ist bei Gleichungen höherer Ordnung im allgemeinen nicht möglich. Man kann ein Gegenbeispiel für die Gleichung $u_{xxxx} = f$ mit geeigneten Randbedingungen konstruieren (siehe Übungsaufgaben). Mit einer besonderen Technik ist es möglich, die Nichtnegativität der Lösungen von (4.26) zu zeigen. Im allgemeinen existiert jedoch kein Vergleichsprinzip.

Um die Existenz nichtnegativer Lösungen von (4.26)-(4.27) zu beweisen, stellen wir zwei Techniken vor: exponentielle Variablentransformation und Semi-Diskretisierung in der Zeit. Bei der ersten Technik schreiben wir $u = e^w$ mit einer neuen Funktion w und formulieren (4.26) um als

$$(e^w)_t + (e^w w_{xx})_{xx} = 0.$$

In dieser Formulierung ist $u = e^w > 0$, sofern $w \in L^\infty$. Die Funktion w erfüllt die Randbedingungen $w = 0$ und $w_x = 0$ auf $\partial\Omega = \{0, 1\}$. Wir können also eine schwache Lösung $w \in H_0^2(\Omega)$ suchen. Die zweite Technik bedeutet, dass wir eine semi-diskrete Gleichung lösen:

$$\frac{1}{\tau}(e^{w_k} - e^{w_{k-1}}) = -(e^{w_k}(w_k)_{xx})_{xx}, \quad k = 1, \ldots, N,$$

wobei $\tau N = T$ für gegebenes $T > 0$. Dies ist eine rekursive Gleichung: Für gegebenes w_{k-1} suchen wir eine Lösung $w_k \in H_0^2(\Omega)$. Der Vorteil ist, dass diese Gleichung elliptisch ist und wir die zusätzliche Zeitabhängigkeit nicht zu betrachten brauchen. Die schwache Formulierung lautet

$$\frac{1}{\tau}\int_0^1 (e^{w_k} - e^{w_{k-1}}) v dx = -\int_0^1 e^{w_k}(w_k)_{xx} v_{xx} dx \quad \text{für alle } v \in H_0^2(\Omega). \tag{4.28}$$

Die rechte Seite definiert – für gegebenes e^{w_k} – eine Bilinearform und erlaubt die Anwendung des Lemmas von Lax-Milgram. Im folgenden gehen wir vor wie [14].

Proposition 4.22. *Sei $u_0 \geq 0$ messbar und $\int_\Omega (u_0 - \ln u_0)dx$ endlich. Dann existiert eine schwache Lösung $w_k \in H_0^2(\Omega)$ von (4.28).*

Beweis. Im folgenden nehmen wir an, dass wir $u_0 = e^{w_0}$ für eine Funktion $w_0 \in L^\infty(\Omega)$ schreiben können. Dies ist möglich, wenn $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ strikt positiv ist. Allgemeinere Anfangswerte u_0 erhalten wir in einem Approximationsargument, das wir hier nicht ausführen.

Wir benutzen den Fixpunktsatz von Leray-Schauder. Sei $e^{w_{k-1}} \in L^1(\Omega)$. Seien ferner $\bar{w} \in H^1(\Omega)$ und $\sigma \in [0,1]$. Sei $w \in H_0^2(\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Problems

$$\int_\Omega e^{\bar{w}} w_{xx} v_{xx} dx = \frac{\sigma}{\tau} \int_\Omega (e^{w_{k-1}} - e^{\bar{w}}) v dx, \quad v \in H_0^2(\Omega).$$

Die linke Seite definiert eine stetige, koerzive Bilinearform $a(w,v)$. Sie ist koerziv, da $\bar{w}$ wegen der stetigen Einbettung von $H^1(\Omega)$ nach $L^\infty(\Omega)$ (nur in einer Raumdimension!) punktweise essentiell beschränkt ist und damit

$$a(w,w) = \int_\Omega e^{\bar{w}} w_{xx}^2 dx \geq \exp(-\|\bar{w}\|_{L^\infty(\Omega)}) \int_\Omega w_{xx}^2 dx.$$

Zweimaliges Anwenden der Poincaré-Ungleichung ergibt

$$\|w\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C_1 \|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2(\bar{w}) a(w,w),$$

also die Koerzivität von a in $H_0^2(\Omega)$. Dies definiert den Fixpunktoperator $S : H^1(\Omega) \times [0,1] \to H^1(\Omega)$, $S(\bar{w}, \sigma) = w$. Es gilt $S(\bar{w}, 0) = 0$, denn mit $\sigma = 0$ ist nur das Problem

$$(e^{\bar{w}} w_{xx})_{xx} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad w = w_x = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

zu lösen, und die eindeutige Lösung lautet $w = 0$. Die Stetigkeit von S kann mit den Methoden aus den Kapiteln 2 und 3 gezeigt werden. Aus der kompakten Einbettung $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ folgt die Kompaktheit von S. Es bleibt also nur die gleichmäßige Abschätzung aller Fixpunkte von S zu zeigen.

Sei $w \in H_0^2(\Omega)$ ein Fixpunkt von S. Dann löst w die Gleichung

$$\int_\Omega e^{w} w_{xx} v_{xx} dx = -\frac{\sigma}{\tau} \int_\Omega (e^{w_{k-1}} - e^{w}) v dx, \quad v \in H_0^2(\Omega).$$

Wir verwenden die geschickt gewählte Testfunktion $v = 1 - e^{-w} \in H_0^2(\Omega)$ und erhalten wegen $(1 - e^{-w})_{xx} = e^{-w}(w_{xx} - w_x^2)$

$$\frac{\sigma}{\tau} \int_\Omega (e^{w} - e^{w_{k-1}})(1 - e^{-w}) dx + \int_\Omega w_{xx}(w_{xx} - w_x^2) dx = 0. \tag{4.29}$$

Die Ungleichung $e^x \geq x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ liefert

$$\begin{aligned}\int_\Omega (e^w - e^{w_{k-1}})(1 - e^{-w})dx &= \int_\Omega (e^w - e^{w_{k-1}} - 1 + \underbrace{e^{w_{k-1}-w}}_{\geq w_{k-1}-w+1})dx \\ &\geq \int_\Omega (e^w - w)dx - \int_\Omega (e^{w_{k-1}} - w_{k-1})dx.\end{aligned}$$

Für das andere Integral in (4.29) verwenden wir die Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\int_\Omega w_{xx}(w_{xx} - w_x^2)dx &= \int_\Omega w_{xx}^2 dx - \frac{1}{3}\int_\Omega (w_x^3)_x dx = \int_\Omega w_{xx}^2 dx - \frac{1}{3}(w_x(1)^3 - w_x(0)^3) \\ &= \int_\Omega w_{xx}^2 dx,\end{aligned}$$

denn $w_x(1) = w_x(0) = 0$. Damit folgt aus (4.29)

$$\frac{\sigma}{\tau}\int_\Omega (e^w - w)dx + \int_\Omega w_{xx}^2 dx \leq \frac{\sigma}{\tau}\int_\Omega (e^{w_{k-1}} - w_{k-1})dx. \tag{4.30}$$

Wir benutzen die Ungleichung $e^x - x \geq 1$, um zu schließen, dass $\|w_{xx}\|_{L^2(\Omega)} \leq C(w_{k-1})$. Mit der Poincaré-Ungleichung erhalten wir eine gleichmäßige Abschätzung für w in $H^2(\Omega)$. Nach dem Satz von Leray-Schauder erhalten wir die Existenz einer Lösung von (4.28). □

Man kann zeigen, dass die Lösung von (4.28) sogar eindeutig ist (siehe [14]). Dieses Ergebnis werden wir im folgenden jedoch nicht benötigen. Die Ungleichung (4.30) führt unmittelbar auf eine Abschätzung, die gleichmäßig in k ist, indem wir die rekursive Ungleichung (4.30) auflösen:

Lemma 4.23. *Seien $w_0, \ldots, w_N$ Lösungen der rekursiven Gleichung* (4.28). *Dann gilt für alle $k = 1, \ldots, N$:*

$$\int_\Omega (e^{w_k} - w_k)dx + \tau\int_\Omega (w_k)_{xx}^2 dx \leq \int_\Omega (e^{w_0} - w_0)dx.$$

Um eine Lösung der ursprünglichen Gleichung (4.26) zu erhalten, müssen wir den Grenzwert $\tau \to 0$ durchführen. Da der Beweis verhältnismäßig aufwendig ist, skizzieren wir nur die wesentlichen Ideen. Definiere die in der Zeit stückweise konstante Funktion

$$w^{(N)}(x,t) = w_k(x), \quad x \in \Omega,\ t \in ((k-1)\tau, k\tau],\ k = 1, \ldots, N.$$

Lemma 4.23 zeigt, dass $w^{(N)}(t)$ in $H^2(\Omega)$ beschränkt ist. Integrieren wir über die Zeit $t \in (0,T)$ (was wegen der stückweisen Konstanz eine Summe über $k = 1, \ldots, N$ ergibt), so erhalten wir

$$\|w^{(N)}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 = \tau\sum_{k=1}^N \|w_k\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C_1, \tag{4.31}$$

und $C_1 > 0$ ist unabhängig von N und τ. Die Hauptschwierigkeit ist die Herleitung einer Abschätzung für die Zeitableitung von $w^{(N)}$, damit wir das Lemma von Aubin anwenden können. Leider existiert die Zeitableitung von $w^{(N)}$ nicht (als Element eines Sobolev-Raumes), da die Funktion stückweise konstant bezüglich t ist. Außerdem haben wir nur Informationen über eine diskrete Zeitableitung von $e^{w^{(N)}}$, nicht von $w^{(N)}$. Das erste Problem kann mit einer Verfeinerung des Lemmas von Aubin gelöst werden.

Theorem 4.24 (Lemma von Aubin). *Seien X, B und Y Banachräume, so dass die Einbettung $X \hookrightarrow B$ kompakt und die Einbettung $B \hookrightarrow Y$ stetig ist. Weiter seien $1 \leq p < \infty$ und $\sigma_\tau : L^p(\tau, T; X) \to L^p(0, T-\tau; X)$, $(\sigma_\tau u)(t) = u(t-\tau)$, ein Shift-Operator. Sei (u_τ) eine in t stückweise konstante Folge, die in $L^p(0,T;X)$ beschränkt ist und für die mit einer Konstanten $C > 0$ gilt:*

$$\|u_\tau - \sigma_\tau u_\tau\|_{L^1(\tau,T;Y)} \leq C\tau \quad \text{für alle } \tau > 0.$$

Dann ist (u_τ) relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$.

Das zweite Problem kann gelöst werden, indem man eine Abschätzung für $e^{w^{(N)}}$ zusätzlich zu der Abschätzung (4.31) zeigt. Dazu benötigen wir die folgende Version der Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung.

Lemma 4.25 (Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ $(n \geq 1)$, $1 \leq p, q \leq \infty$ und $u \in H^2(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Dann gilt für eine von u unabhängige Konstante $C > 0$:*

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta},$$

wobei $\theta \in [0,1]$ gegeben ist durch

$$1 - \frac{n}{p} = \theta\Big(2 - \frac{n}{2}\Big) - (1-\theta)\frac{n}{q}.$$

Wir zeigen folgende Abschätzungen für $e^{w^{(N)}}$.

Lemma 4.26. *Es gilt für eine von N unabhängige Konstante $C > 0$:*

$$\|e^{w^{(N)}}\|_{L^{5/2}(0,T;W^{1,1}(\Omega))} + \frac{1}{\tau}\|e^{w^{(N)}} - \sigma_\tau e^{w^{(N)}}\|_{L^{10/9}(\tau,T;H^{-2}(\Omega))} \leq C_2. \tag{4.32}$$

Beweis. 1. Zuerst bemerken wir, dass für $x \geq 0$ gilt

$$e^x - x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} - x = 1 + \frac{x^2}{2} \geq x$$

(die letzte Ungleichung ist äquivalent zu $(x-1)^2 + 1 \geq 0$); andererseits ist für $x < 0$

$$e^x - x \geq -x = |x|.$$

Daher folgt aus der Abschätzung aus Lemma 4.23

$$C(w_0) \geq \int_\Omega (e^{w_k} - w_k)dx \geq \int_{\{w_k \geq 0\}} w_k dx + \int_{\{w_k < 0\}} |w_k| dx = \int_\Omega |w_k| dx$$

für alle $k \geq 0$. Dies impliziert

$$\|w^{(N)}\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq C, \tag{4.33}$$

wobei $C > 0$ eine generische, von N unabhängige Konstante sei. Die gleiche Abschätzung aus Lemma 4.23 zeigt, dass

$$\|e^{w^{(N)}}\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leq C. \tag{4.34}$$

2. Wir wenden die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung für $p = \infty$ und $q = 1$ an:

$$\|w_x^{(N)}\|_{L^{5/2}(0,T;L^\infty(\Omega))}^{5/2} = \int_0^T \|w_x^{(N)}\|_{L^\infty(\Omega)}^{5/2} dt \leq C \int_0^T \|w^{(N)}\|_{H^2(\Omega)}^{5\theta/2} \|w^{(N)}\|_{L^1(\Omega)}^{5(1-\theta)/2} dt,$$

wobei $1 = \theta(2 - 1/2) - (1 - \theta) = 5\theta/2 - 1$, also $\theta = 4/5$. Dies ergibt

$$\|w_x^{(N)}\|_{L^{5/2}(0,T;L^\infty(\Omega))}^{5/2} \leq \|w^{(N)}\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{1/2} \int_0^T \|w^{(N)}\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \leq C$$

wegen (4.31) und (4.33). Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|(e^{w^{(N)}})_x\|_{L^{5/2}(0,T;L^1(\Omega))}^{5/2} &= \int_0^T \left(\int_\Omega |e^{w^{(N)}} w_x^{(N)}| dx \right)^{5/2} dt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_\Omega e^{w^{(N)}} dx \right)^{5/2} \|w_x^{(N)}\|_{L^\infty(\Omega)}^{5/2} dt \\
&\leq \sup_{t \in (0,T)} \left(\int_\Omega e^{w^{(N)}} dx \right)^{5/2} \int_0^T \|w_x^{(N)}\|_{L^\infty(\Omega)}^{5/2} dt \\
&\leq \|e^{w^{(N)}}\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{5/2} \|w_x^{(N)}\|_{L^{5/2}(0,T;L^\infty(\Omega))}^{5/2} \leq C
\end{aligned}$$

wegen (4.34) und der obigen Abschätzung für $w_x^{(N)}$. Dies zeigt die erste Behauptung.

3. Wir schätzen die diskrete Zeitableitung von $e^{w^{(N)}}$ ab:

$$\begin{aligned}
\tau^{-1} \|e^{w^{(N)}} - \sigma_\tau e^{w^{(N)}}\|_{L^{10/9}(\tau,T;H^{-2}(\Omega))}^{10/9} &= \|(e^{w^{(N)}} w_{xx}^{(N)})_{xx}\|_{L^{10/9}(\tau,T;H^{-2}(\Omega))}^{10/9} \\
&\leq \|e^{w^{(N)}} w_{xx}^{(N)}\|_{L^{10/9}(0,T;L^2(\Omega))}^{10/9} \\
&\leq \int_0^T \|e^{w^{(N)}}\|_{L^\infty(\Omega)}^{10/9} \|w^{(N)}\|_{H^2(\Omega)}^{10/9} dt.
\end{aligned}$$

Wenden wir die Hölder-Ungleichung mit $p = 9/4$ und $p' = 9/5$ an, so folgt

$$\tau^{-1}\|e^{w^{(N)}} - \sigma_\tau e^{w^{(N)}}\|^{10/9}_{L^{10/9}(0,T;H^{-2}(\Omega))} \le \Big(\int_0^T \|e^{w^{(N)}}\|^{5/2}_{L^\infty(\Omega)}dt\Big)^{4/9}\Big(\int_0^T \|w^{(N)}\|^2_{H^2(\Omega)}dt\Big)^{5/9}$$
$$= \|e^{w^{(N)}}\|^{4/9\cdot 2/5}_{L^{5/2}(0,T;L^\infty(\Omega))}\|w^{(N)}\|^{5/9\cdot 1/2}_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \le C$$

wegen (4.31) und (4.34). Damit ist das Lemma bewiesen. □

Wir können also das Lemma von Aubin anwenden auf $e^{w^{(N)}}$ mit $X = W^{1,1}(\Omega)$, $B = L^2(\Omega)$ und $Y = H^{-2}(\Omega)$. Beachte, dass die Einbettung $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ in einer Raumdimension kompakt ist. Wir erhalten die Existenz einer Teilfolge mit

$$e^{w^{(N')}} \to u \quad \text{in } L^{5/2}(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{für } N' \to \infty.$$

Mit $N' \to \infty$ gilt natürlich $\tau' = T/N' \to 0$. Wegen (4.31) gilt außerdem

$$w^{(N')} \rightharpoonup w \quad \text{in } L^2(0,T;H^2(\Omega)).$$

Aus (4.32) folgt

$$\frac{1}{\tau}\big(e^{w^{(N)}} - \sigma_\tau e^{w^{(N)}}\big) \rightharpoonup y \quad \text{in } L^{10/9}(0,T;H^{-2}(\Omega)).$$

Dann ist $y = u_t$ wegen der Eindeutigkeit der Grenzwerte.

Wir behaupten, dass $u = e^w$ gilt. Wegen $e^{w^{(N')}} \to u$ punktweise fast überall gilt auch $w^{(N')} = \ln e^{w^{(N')}} \to \ln u$ punktweise fast überall. Über die Integrierbarkeit von $\ln u$ ist damit noch nichts ausgesagt. Allerdings ist $w^{(N')} \rightharpoonup w$ in $L^2(0,T;H^2(\Omega))$, d.h., wir haben $\ln u = w \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$. Damit können wir $u = e^w$ fast überall in $\Omega \times (0,T)$ schreiben, und es gilt $e^w \in L^{5/2}(0,T;L^2(\Omega))$. Beachte, dass wir *nicht* $u > 0$ schließen können, da w nicht notwendigerweise aus $L^\infty(\Omega \times (0,T))$ sein muss (wir wissen nur, dass $w \in L^2(0,T;L^\infty(\Omega))$).

Wir können nun in der schwachen Formulierung (4.28) den Grenzwert $\tau' \to 0$ durchführen und erhalten eine Lösung von (4.26)-(4.27). Die Lösung u ist nichtnegativ, denn aus $e^{w^{(N)}} > 0$ erhalten wir $u = \lim_{N'\to\infty} e^{w^{(N')}} \ge 0$. Wir fassen zusammen:

Theorem 4.27 (Globale Existenz für die DLSS-Gleichung). *Seien $u_0 \ge 0$ eine messbare Funktion mit $\int_\Omega (u_0 - \ln u_0)dx < \infty$ und $T > 0$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \ge 0$ von (4.26)-(4.27) mit*

$$u \in L^{5/2}(0,T;W^{1,1}(\Omega)), \quad u_t \in L^{10/9}(0,T;H^{-2}(\Omega)), \quad \ln u \in L^2(0,T;H^2_0(\Omega)).$$

Falls $u_0 \ge C > 0$ strikt positiv ist, könnte man vermuten, dass die schwache Lösung $u(t) > 0$ ebenfalls positiv ist und nicht nur nichtnegativ. Dies kann für hinreichend kleine und hinreichend große $t > 0$ bewiesen werden; der allgemeine Fall ist offen. Die Schwierigkeit ist, dass kein Maximumprinzip zur Verfügung steht. Wir haben dieses Problem für den Beweis der Nichtnegativität vermittels der Transformation $u^{(N)} = e^{w^{(N)}} > 0$ umgangen. Leider verlieren wir im Grenzwert $N' \to \infty$ die strikte Ungleichung und erhalten nur $u = \lim_{N' \to \infty} u^{(N')} \geq 0$. Für weitere Ergebnisse dieser Gleichung verweisen wir auf [13].

Literatur

[1] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.

[2] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. 5. Auflage. Springer, Berlin, 2006.

[3] A. Bressan. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations and optimal control problems.

[4] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, Paris, 1983.

[5] T. Cazenave. *An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equations*. Textos de Métodos Matemáticos, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1996.

[6] M. Crandall, H. Ishii´und P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin Amer. Math. Soc.* 27 (1992), 1-67.

[7] R. Dautray und J.-L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Volume 5. Springer, Berlin, 2000.

[8] I. Ekeland und R. Temam. *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1976.

[9] E. Emmrich. *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen*. Vieweg, Wiesbaden 2004.

[10] L. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, Providence, 2002.

[11] D. Gilbarg und N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin, 1977.

[12] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.* Pitman, Boston, 1985.

[13] A. Jüngel und D. Matthes. A review on results for the Derrida-Lebowitz-Speer-Spohn equation. Eingereicht, 2008.

[14] A. Jüngel und R. Pinnau. Global non-negative solutions of a nonlinear fourth-oder parabolic equation for quantum systems. *SIAM J. Math. Anal.* 32 (2000), 760-777.

[15] M. Reed und B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press, 1975.

[16] T. Roubíček. *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*. Brikhäuser, Basel, 2005.

[17] M. Ružička. *Funktionalanalysis II*. Vorlesungsmanusskript, 2002.

[18] B. Schweizer. *Nichtlineare partielle Differentialgleichungen*. Vorlesungsmanuskript, Universität Basel, 2007.

[19] R. Showalter. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*. Amer. Math. Soc., Providence, 1997.

[20] W. Strauss. *Nonlinear Wave Equations.* NSF-CBMS Research Monograph 73, Amer. Math. Soc., Providence, 1989.

[21] G. M. Troianiello. *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems*. Plenum Press, New York, 1987.

[22] J.-L. Vazquez. An introduction to the mathematical theory of the porous medium equation. In: *Shape Optimization and Free Boundaries*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C (1992), Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 347-389.

[23] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications.* Volume II. Springer, New York, 1990.