TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

17. Dezember 2021

Partielle Differentialgleichungen

Unterlagen zum Repetitorium

Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel
Institut für Analysis und Scientific Computing

Eine Reihe von Beispielen stammt aus den Unterlagen zum Repetitorium von Prof. Arnold. Andere Beispiele sind aus diversen Büchern über partielle Differentialgleichungen entnommen. Die Beispiele haben das Ziel, die Themen aus der Vorlesung zu illustrieren, zu üben oder zu vertiefen.

Repetitorium 11.10.21: Lokalkonvexe Räume und Satz von Gauß

Lokalkonvexe Räume

Der Raum $C^\infty(\Omega) = \cap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$ aller unendlich differenzierbaren Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 1$ ist kein Banachraum, aber lokalkonvex. Wir wollen diese Begriffe konkretisieren, denn der Raum $C^\infty(\Omega)$ (und $C_0^\infty(\Omega)$) wird in Kapitel 3 des Skripts im Rahmen der Distributionentheorie benötigt.

Wir nennen einen vollständigen, normierten Vektorraum X einen *Banachraum*. Eine *Norm* $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ ist über die Eigenschaften

- $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$,
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in X$

definiert. Ein Raum X heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert. Beispiele sind die Räume $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ und $C^k(K)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

Der Raum $C^\infty(K)$ kann nicht zu einem Banachraum gemacht werden in dem Sinne, dass er in seiner natürlichen Topologie (erzeugt durch die Halbnormen $p_k(f) = \sup_{x\in K} |D^k f(x)|$) nicht normierbar ist. In diesem Sinne ist $C^\infty(K)$ kein Banachraum.

Eine *Halbnorm* $p : X \to [0,\infty)$ auf einem Vektorraum X ist definiert durch

- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$,
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in X$,

d.h., die erste Normeigenschaft wird nicht gefordert. Wir sagen, dass eine Familie $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Halbnormen *punktetrennend*, wenn

$$p_k(x) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad \text{impliziert} \quad x = 0.$$

Definition 0.1. *Ein Vektorraum X mit einer punktetrennenden Familie von Halbnormen heißt* lokalkonvex.

Lokalkonvexe Räume werden häufig durch die Forderung definiert, dass alle Elemente über "beliebig kleine" konvexe Umgebungen verfügen. Wir haben hier eine andere Definition gewählt (siehe das Buch von Reed–Simon Band 1), die für uns zweckmäßiger ist. Der folgende Satz ist in Reed–Simon Band 1 (Theorem V.5) bewiesen.

Satz 0.2. *Sei X ein lokalkonvexer Raum. Dann ist X metrisierbar genau dann, wenn die Topologie von X durch eine abzählbare Familie von Halbnormen generiert wird.*

Einen vollständigen, metrisierbaren, lokalkonvexen Raum nennen wir einen *Fréchetraum*.

Wir betrachten die $C_0^\infty(K)$-Räume, wobei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt sei. Der Träger einer Funktion aus $C_0^\infty(K)$ liegt per Definition in K. Dann ist $C_0^\infty(K)$ ein Fréchetraum mit den Halbnormen $p_k(f) = \|f\|_{C^k(K)} = \sum_{j=0}^k \sup_{x\in K} |D^j f(x)|$, $k \in \mathbb{N}$.

Für unbeschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist $C_0^\infty(\Omega)$ mit der natürlichen Topologie *nicht* metrisierbar. Es lässt sich zwar auf diesem Raum eine Metrik einführen, aber diese erzeugt eine Topologie, die *nicht* vollständig ist.

Satz von Gauß

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge mit $\partial\Omega \in C^1$ und äußerem Normaleneinheitsvektor ν, definiert auf $\partial\Omega$. Ferner sei $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ eine vektorwertige Funktion. Dann sagt der Satz von Gauß, dass

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F) dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu ds.$$

In einer Raumdimension $\Omega = (a, b)$ ist $\nu(a) = -1$, $\nu(b) = 1$, also

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b)\nu(b) + F(a)\nu(a) = F(b) - F(a).$$

Das ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

In mehreren Raumdimensionen ist die Berechnung des Volumen- und Oberflächenintegrals komplizierter. Wir betrachten als Beispiel $F(x, y) = (x, y)$ über die Kreisscheibe $\Omega = B_1(0)$. Dann ist $\operatorname{div}(F) = 2$ und

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F) dx = 2 \operatorname{meas}(B_1(0)) = 2\pi.$$

Um die rechte Seite $\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu ds$ zu berechnen, bietet es sich an, Polarkoordinaten $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ zu verwenden. Der Rand der Kreisschreibe wird durch $\phi \in [0, 2\pi)$ parametrisiert, also ist (beachte, dass $r = 1$)

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu ds = \int_0^{2\pi} (\cos\phi, \sin\phi) \cdot \nu d\phi.$$

Der äußere Normaleneinheitsvektor ist gleich dem Vektor $(x, y) = (\cos\phi, \sin\phi)$ (mit Radius eins), also ist

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2\phi + \sin^2\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi.$$

Repetitorium 18.10.21: Charakteristikenmethode

Wir betrachten die Gleichungen

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

mit den Cauchydaten $u = \bar{u}$ auf der Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Wir parametrisieren Γ durch $\Gamma = \{(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) : t \in I\}$ und definieren $S = \{(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t)) : t \in I\}$. Die Kurve Γ liegt also in der (x,y)-Ebene, während S im $\mathbb{R}^3$ liegt. Der Graph von u enthält dann S, weil die z-Komponente von S gerade $u = \bar{u}$ ist.

Wir lösen die obige Differentialgleichung, indem wir den Graphen von u, nämlich die Punkte $(x, y, u(x,y))$ umparametrisieren in $(x(s,t), y(s,t), u(s,t))$, wobei t der Parameter für die Cauchydaten und s der Parameter für die Raumkurven bedeutet. Die Raumkurven sind die Lösungen von

$$\frac{\partial x}{\partial s} = a(x,y,u), \quad \frac{\partial y}{\partial s} = b(x,y,u), \quad \frac{\partial u}{\partial s} = c(x,y,u),$$

denn dann ist

$$c = \frac{\partial u}{\partial s}(x(s,t), y(s,t)) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = au_x + bu_y.$$

Wir berechnen folgendes **Beispiel**:

$$u_x + 2u_y = u, \quad u(x,x) = f(x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die Kurve $\Gamma = \{(x,y) : x = y\}$ wird durch $\{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$ parametrisiert, also sind $\bar{x}(t) = t$, $\bar{y}(t) = t$. Ist sie eine Charakteristik? Dies ist nur dann der Fall, wenn $a\bar{y}_t - b\bar{x}_t = 0$ auf Γ (siehe Kapitel 2.1 des Skripts). Nun ist

$$a\bar{y}_t - b\bar{x}_t = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1 \neq 0,$$

also ist Γ *keine* Charakteristik.

Um das Cauchyproblem zu lösen, bestimmen wir die Lösungen von

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = u$$

mit den Anfangswerten $x(0,t) = t$, $y(0,t) = t$ und $u(0,t) = f(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Die Lösungen lauten

$$x(s,t) = s + t, \quad y(s,t) = 2s + t, \quad u(s,t) = f(t)e^s.$$

Da Γ keine Charakteristik ist, können wir u als Funktion von (x,y) schreiben: Nach Subtraktion von $y = 2s + t$ und $x = s + t$ folgt $y - x = s$ und damit $t = x - s = x - (y - x) = 2x - y$. Wir schließen, dass

$$u(x,y) = f(t)e^s = f(2x-y)e^{y-x}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Könnten wir auch die Gleichung $u_x + u_y = u$ auf Γ lösen? Die Lösungen von

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = u$$

mit den obigen Anfangswerten lauten:

$$x(s,t) = s + t, \quad y(s,t) = s + t, \quad u(s,t) = f(t)e^s.$$

Allerdings folgt daraus $x = y$, so dass wir $u(x,y)$ nicht berechnen können. Dies ist einsichtig, denn wegen $a\bar{y}_t - b\bar{x}_t = 1 - 1 = 0$ ist Γ eine Charakteristik für dieses Cauchyproblem.

Wir wenden nun diese Technik auf die **Burgers-Gleichung** an (wir schreiben y für die Zeit):

$$u_y + uu_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die Kurve Γ ist durch $\bar{x}(t) = t$, $\bar{y}(t) = 0$ parametrisiert. Die Lösungen von

$$\frac{\partial x}{\partial s} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

mit $x(0,t) = t$, $y(0,t) = 0$, $u(0,t) = u_0(t)$ lauten

$$y(s,t) = s, \quad u(s,t) = u_0(t), \quad x(s,t) = su_0(t) + t.$$

Die Schwierigkeit ist die Auflösung von $x = yu_0(t) + t$ (denn $s = y$) nach t. In einfachen Fällen ist dies explizit möglich, etwa wenn $u_0(x) = x$. Dann ist $x = yt + t = (y+1)t$ bzw. $t = x/(y+1)$ (zumindest für $y \neq -1$) und

$$u(x,y) = u_0(t) = t = \frac{x}{y+1}, \quad x \in \mathbb{R}, y \neq -1.$$

Im Skript haben wir begründet, dass u entlang einer Charakteristik konstant ist, und die Charakteristiken sind Geraden durch x_0 mit Steigung $1/u_0(x_0)$. Dies folgt mit unserer Notation aus

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x(s,t), y(s,t)) = \frac{\partial u}{\partial s}(x(s,t), s) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} = u_x \cdot u + u_y = 0,$$

und wir sehen, dass $s \mapsto x(s,t) = su_0(t) + t$ für fixes t eine Gerade ist. Es ist daher meist leichter, die Lösung graphisch zu konstruieren, als sie über die Inversion von $(x,y) \mapsto (s,t)$ zu bestimmen.

Repetitorium 22.10.21: Distributionen

Hauptwert von $1/x$

Wir haben im Skript gesehen, dass Funktionen $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ via $\phi \mapsto \int_\Omega f\phi dx$ als eine reguläre Distribution aufgefasst werden können. Nun ist die Funktion $f(x) = 1/x$ *nicht* lokal integrierbar, so dass $f \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Können wir $1/x$ dennoch in geeigneter Weise als Distribution auffassen? Dies ist mittels des Begriffs des *Hauptwerts* möglich. Er ist definiert als

$$\langle \text{HW}(1/x), \phi \rangle := \text{HW} \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x} dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right)$$

für $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Wir zeigen, dass

$$\frac{d}{dx} \log|x| = \text{HW}(1/x) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Damit ist gemeint, dass für alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\left\langle \frac{d}{dx} \log|x|, \phi \right\rangle = \langle \text{HW}(1/x), \phi \rangle$$

erfüllt ist. Beachte, dass $\log|x| \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, also ist die distributionelle Ableitung auf der linken Seite definiert, d.h. $(\log|x|)_x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Nach der Definition der distributionellen Ableitung ergibt die rechte Seite der obigen Gleichung

$$\begin{aligned}
\langle \text{HW}(1/x), \phi \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(-x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx,
\end{aligned}$$

wobei wir $x \mapsto -x$ substituiert haben. Wir berechnen die linke Seite mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
&\langle (\log|x|)_x, \phi \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \log|x| \phi'(x) dx \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log|x| \phi'(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \log|x| \phi'(x) dx \right) \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \phi(x) dx + \log|x|\phi(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \phi(x) dx + \log|x|\phi(x) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx - \log(\varepsilon)(\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)) \right),
\end{aligned}$$

denn $\phi(x) = 0$ für hinreichend große Werte von $|x|$. Die Behauptung ist beweisen, wenn wir

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \log(\varepsilon)(\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)) = 0$$

gezeigt haben. Es gilt wegen $\varepsilon \log \varepsilon \to 0$ für $\varepsilon \to 0$, dass

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \to 0} \log(\varepsilon)(\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)) &= 2 \lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon \log \varepsilon) \frac{\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} \\ &= 2 \lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon \log \varepsilon) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} = 2 \lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon \log \varepsilon) \phi'(0) = 0.\end{aligned}$$

Temperierte Distributionen

Eine temperierte Distribution ist eine spezielle Distribution. Sie sind nützlich, um die Fourier-Transformation in der Distributionentheorie von Laurent Schwartz zu definieren. Dazu benötigen wir zunächst den Raum der *schnell fallenden Funktionen*:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \, \exists C \geq 0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| \leq C \right\}.$$

Hierbei ist $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, wenn $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Schnell fallende Funktionen und ihre Ableitungen streben im Unendlichen schneller gegen null als jedes Polynom. Die Funktion $\exp(-|x|^2)$ ist beispielsweise ein Element dieses Raums. Der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wird mittels den Halbnormen

$$p_k(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{|\alpha|, |\beta| \leq k} |x^\alpha D^\beta u(x)|$$

ein metrisierbarer lokalkonvexer Raum. Die Besonderheit dieses Raumes ist, dass die Fourier-Transformation ein Automorphismus auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wird, also eine Funktion $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wegen $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, d.h., eine temperierte Distribution ist eine Distribution.

Definition 0.3. *Eine* temperierte Distribution *ist ein lineares, stetiges Funktional auf dem Schwartzraum. Die Menge aller temperierten Distributionen wird mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.*

Die Klasse der Distributionen mit kompaktem Träger ist eine Untermenge von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere gilt $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alle Polynome, aufgefasst als reguläre Distributionen, sind temperierte Distributionen.

Ist $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, so können wir die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}(u)$ für alle $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren durch

$$(\mathcal{F}(u))(\phi) := \langle u, \mathcal{F}(\phi) \rangle.$$

Diese Definition macht Sinn, denn

$$\mathcal{F}(\phi)(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ik\cdot x} dx$$

ist ein Element aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Damit ist $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, und diese Abbildung ist sogar ein Isomorphismus.

Satz 0.4. *Die Fourier-Transformation kann zu einem Isomorphismus $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ stetig fortgesetzt werden.*

Als **Beispiel** berechnen wir die Fourier-Transformierte der Delta-Distribution:

$$(\mathcal{F}(\delta))(\phi) = \langle \delta, \mathcal{F}(\phi) \rangle = (\mathcal{F}(\phi))(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-i0\cdot x} dx = \langle 1, \phi \rangle.$$

Also ist $\mathcal{F}\delta = 1$.

Repetitorium 29.10.21: Greensche Funktion

Wir erinnern, dass eine distributionelle Lösung U_ξ von

$$L(U_\xi) = \delta_\xi \quad (L \text{ ein Differentialoperator})$$

eine *Fundamentallösung* von L mit Pol in $\xi \in \Omega$ ist. Die *Greensche Funktion* von L ist definiert durch

$$G(x,y) = U(|x-y|) - h_x(y), \quad (x,y) \in \Omega,\ x \neq y,$$

wobei $Lh_x = 0$ in Ω mit $h_x(y) = U(|x-y|)$ für $y \in \partial\Omega$. Die Greensche Funktion erfüllt

$$LG(x,\cdot) = \delta_x \quad \text{in } \Omega, \quad G(x,0) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Im Gegensatz zur Fundamentallösung löst sie also homogene Dirichlet-Randbedingungen.

Als **Beispiel** berechnen wir die Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung

$$Lu = u'' + k^2 u = 0, \quad x \in (0, \pi/(2k)), \quad u(0) = 0,\ u(\pi/(2k)) = 0,$$

wobei $k \in \mathbb{N}$. Wir müssen die folgende Gleichung lösen:

$$G''(x,y) + k^2 G(x,y) = \delta_x(y) = \delta_y(x).$$

Für $x \neq y$ verschwindet die rechte Seite, und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$G(x,y) = a_1 \cos(kx) + a_2 \sin(kx), \quad x \neq y$$

mit zwei Integrationskonstanten a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$. Da das Intervall $(0, \pi/(2k))$ durch die Bedingung $x \neq y$ in die zwei Teilintervalle $(0,y)$ und $(y, \pi/(2k))$ zerlegt wird, betrachten wir die allgemeine Lösung getrennt in diesen Intervallen. Falls $x \in (0,y)$, ergibt die Randbedingung $x = 0$:

$$0 = G(0,y) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1.$$

Falls $x \in (y, \pi/(2k))$, ergibt die andere Randbedingung $x = \pi/(2k)$:

$$0 = G(\pi/(2k), y) = c_3 \cdot 0 + c_4 \cdot 1 = c_4.$$

Daher ist

$$G(x,y) = \begin{cases} c_2 \sin(kx) & \text{für } x < y, \\ c_3 \cos(kx) & \text{für } x > y. \end{cases}$$

Es bleiben die Konstanten c_2 und c_3 zu bestimmen. Wir möchten, dass die Greensche Funktion an $x = y$ stetig ist, so dass $c_2 \sin(ky) = c_3 \cos(ky)$. Wir erhalten eine zweite

Bedingung, indem wir die Gleichung $G''(x,y) + k^2 G(x,y) = \delta_y(x)$ "integrieren" über $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$. *Symbolisch* gilt

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \delta_y(x)dx = 1.$$

(Approximiere zum Beispiel $\delta_y(x)$ durch eine Funktion, integriere und führe dann den Grenzwert durch.) Dann erhalten wir

$$1 = \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} (G''(x,y) + k^2 G(x,y))dx = \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} G''(x,y)dx + k^2 \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} G(x,y)dx.$$

Das erste Integral ergibt

$$\begin{aligned} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} G''(x,y)dx = G'(x,y)\Big|_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} &= c_3(-k\sin(k(y+\varepsilon))) - c_2(k\cos(k(y-\varepsilon))) \\ &\to c_3(-k\sin(ky)) - c_2(k\cos(ky)) \quad \text{für } \varepsilon \to 0, \end{aligned}$$

während das zweite Integral im Grenzwert verschwindet:

$$k^2 \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} G(x,y)dx = k^2(2\varepsilon) \cdot \frac{1}{2\varepsilon} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} G(x,y)dx \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0,$$

weil $1/(2\varepsilon) \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} G(x,y)dx$ im Grenzwert beschränkt bleibt. Wir erhalten die beiden Gleichungen

$$c_3(-k\sin(ky)) - c_2(k\cos(ky)) = 1, \quad c_2 \sin(ky) = c_3 \cos(ky).$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet

$$c_2 = -\frac{\cos(ky)}{k}, \quad c_3 = -\frac{\sin(ky)}{k}.$$

Die gesuchte Greensche Funktion lautet also

$$G(x,y) = \begin{cases} -\sin(kx)\cos(ky)/k & \text{für } x < y, \\ -\cos(kx)\sin(ky)/k & \text{für } x > y. \end{cases}$$

Im Grenzwert $k \to 0$ erhalten wir $\sin(kx)/k \to x$ und $\sin(ky)/k \to y$, also

$$G(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} -x & \text{für } x < y \\ -y & \text{für } x > y \end{array} \right\} = -\min\{x,y\}.$$

Dies ist die Greensche Funktion von d^2/dx^2 auf $[0,\infty)$ mit homogener Randbedingung $G(x,0) = 0$ für $x \geq 0$.

Repetitorium 05.11.21: Mittelwerteigenschaft

Wir erinnern an die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, und seien $R > 0$ und $\overline{B_R(0)} \subset \Omega$, dann gilt

$$u(x) = \frac{n}{S_n R^n} \int_{B_R(x)} u(y) dy,$$

wobei S_n die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ ist. Wir diskutieren zwei Folgerungen aus der Mittelwerteigenschaft.

Satz von Liouville

Satz 0.5 (Liouville). *Jede harmonische und beschränkte Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist konstant.*

In der Funktionentheorie gibt es ein analoges Resultat: Beschränkte und holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ sind konstant. Eine Anwendung ist ein kurzer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Beweis. Der Beweis basiert auf der Mittelwerteigenschaft. Dazu zeigen wir zuerst eine Abschätzung: Sei $u \in C^0(\overline{B_R(x)})$ harmonisch in $B_R(x) \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{n}{R} \max_{y \in \overline{B_R(x)}} |u(y)|, \quad x \in B_R(y).$$

Wir wissen aus Satz 4.8 (ii), dass $u \in C^\infty(B_R(x))$. Wir nehmen ohne Beschränkung an, dass $u \in C^\infty(\overline{B_R(x)})$. Ansonsten betrachten wir u in $\overline{B_r(x)}$ mit $r < R$, beweisen die Aussage in $\overline{B_r(x)}$ und führen dann den Grenzwert $r \to R$ durch (an dieser Stelle brauchen wir die zusätzliche Bedingung $u \in C^0(\overline{B_R(x)})$). Wegen $0 = \partial_{x_i} \Delta u = \Delta(\partial_{x_i} u)$ ist auch $\partial_{x_i} u$ harmonisch, und wir schließen aus der Mittelwerteigenschaft und dem Divergenzsatz, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{n}{S_n R^n} \int_{B_R(x)} \frac{\partial u}{\partial x_i} dy = \frac{n}{S_n R^n} \int_{\partial B_R(x)} u \nu_i ds,$$

wobei ν_i die $i$te Komponente des äußeren Normaleneinheitsvektors an $\partial\Omega$ ist. Daraus folgt

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leq \frac{n}{S_n R^n} \int_{\partial B_R(x)} |u| ds \leq \frac{n}{S_n R^n} \max_{y \in \partial B_R(x)} |u(y)| \cdot S_n R^{n-1} \leq \frac{n}{R} \max_{y \in \overline{B_R(x)}} |u(y)|,$$

was die Abschätzung beweist.

Ist u nun beschränkt in $\mathbb{R}^n$, $|u(x)| \leq M$ für $x \in \mathbb{R}^n$, so folgt für alle $r > 0$:

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{n}{R} \max_{y \in \overline{B_R(x)}} |u(y)| \leq \frac{n}{R} M \to 0 \quad \text{für } R \to \infty.$$

Also ist u konstant in $\mathbb{R}^n$.

Harnack-Ungleichung

Die Harnack-Ungleichung stellt einen Zusammenhang zwischen dem maximalen und dem minimalen Wert einer positiven harmonischen Funktion her.

Satz 0.6. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, u harmonisch und positiv in Ω und $\omega \subset \Omega$ offen und zusammenhängend. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, die von Ω und ω, aber nicht von u abhängt, so dass*

$$\sup_{x \in \omega} u(x) \leq C \inf_{x \in \omega} u(x).$$

Beweis. Wir beweisen den Satz nur für den Fall $\Omega = B_R(x_0)$ und $\omega = B_{R/2}(x_0)$ als Anwendung der Mittelwerteigenschaft. Der allgemeine Beweis verwendet den Überdeckungssatz von Heine-Borel.

Wir zeigen zunächst eine Abschätzung ähnlich wie im vorherigen Beweis. Sei u wie im Theorem. Dann folgt aus der Mittelwerteigenschaft für $x \in B_{R/2}(x_0)$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leq \frac{n}{S_n (R/2)^n} \int_{\partial B_{R/2}(x)} |u| ds = \frac{n}{S_n (R/2)^n} \int_{\partial B_{R/2}(x)} u ds = \frac{2n}{R} u(x)$$

oder $|\nabla \log u(x)| \leq 2n/R$. Wir erhalten mit $x, y \in B_{R/2}(x_0)$:

$$\log \frac{u(x)}{u(y)} = \int_0^t \frac{d}{d\tau} \log u(\tau x + (1-\tau)y) d\tau = (x - y) \cdot \int_0^t \nabla \log u(\tau x + (1-\tau)y) d\tau.$$

Wegen $\tau x + (1-\tau)y \in B_{R/2}(x_0)$ für alle $\tau \in [0,1]$ und $|x - y| \leq R$ folgt

$$\left| \log \frac{u(x)}{u(y)} \right| \leq |x - y| \int_0^t |\nabla \log u(\tau x + (1-\tau)y)| d\tau \leq \frac{2n}{R} |x - y| \leq 2n,$$

also $u(x) \leq e^{2n} u(y)$. Wir betrachten das Supremum über alle $x \in B_{R/2}(x_0)$ und das Infimum über $y \in B_{R/2}(x_0)$, um den Beweis zu vervollständigen.

Repetitorium 15.11.21: Sobolevräume

Der Raum $H^k(\Omega)$

Wir erinnern, dass der Sobolevraum $H^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ definiert ist durch

$$H^k(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \forall |\alpha| \leq k,\ D^\alpha u \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Beispiel: $u(x) = 1/|x|$ für $x \in B_1(0) \setminus \{0\}$ und $n \geq 2$. Wir verwenden sphärische Koordinaten (r, ω) mit $r \geq 0$ und $\omega = x/r \in \partial B_1(0)$:

$$\int_{B_1(0)} |u(x)|^2 dx = \int_{\partial B_1(0)} \int_0^1 \left(\frac{1}{r} \right)^2 r^{n-1} dr d\omega = \operatorname{meas}(\partial B_1(0)) \int_0^1 r^{n-3} dr.$$

Dieses Integral ist nur dann nicht divergent, wenn $n \geq 3$. Unter dieser Bedingung ist $u \in L^2(B_1(0))$. Ferner gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{|x|^2} \frac{\partial}{\partial x_i} |x| = -\frac{1}{|x|^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = -\frac{1}{|x|^2} \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = -\frac{x_i}{|x|^3},$$

also $\nabla u(x) = -x/|x|^3$, und wir erhalten

$$\int_{B_1(0)} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{\partial B_1(0)} \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2} \right)^2 r^{n-1} dr d\omega = \operatorname{meas}(\partial B_1(0)) \int_0^1 r^{n-5} dr < \infty,$$

wenn $n \geq 5$. Wir schließen, dass $u \in H^1(B_1(0))$ genau dann, wenn $n \geq 5$.

Können wir H^k- und C^k-Funktionen miteinander in Verbindung bringen? Antwort: Nur bedingt, denn

- Sei $u \in C^1(-1, 1)$. Gilt $u \in H^1(-1, 1)$? Nein, im Allgemeinen nicht, denn u muss in der Nähe von $x = \pm 1$ nicht einmal integrierbar sein.
- Sei $u \in H^1(-1, 1)$. Gilt $u \in C^1(-1, 1)$? Nein, im Allgemeinen nicht. Ein Gegenbeispiel ist die Funktion $u(x) = |x|$. Allerdings gilt immer (aber nur im Eindimensionalen!), dass $u \in C^0([-1, 1])$.
- Die letzte Aussage kann verallgemeinert werden: Nach dem Einbettungssatz von Sobolev hat jede Funktion aus $H^k(\Omega)$ mit $k > m - n/2$ einen Repräsentanten (den wir wieder mit u bezeichnen), so dass $u \in C^m(\overline{\Omega})$. Damit also $u \in C^0(\overline{\Omega})$ ist, muss zumindest $k > n/2$ gelten. Wenn $k = 1$, ist dies nur für $n = 1$ möglich.

Ungleichungen mit Sobolevfunktionen

Wir wissen, dass Funktionen u aus $H^k(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$ liegen, sofern $k > n/2$. Sind Funktionen aus $H^k(\Omega)$ auch aus $L^p(\Omega)$ für gewisse $p > 2$, wenn $k > n/2$ nicht erfüllt ist? Dies ist tatsächlich der Fall und führt auf die *Sobolev-Ungleichungen*. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $n > 2$. Dann existiert $C > 0$, so dass für $u \in H^1(\Omega)$ (ohne Beweis)

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \text{wenn } p \le \frac{2n}{n-2}.$$

Wenn $n = 2$, so gilt diese Ungleichung für alle $p < \infty$, und im Fall $n = 1$ gilt sie sogar für $p \le \infty$.

Diese Ungleichung kann man verschärfen. Unter den obigen Voraussetzungen existiert $C > 0$, so dass für alle $u \in H^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C\|u\|^{\theta}_{H^1(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^2(\Omega)},$$

wobei $p \le 2n/(n-2)$ (falls $n > 2$) und $\theta = n/2 - n/p$. Diese Ungleichung ist ein Beispiel aus der Klasse der *Gagliardo-Nirenberg-Ungleichungen*.

Der Sobolevraum $H^{-1}(\Omega)$

Aus welchen Funktionen besteht der Raum $H^{-1}(\Omega)$, definiert durch die Menge aller linearen und stetigen Abbildungen von $H^1_0(\Omega)$ nach $\mathbb{R}$ und versehen mit der Norm

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\phi\|_{H^1_0(\Omega)}=1} |\langle u, \phi\rangle| \ ?$$

Er enthält alle $L^2(\Omega)$-Funktionen, denn ist $u \in L^2(\Omega)$, so folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\phi\|_{H^1_0(\Omega)}=1} \left|\int_\Omega u\phi dx\right| \le \sup_{\|\phi\|_{H^1_0(\Omega)}=1} \|u\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

Wir behaupten, dass $H^{-1}(\Omega)$ alle Funktionen $u = \partial v/\partial x_i$ mit $v \in L^2(\Omega)$ enthält:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|\phi\|_{H^1_0(\Omega)}=1} \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \phi dx \right\rangle = - \sup_{\|\phi\|_{H^1_0(\Omega)}=1} \left\langle v, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \sup_{\|\phi\|_{H^1_0(\Omega)}=1} \left| -\int_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \right| \le \sup_{\|\phi\|_{H^1_0(\Omega)}=1} \|v\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \|v\|_{L^2(\Omega)} < \infty.
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: *Der Raum $H^{-1}(\Omega)$ enthält alle Ableitungen von $L^2(\Omega)$-Funktionen.*

Beispiel: Sei $u(x) = 0$ für $x \in (-1,0)$ und $u(x) = 1$ für $x \in (0,1)$. Dann ist klarerweise $u \in L^2(-1,1)$. Außerdem gilt $u' = \delta_0$, denn

$$\langle u', \phi \rangle = -\langle u, \phi' \rangle = -\int_0^1 1 \cdot \phi'(x) dx = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle$$

für $\phi \in \mathcal{D}(-1,1)$ (was $\phi(1) = 0$ impliziert). Wir schließen, dass $\delta_0 \in H^{-1}(-1,1)$, was wir bereits in Beispiel 5.13 im Skript mit einem anderen Beweis gezeigt haben.

Repetitorium 19.11.21: Robin-Randbedingungen

Wir betrachten das elliptische Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \nabla u \cdot \nu + \alpha u = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ und $\alpha > 0$ seien. Wir erhalten die schwache Formulierung, indem wir diese Gleichung mit einer Testfunktion $v \in H^1(\Omega)$ multiplizieren, über Ω integrieren und partiell integrieren:

$$\int_\Omega fv dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \nu) v ds = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} (g - \alpha u) v dx.$$

Wir definieren daher

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx + \alpha \int_{\partial\Omega} uv dx, \\ F(v) &= \int_\Omega fv dx + \int_{\partial\Omega} gv ds. \end{aligned}$$

Um das Lemma von Lax-Milgram anwenden zu können, benötigen wir ein Hilfsresultat.

Lemma 0.7 (Verallgemeinerte Poincaré-Ungleichung). *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$, und sei p eine stetige Halbnorm auf $H^1(\Omega)$, so dass $p(c) = 0$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ impliziert $c = 0$. Dann existiert $C_P > 0$, so dass für alle $u \in H^1(\Omega)$:*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_P(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + p(u)).$$

Das Lemma ist im Buch von R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics* erwähnt (Kapitel 2, Abschnitt 1.4). Die Norm $p(u) = \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}$ ist zulässig.

Wir behaupten nun, dass das Problem

$$a(u,v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega)$$

eine eindeutige schwache Lösung besitzt. Nach dem Spursatz (Satz 5.6 im Skript) sind a und F stetig:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \alpha \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \alpha C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \\ |F(v)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C(f,g) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Wir benötigen die verallgemeinerte Poincaré-Ungleichung, um die Koerzivität von a zu zeigen:

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq \min\{1,\alpha\}\big(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\big) \\ &\geq \min\{1,\alpha\}C_P^{-2}\|u\|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Lax-Milgram existiert also eine eindeutige schwache Lösung von

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \nabla u \cdot \nu + \alpha u = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

Die Voraussetzung $\alpha > 0$ ist notwendig. Falls $\alpha = 0$, verlieren wir die **Eindeutigkeit** (mit u ist auch $u + c$, $c \in \mathbb{R}$, eine schwache Lösung). Falls $\alpha < 0$, können wir die Eindeutigkeit nicht immer garantieren. Gegenbeispiel: Seien $\Omega = (0,1)$, $f = g = 0$. Die allgemeine Lösung von $u'' = 0$ lautet $u(x) = c_1 + c_2 x$. Aus den Randbedingungen $-u'(0) + \alpha u(0) = 0$ und $u'(1) + \alpha u(1) = 0$ folgt

$$-c_2 + \alpha c_1 = 0, \quad c_2 + \alpha(c_1 + c_2) = 0.$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich null ist:

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ \alpha & \alpha+1 \end{pmatrix} = \alpha(\alpha+2).$$

Im Falle $\alpha = -2$ gibt es also unendlich viele Lösungen.

Wir können die Eindeutigkeit allerdings erreichen, wenn wir den Lösungsraum ändern zu

$$H = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u dx = 0 \right\},$$

da wir durch die Festlegung des Integrals von u die Konstante festlegen können. Die Koerzivität von a folgt weiterhin aus der verallgemeinerten Poincaré-Ungleichung, aber diesmal mit $p(u) = \int_\Omega u dx$:

$$a(u,u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C_P^{-2}\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad u \in H.$$

Repetitorium 26.11.21: Eigenwertprobleme

Operatoren L und K

Wir erinnern an die Definition des Operators $L : D(L) \to L^2(\Omega)$:

$$Lu = -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + c(x)u, \quad u \in D(L) \subset H_0^1(\Omega),$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $A = (A_{ij}) \in L^\infty(\Omega)$ symmetrisch und gleichmäßig positiv definit und $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c \geq 0$ in Ω seien. Wir nennen

$$Lu = \lambda u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ein (reelles) *Eigenwertproblem*.

Beispiel: $Lu = -u''$ in $\Omega = (0, \pi)$. Sei zuerst $\lambda > 0$. Die Lösung von

$$-u'' = \lambda u, \quad x \in (0, \pi), \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

lautet

$$u(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x), \quad x \in (0, 1).$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$0 = u(0) = c_2, \quad 0 = u(\pi) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\pi),$$

also muss $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$ gelten, da ansonsten $c_1 = 0$ und damit $u = 0$ folgen würde. Wir setzen $\lambda := k^2$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Wenn $\lambda = 0$, so ist die allgemeine Lösung eine Gerade, allerdings ist $u = 0$ unter Berücksichtigung der Randbedingungen. Im Falle $\lambda < 0$ ist die allgemeine Lösung eine Linearkombination von Exponentialfunktionen, die die Randbedingungen nur für $u = 0$ erfüllen können. Wir schließen, dass das Eigenwertproblem die Eigenwerte $\lambda = k^2$ mit $k \in \mathbb{N}$ und zugehörigen Eigenfunktionen $u_k(x) = \sin(kx)$ besitzt.

Der Operator L ist definiert auf $D(L)$ mit Wertebereich in $H := L^2(\Omega)$. Der Definitionsbereich $D(L)$ bleibt i.A. abstrakt, aber wir wissen, dass

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset D(L) \subset H_0^1(\Omega),$$

und im Falle glatter Daten gilt sogar $D(L) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (siehe Lemma 6.14 im Skript). Wir haben im Skript den Operator $K : H \to D(L) \subset H_0^1(\Omega)$ als Inverse von L definiert, aber dann mit dem Operator $K : H \to H$ gearbeitet. Der Unterschied ist, dass $K : H \to D(L)$ invertierbar ist, $K : H \to H$ aber nicht unbedingt invertierbar sein muss. Immerhin ist $K : H \to H$ injektiv.

Haben wir die Gleichung $Lu = f$, so ist $Kf = u$, d.h., K können wir als einen Lösungsoperator sehen: Er weist der rechten Seite f die eindeutige Lösung u zu. Nach Satz 5.20 gilt $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$, was wir schreiben können als

$$\|Kf\|_H \leq \|Kf\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_H.$$

Der Operator $K : H \to H$ ist also stetig. Im Skript haben wir im Beweis von Lemma 6.14 sogar gezeigt, dass $K : H \to H$ kompakt ist. Beachte, dass $K : H \to D(L) \subset H_0^1(\Omega)$ zwar stetig, aber i.A. nicht kompakt ist. Die beiden Operatoren $K : H \to D(L)$ und $K : H \to H$ haben also dieselbe Ausführungsvorschrift (nämlich als Lösungsoperator), aber verschiedene Eigenschaften. Sie handelt sich also um verschiedene Operatoren.

Fredholm-Alternative für kompakte Operatoren

Wir verwenden nun die folgende Version der **Fredholm-Alternative** (siehe das Buch von Evans, *Partial Differential Equations*, Abschnitt D.5, Theorem 5 für einen Beweis):

Satz 0.8 (Fredholm-Alternative für kompakte Operatoren). *Seien H ein Hilbertraum und $K : H \to H$ ein linearer kompakter Operator. Dann gilt*

$$N(I - K) = \{0\} \quad \text{genau dann, wenn} \quad R(I - K) = H.$$

Der Satz sagt aus, dass der Operator $I - K$ genau dann injektiv ist, wenn er surjektiv ist: Entweder existiert für alle $f \in H$ ein $u \in H$ mit $(I - K)u = f$ oder $(I - K)u = 0$ impliziert $u = 0$. Mit Hilfe dieses Satzes wollen wir zeigen:

Proposition 0.9. *Sei $Lu = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u$ (Voraussetzungen wie in Satz 5.20 im Skript), wobei wir nur $c \geq 0$ fordern. Es gilt entweder: Für alle $f \in L^2(\Omega)$ existiert (genau ein) $u \in H_0^1(\Omega)$ von*

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

oder es existiert eine nichttriviale Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von

$$Lu = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Beweis. Für alle $\gamma > 0$ ist $c(x) + \gamma \geq \gamma > 0$ in Ω und damit Satz 5.20 anwendbar: Es existiert eine eindeutige Lösung $u_\gamma \in H_0^1(\Omega)$ von $(L + \gamma)u_\gamma = f$ in Ω und

$$\|(L + \gamma)^{-1} f\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u_\gamma\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Der Beweis von Lemma 6.14 zeigt, dass $(L + \gamma)^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt ist (denn $(L + \gamma)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ ist stetig und $H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist kompakt nach dem Satz von Rellich-Kondrachov). Dann ist der Operator $K := \gamma(L+\gamma)^{-1}$ ebenfalls kompakt auf $L^2(\Omega)$, und es gilt:

$$Lu = f \quad \Leftrightarrow \gamma^{-1}(L+\gamma)u = \gamma^{-1}(f+\gamma u) \quad \Leftrightarrow \quad u = K(\gamma^{-1}(f+\gamma u)) = \gamma^{-1}Kf + Ku.$$

Setzen wir $h := \gamma^{-1}Kf$, so ist $Lu = f$ äquivalent zu $(I-K)u = h$. Nach der Fredholm-Alternative für kompakte Operatoren ist also entweder $(I-K)u = h$ für alle $h \in L^2(\Omega)$ lösbar oder $(I-K)u = 0$ impliziert $u = 0$. Dies ist gerade die Aussage der Proposition.

Repetitorium 03.12.21: Parabolische Probleme und Halbgruppen

Wir betrachten

$$u_t + Lu = f(t) \quad \text{in } \Omega, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei $Lu = -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + c(x)u$ die Voraussetzungen von Abschnitt 6.3 im Skript erfülle. Wir haben die Lösung geschrieben als

$$u(t) = e^{-Lt}u_0 + \int_0^t e^{-L(t-s)} f(s)ds, \quad \text{wobei } e^{-Lt}u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}(u_0, v_k)_{L^2} v_k,$$

und (λ_k, v_k) sind die Eigenwert-Eigenfunktion-Paare des Operators L. Die Eigenwerte erfüllen $0 < \lambda_k \to \infty$ für $k \to \infty$, und (v_k) bildet ein vollständiges Orthonormalsystem. Die Notation e^{-Lt} ist nicht zufällig, denn es gilt

$$e^{-Lt}u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} L^k(u), \quad u \in L^2(\Omega),$$

weil aus $L^k u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^k (u, v_j)_{L^2} v_j$ (siehe im Wesentlichen Lemma 6.15 im Skript) folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!}\lambda_j^k (u, v_j)_{L^2} v_j = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_j t)^k}{k!}(u, v_j)_{L^2} v_j = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t}(u, v_j)_{L^2} v_j = e^{-Lt}u.$$

(Die Vertauschung der beiden Summen wird mit gleichmäßiger Konvergenz begründet.)

Der Operator $T(t) := e^{-Lt} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kann im Rahmen der **Halbgruppentheorie** untersucht werden.

Definition 0.10. *Seien X ein Banachraum und $T(t) : X \to X$ für $t \geq 0$ eine Familie linearer stetiger Operatoren. Wir nennen $T(t)$ eine* Halbgruppe *(linearer beschränkter Operatoren), wenn*

$$T(0) = 0, \quad T(t+s) = T(s)T(t) \quad \text{für alle } s, t \geq 0.$$

Sie heißt gleichmäßig stetig, *wenn*

$$\lim_{t \to 0+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Die Operatoren $T(t) = e^{-Lt}$ sind eine Halbgruppe, wie man anhand der Eigenwertentwicklung direkt sieht. Für die gleichmäßige Stetigkeit schätzen wir ab:

$$\|T(t) - I\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} L^k \right\| = \left\| tL \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{(-t)^k}{k!} L^k \right\| \leq t\|L\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} \|L\|^k \leq t\|L\| e^{t\|L\|} \to 0$$

für $t \to 0+$. Der Operator $T(\cdot) : [0, \infty) \to L(X)$ hat als Wertebereich den Raum aller linearer stetiger Operatoren $L(X)$ (mit der Operatornorm), der eine Banachalgebra ist.

Haben wir nur die Halbgruppe $T(t)$ gegeben, so können wir den Operator L mittels

$$-Lu = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}(T(t)u - u) \quad \text{für } u \in D(L)$$

rekonstruieren, wobei

$$D(L) = \left\{ u \in X : \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}(T(t)u - u) \text{ existiert} \right\}.$$

Wir nennen den so definierten linearen Operator $L : D(L) \to X$ den *infinitesimalen Generator* der Halbgruppe $T(t)$. Es gilt folgendes Resultat.

Satz 0.11. *Ein linearer Operator $L : D(L) \to X$ ist der infinitesimale Generator einer gleichmäßig beschränkten Halbgruppe $T(t)$, $t \geq 0$, genau dann, wenn $L : X \to X$ ein linearer stetiger Operator ist. Insbesondere gilt $D(L) = X$.*

Beweis. Wir skizzieren den Beweis nur. Ist $L : X \to X$ ein linearer stetiger Operator, so definieren wir $T(t) = e^{-Lt}$. Dies ist eine gleichmäßig stetige Halbgruppe und

$$\left\| \frac{T(t) - I}{t} - L \right\| = \left\| tL^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{(k+2)!} L^k \right\| \leq t\|L\|^2 e^{-t\|L\|} \to 0 \quad \text{für } t \to 0+,$$

d.h., L ist ein infinitesimaler Generator von $T(t)$. Ist umgekehrt $T(t)$ eine gleichmäßig stetige Halbgruppe, so können wir

$$-Lu = \lim_{t \to 0+} \frac{1}{t}(T(t)u - u), \quad u \in D(L),$$

definieren. Man kann zeigen, dass dieser Grenzwert für alle $u \in X$ existiert, was $D(L) = X$ beweist.

Die obige Definition sagt noch nichts über den Anfangswert des Problems $u_t + Lu = 0$ aus. Wir definieren daher:

Definition 0.12. *Eine Halbgruppe $T(t)$, $t \geq 0$, linearer stetiger Operatoren heißt* stark stetig *genau dann, wenn $\lim_{t \to 0+} T(t)u = u$ für alle $u \in X$. Eine stark stetige Halbgruppe linearer stetiger Operatoren nennen wir auch eine* C^0-Halbgruppe.

C^0-Halbgruppen $T(t)$ haben die interessante Eigenschaft, dass sie in der Operatorname wie folgt abgeschätzt werden können (ohne Beweis): Es existieren $\omega \geq 0$ und $M \geq 1$, so dass

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Solche Halbgruppen haben die Eigenschaft, dass $t \mapsto T(t)u$ für $t \geq 0$ stetig ist. Der Beweis ist einfach: Sei $h > 0$. Dann ist für $h \to 0$

$$\|T(t+h)u - T(t)u\| \leq \|T(t)\| \, \|T(h)u - u\| \leq Me^{\omega t}\|T(h)u - u\| \to 0$$

und ähnlich für $h < 0$. Diese Aussage bedeutet, dass die Lösung homogener parabolischer Probleme $u(t) = e^{-Lt}u_0 = T(t)u_0$ eine stetige Funktion mit Werten in $L^2(\Omega)$ ist, also $u \in C^0([0,\infty); L^2(\Omega))$. Dies haben wir mit anderen Mitteln in Satz 6.13 bewiesen.

Der Vorteil der Halbgruppentheorie ist, dass sehr allgemeine parabolische Probleme gelöst werden können (ohne Eigenwertentwicklung) und dass der Ansatz maximale Regularität der Lösung liefert.

Repetitorium 10.12.21: Parabolische Gleichungen

Viskose Burgers-Gleichung

Wir untersuchen die viskose Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\varepsilon > 0$. Im Falle $\varepsilon = 0$ erhalten wir die Burgers-Gleichung, die wir in Kapitel 2 im Skript bereits untersucht haben. Sie wird durch den Diffusionsterm mit $\varepsilon > 0$ regularisiert. Die Besonderheit dieser Gleichung ist, dass sie mittels der Cole-Hopf-Transformation in die lineare Wärmeleitungsgleichung transformiert werden kann. Dazu definieren wir eine Funktion ψ mit $u = \psi_x$, so dass wegen $uu_x = \frac{1}{2}(u^2)_x$:

$$\psi_{xt} + \frac{1}{2}[(\psi_x)^2]_x = \varepsilon\psi_{xxx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir integrieren diese Gleichung und nehmen an, dass die Integrationskonstante verschwindet (etwa weil die Lösung und ihre Ableitungen im Unendlichen verschwinden):

$$\psi_t + \frac{1}{2}(\psi_x)^2 = \varepsilon\psi_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Schließlich definieren wir eine Funktion ϕ über $\psi = -2\varepsilon \log \phi$. Wegen

$$\psi_{xx} = -2\varepsilon\left(\frac{\phi_x}{\phi}\right)_x = -2\varepsilon\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi} - \frac{\phi_x^2}{\phi^2}\right), \quad \psi_t = -2\varepsilon\frac{\phi_t}{\phi}$$

erhalten wir

$$0 = \psi_t + \frac{1}{2}\psi_x^2 - \varepsilon\psi_{xx} = -2\varepsilon\frac{\phi_t}{\phi} + 2\varepsilon^2\left(\frac{\phi_x}{\phi}\right)^2 + 2\varepsilon^2\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi} - \frac{\phi_x^2}{\phi^2}\right) = -\frac{2\varepsilon}{\phi}(\phi_t - \varepsilon\phi_{xx}).$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn ϕ die Wärmeleitungsgleichung $\phi_t = \varepsilon\phi_{xx}$ löst.

Wir fassen zusammen: Ist ϕ die Lösung von $\phi_t = \varepsilon\phi_{xx}$ in $\mathbb{R}$, so löst $u := -2\varepsilon(\log\phi)_x = -2\varepsilon\phi_x/\phi$ die viskose Burgers-Gleichung. Laut Proposition 6.6 im Skript lautet die Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/(4\varepsilon t)}\phi_0(y)dy, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

wobei $u_0 = -2\varepsilon(\log\phi_0)_x$ oder, nach ϕ_0 aufgelöst,

$$\phi_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x u_0(z)dz\right).$$

Setzen wir

$$G(y;x,t) := \int_0^y u_0(z)dz + \frac{(x-y)^2}{2t} = -2\varepsilon \log \phi_0(y) + \frac{(x-y)^2}{2t},$$

so folgt

$$e^{-G(y;x,t)/(2\varepsilon)} = \phi_0(y)e^{-(x-y)^2/(4\varepsilon t)}, \quad \text{also} \quad \phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-G(y;x,t)/(2\varepsilon)}dy,$$

so dass

$$u(x,t) = -2\varepsilon\frac{\phi_x}{\phi} = \frac{\int_{\mathbb{R}}(x-y)t^{-1}\exp(-G(y;x,t)/(2\varepsilon))dy}{\int_{\mathbb{R}}\exp(-G(y;x,t)/(2\varepsilon))dy}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Dies ist die Lösung der viskosen Burgers-Gleichung.

Es ist möglich, den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ zu untersuchen; siehe Kapitel 4.2 im Buch von Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*.

Maximumprinzip

Wir können mit Hilfe des schwachen Maximumprinzips die Eindeutigkeit von Lösungen parabolischer Gleichungen vom Typ

$$u_t + Lu = f \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

beweisen. Es gelten die Voraussetzungen von Kapitel 6.6 im Skript, insbesondere sei $Lu = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u$ mit $c \geq 0$. Zusätzlich sei $g \in C^0(\partial\Omega)$. Wir erinnern, dass $G = \Omega \times (0,T)$ (Raum-Zeit-Zylinder) und $\Gamma = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T))$ (parabolischer Rand = Mantel und Boden des Zylinders).

Satz 0.13. *Das obige parabolische Problem besitzt höchstens eine Lösung* $u \in C_1^2(G) \cap C^0(\overline{G})$.

Beweis. Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen des parabolischen Problems. Dann löst $v := u_1 - u_2$

$$v_t + Lv = 0 \quad \text{in } \Omega,\ t > 0, \quad v(0) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Aus Satz 6.31 im Skript (Schwaches Maximumprinzip) folgt

$$\sup_{(x,t)\in G} v(x,t) \leq \max\Big\{0, \sup_{(x,t)\in\Gamma} v(x,t)\Big\} = 0, \quad \inf_{(x,t)\in G} v(x,t) \geq \min\Big\{0, \inf_{(x,t)\in\Gamma} v(x,t)\Big\} = 0$$

und damit

$$0 \leq \inf_{(x,t)\in G} v(x,t) \leq \sup_{(x,t)\in G} v(x,t) \leq 0,$$

also $v(x,t) = 0$ und $u_1 = u_2$ in G.

Repetitorium 17.01.21: Telegrafengleichung

Wir untersuchen die Telegrafengleichung

$$u_{tt} + \alpha u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

die eine Wellengleichung mit einem *dissipativen* Term αu_t ist. Sie kann aus den Maxwell-Gleichungen

$$\text{(i) } \operatorname{div} E = \rho/\varepsilon_0, \quad \text{(ii) } \operatorname{div} B = 0, \quad \text{(iii) } \operatorname{rot} E = -B_t, \quad \text{(iv) } \operatorname{rot} B = \mu J + \mu_0\varepsilon_0 E_t$$

hergeleitet werden, wenn $J = \sigma E$ (dies ist im Wesentlichen das Ohmsche Gesetz). Hierbei sind E bzw. B das elektrische bzw. magnetische Feld, ρ ist die Ladungsdichte, J die Stromdichte und ε_0, μ_0 sind physikalische Konstanten. Wir rechnen

$$\begin{aligned} -\operatorname{rot} B_t &\overset{\text{(iii)}}{=} \operatorname{rot}\operatorname{rot} E = \nabla(\operatorname{div} E) - \Delta E \overset{\text{(i)}}{=} \nabla\rho/\varepsilon_0 - \Delta E, \\ (\operatorname{rot} B)_t &\overset{\text{(iv)}}{=} \mu\sigma E_t + \mu_0\varepsilon_0 E_{tt}. \end{aligned}$$

Wir addieren beide Gleichungen:

$$E_{tt} + \frac{\mu\sigma}{\mu_0\varepsilon_0} E_t - \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\Delta E + \frac{\nabla\rho}{\mu_0\varepsilon_0^2} = 0.$$

Für geeignet gewählte Konstanten und $\rho = \text{const.}$ entspricht dies der Telegrafengleichung.

Wir haben behauptet, dass der Term αu_t dissipativ ist, also wie ein Reibungsterm wirkt. Um dies einzusehen, formulieren wir die Gleichung als ein System erster Ordnung mit $v := u_t$,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - \alpha v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =: D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

und betrachten diese Gleichung auf dem Raum $X := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla w + vz)dx.$$

Wir erhalten mit partieller Integration (beachte, dass $u \in H_0^1(\Omega)$)

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle &= \int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla v + v(\Delta u - \alpha v)\big)dx \\ &= \int_\Omega \big(\nabla u \cdot \nabla v - \nabla v \cdot \nabla u - \alpha v^2\big)dx = -\alpha \int_\Omega v^2 dx \le 0. \end{aligned}$$

In diesem Sinne ist das System dissipativ. Es geht allerdings noch besser. Dazu definieren wir $v := u_t + \mu u$ für ein $\mu > 0$. Dann ist

$$v_t = u_{tt} + \mu u_t = \Delta u - \alpha u_t + \mu u_t = \Delta u + (\mu - \alpha)(v - \mu u),$$

und wir erhalten das System erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ \Delta - \mu(\mu - \alpha) & \mu - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =: C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mu u + v \\ \Delta u - \mu(\mu - \alpha)u + (\mu - \alpha)v \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla(-\mu u + v) + v(\Delta u - \mu(\mu - \alpha)u + (\mu - \alpha)v)dx \\
&= \int_\Omega \big(-\mu|\nabla u|^2 - \mu(\mu - \alpha)uv + (\mu - \alpha)v^2\big)dx.
\end{aligned}$$

Wir teilen den ersten Term auf in zwei gleich große Teile und verwenden die Poincaré-Ungleichung $\int_\Omega u^2 dx \le C_P^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \le -\int_\Omega \left(\frac{\mu}{2}|\nabla u|^2 + \frac{\mu}{2C_P^2}u^2 - \mu(\alpha - \mu)uv + (\alpha - \mu)v^2 \right) dx.$$

Die letzten drei Summanden bilden eine quadratische Form in (u, v), die genau dann positiv definit ist, wenn

$$4\frac{\mu}{2C_P^2}(\alpha - \mu) - \mu^2(\alpha - \mu)^2 > 0.$$

Für $0 < \mu < \alpha$ ist dies äquivalent zu $2/C_P^2 + \mu^2 - \mu\alpha > 0$. Diese Ungleichung kann für hinreichend kleines $\mu \in (0, \alpha)$ erfüllt werden. In diesem Fall existiert ein $\kappa > 0$, so dass

$$\frac{\mu}{2C_P^2}u^2 + \mu(\alpha - \mu)uv + (\alpha - \mu)v^2 \ge \kappa(u^2 + v^2) \ge \kappa v^2.$$

Dies impliziert

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \le -\min\left\{\frac{\mu}{2}, \kappa\right\} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + v^2)dx = -\min\left\{\frac{\mu}{2}, \kappa\right\} \left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|^2.$$

Diese Abschätzung zeigt, dass die Telegrafengleichung exponentiell schnell gegen null abklingt. Multiplizieren wir nämlich die Gleichung $(u, v)_t^T = C(u, v)^T$ mit (u, v) und setzen $U = (u, v)^T$, so folgt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2 = \langle U_t, U\rangle = \langle U, CU\rangle \le -\min\left\{\frac{\mu}{2}, \kappa\right\}\|U\|^2.$$

Mit Gronwalls Lemma ergibt sich schließlich

$$\|U(t)\|^2 \leq \|U(0)\|^2 e^{-\min\{\mu, 2\kappa\} t}, \quad t > 0,$$

wobei wir $0 < \mu < \min\{2/C_P^2, \alpha\}$ gewählt haben. In diesem Sinne ist die Telegrafengleichung dissipativ.