

# Mathematik für ChemikerInnen II

Prof. Dr. Ansgar Jüngel

Institut für Mathematik

Johannes Gutenberg-Universität Mainz

August 2005

*unkorrigiertes Vorlesungsskript*

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Fourier-Reihen</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Eigenwerte</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>24</b>
3.1	Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	24
3.2	Systeme linearer Differentialgleichungen . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Differentiation im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>48</b>
4.1	Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	48
4.2	Partielle Ableitungen . . . . .	57
4.3	Minima und Maxima . . . . .	64
4.4	Vektoranalysis . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Integration im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>79</b>
5.1	Kurvenintegrale . . . . .	79
5.2	Mehrfachintegrale . . . . .	88
5.3	Oberflächenintegrale . . . . .	99

## 5 Integration im $\mathbb{R}^n$

### 5.1 Kurvenintegrale

Ziel dieses Abschnittes ist es, Integrale über Kurven  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  der Form

$$\int_{\Gamma} f(x) dx$$

zu definieren. Wir beginnen mit einigen Definitionen.

**Definition 5.1** (1) Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion. Der Bildbereich von  $\gamma$

$$\Gamma = \{(\gamma(t) : t \in [a, b])\} \subset \mathbb{R}^n$$

heißt *Kurve im  $\mathbb{R}^n$* . Die Funktion  $\gamma$  nennen wir die *Parametrisierung von  $\Gamma$* . Manchmal identifizieren wir  $\gamma$  mit  $\Gamma$  und nennen  $\gamma$  eine *Kurve*.

(2) Eine Kurve  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  mit Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *geschlossen genau dann*, wenn  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

(3) Eine Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Kurve  $\Gamma$  heißt *glatt genau dann*, wenn  $\gamma$  stetig differenzierbar ist und  $\gamma'(t) \neq 0$  für alle (bis auf endlich viele Ausnahmen)  $t \in [a, b]$  gilt.

**Beispiel 5.2** (1) Die Kurve  $\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definiert durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, a],$$

stellt eine Spirale mit Radius  $R$  dar (siehe Abbildung 5.1 links). Der Vektor

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

gibt die Geschwindigkeit mit Betrag  $|\gamma'(t)| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t + 1} = \sqrt{R^2 + 1}$  an.

(2) Die Kurve  $\gamma : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, \cosh t)^\top$ , stellt die sogenannte Kettenlinie dar, d.h. eine an den Seiten aufgehängte durchhängende Kette (siehe Abbildung 5.1 rechts). Allgemein wird der Graph einer Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  parametrisiert durch

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}. \quad \square$$

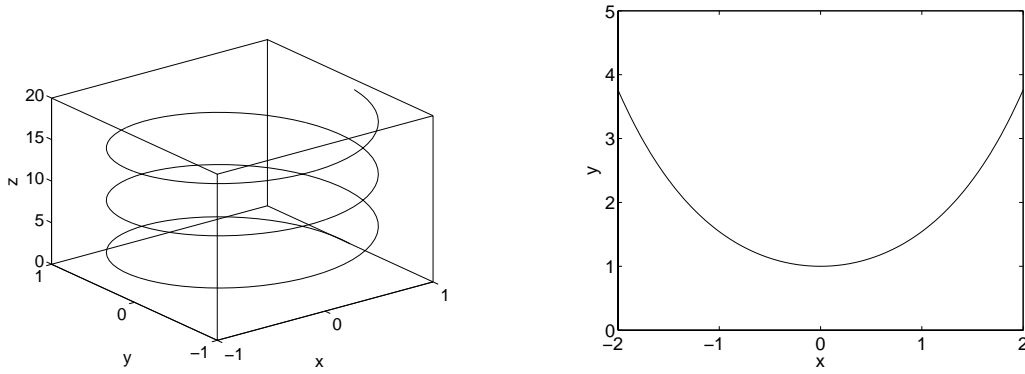


Abbildung 5.1: Spirale im  $\mathbb{R}^3$  (links) und Kettenlinie  $x \mapsto \cosh x$  (rechts).

In einer Raumdimension können wir die “Kurve”  $\Gamma = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  z.B. parametrisieren durch  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist nach der Substitutionsregel

$$\int_{\Gamma} f(x) dx = \int_{\Gamma} f(\gamma) d\gamma = \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{d\gamma}{dt} dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

In mehreren Dimensionen wird das Kurvenintegral entsprechend definiert, allerdings ist der *Betrag*  $|\gamma'(t)|$  der Geschwindigkeit zu verwenden.

**Definition 5.3** Seien  $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ein Skalarfeld und  $\Gamma \subset D_f$  eine Kurve, parametrisiert durch eine glatte Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Das Kurvenintegral (1. Art) von  $f$  über  $\Gamma$  ist definiert durch

$$\int_{\Gamma} f(x) dx = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Wählen wir speziell  $f(x) = 1$ , so beschreibt das Integral

$$\int_{\gamma} dx = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

die *Länge* der Kurve  $\Gamma$ . Sind  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei Parametrisierungen derselben Kurve  $\Gamma$ , so stimmen die Kurvenintegrale überein:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) |\gamma_1'(t)| dt = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(t)) |\gamma_2'(t)| dt.$$

**Beispiel 5.4** (1) Die Länge der Spirale aus Beispiel 5.2 (1)

$$\gamma : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ t \end{pmatrix},$$

ist gegeben durch

$$\int_{\Gamma} dx = \int_0^a |\gamma'(t)| dt = \int_0^a \sqrt{(R \sin t)^2 + (R \cos t)^2 + 1} dt = \int_0^a \sqrt{R^2 + 1} dt = a\sqrt{R^2 + 1}.$$

Wir wählen nun eine andere Parametrisierung der Spirale:

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(at^2) \\ R \sin(at^2) \\ at^2 \end{pmatrix},$$

die mit der ersten Parametrisierung über  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(at^2)$  zusammenhängt. Damit erhalten wir

$$\tilde{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} -2atR \sin(at^2) \\ 2atR \cos(at^2) \\ 2at \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} dx &= \int_0^1 |\tilde{\gamma}'(t)| dt = \int_0^1 2at \sqrt{R^2 \sin^2(at^2) + R^2 \cos^2(at^2) + 1} dt \\ &= 2a\sqrt{R^2 + 1} \int_0^1 t dt = a\sqrt{R^2 + 1}, \end{aligned}$$

also denselben Wert wie oben. Der Wert des Kurvenintegrals ist also unabhängig von der Parametrisierung.

(2) Betrachte den Graphen der Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , parametrisiert durch  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t, f(t))^{\top}$ , wie in Beispiel 5.2 (2). Die Länge des Graphen lautet

$$\int_{\Gamma} dx = \int_a^b \left| \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \right| dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Im Falle der Kettenlinie,  $f(x) = \cosh x$ ,  $x \in [-2, 2]$ , erhalten wir wegen  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  für  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} dx &= \int_{-2}^2 \sqrt{1 + \sinh^2 t} dt = \int_{-2}^2 \cosh t dt = [\sinh t]_{-2}^2 \\ &= \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) - \frac{1}{2}(e^{-2} - e^2) = e^2 - e^{-2} = 2 \sinh 2 = 7.2537 \dots \quad \square \end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir das Kurvenintegral für vektorwertige Funktionen  $F$

$$\int_{\Gamma} F(x) \cdot dx$$

definieren. Anschaulich entspricht dieses Integral der Arbeit im Kraftfeld  $F$  entlang des Weges  $\Gamma$ . Bewegen wir uns senkrecht zum Kraftfeld, so wird keine Arbeit verrichtet.

Allgemein hängt die verrichtete Arbeit vom Winkel zwischen Kraftfeld  $F(x)$  und Tangentenvektor  $\gamma'(t)/|\gamma'(t)|$  an die Kurve auch von der Stärke des Kraftfeldes ab, d.h. vom Skalarprodukt an der Stelle  $x = \gamma(t)$

$$F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

(siehe Abbildung 5.2). Integration über alle Kurvenpunkte  $x = \gamma(t)$  liefert das gesuchte Integral:

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

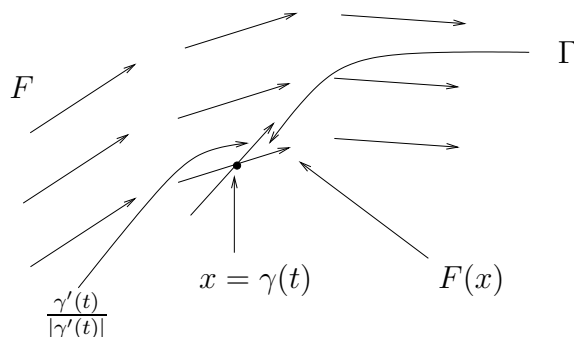


Abbildung 5.2: Weg auf einer Kurve  $\Gamma$  in einem Kraftfeld  $F$ . Der Tangentenvektor an die Kurve in  $x = \gamma(t)$  ist gegeben durch  $\gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ .

**Definition 5.5** Seien  $F : D_F \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld und  $\Gamma \subset D_F$  eine Kurve, parametrisiert durch  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Das Kurvenintegral (2. Art) von  $F$  über  $\Gamma$  ist definiert durch

$$\int_{\Gamma} F(x) \cdot dx = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

**Beispiel 5.6** Sei  $\Gamma$  die Kreislinie im  $\mathbb{R}^2$  um den Ursprung mit Radius 1, parametrisiert durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

(1) Sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(x) \cdot dx &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin t \cos t - \sin^2 t + \cos^2 t) dt. \end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen

$$\sin(2t) = \sin t \cos t, \quad \cos(2t) = \frac{1}{2}(\cos^2 t - \sin^2 t)$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(x) \cdot dx &= \int_0^{2\pi} (-2\sin(2t) + 2\cos(2t)) dt \\ &= [\cos(2t)]_0^{2\pi} + [\sin(2t)]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist plausibel, da in einem Kraftfeld entlang einer geschlossenen Kurve keine Arbeit verrichtet oder gewonnen werden kann (sonst gäbe es ein Perpetuum mobile).

(2) Sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ . Wir berechnen wieder das Kurvenintegral über  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(x) \cdot dx &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Obwohl die Kurve geschlossen ist, erhalten wir einen von Null verschiedenen Wert. Woran liegt das? □

Bevor wir die obige Frage beantworten, benötigen wir eine Definition (siehe Abbildung 5.3).

**Definition 5.7** (1) Die Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  heißt *zusammenhängend genau dann*, wenn je zwei Punkte aus  $G$  durch eine Kurve, die vollständig in  $G$  liegt, verbunden können.

(2) Die Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  heißt *sternförmig genau dann*, wenn es einen Punkt  $x_0 \in G$  gibt, so daß für alle  $x \in G$  die Verbindungsgerade von  $x_0$  nach  $x$  ganz in  $G$  liegt.

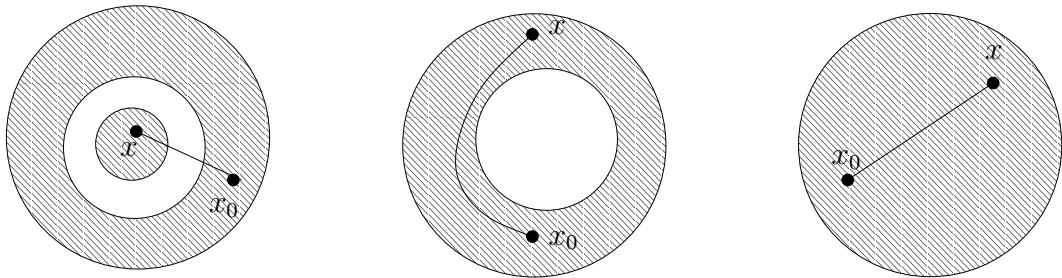
**Satz 5.8** Seien  $D_f \subset \mathbb{R}^n$  zusammenhängend und  $F : D_f \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\Gamma} F(x) \cdot dx = 0 \quad \text{für alle geschlossenen, glatten Kurven } \Gamma \subset D_f$$

genau dann, wenn es eine Funktion  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$F = \nabla f.$$

In Abschnitt 4.4 haben wir  $f$  ein Potential genannt und  $F$  ein Potentialfeld.



weder zusammenhängend  
noch sternförmig

zusammenhängend,  
nicht sternförmig

zusammenhängend  
und sternförmig

Abbildung 5.3: Zu den Begriffen “zusammenhängend” und “sternförmig”.

**Beispiel 5.9** Sei  $\Gamma$  die Kreislinie mit Radius 1 in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene, parametrisiert durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Kurve  $\Gamma$  ist glatt und geschlossen.

(1) Sei  $F(x) = |x|^{-3}x$ ,  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F(x) \cdot dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}^3} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t) dt = 0. \end{aligned}$$

Um Satz 5.8 anwenden zu können, müßten wir zeigen, daß das Kurvenintegral von  $F$  für *alle* glatten, geschlossenen Kurven verschwindet. Wir wissen aber bereits aus Beispiel 4.25, daß  $F$  ein Potential besitzt, nämlich  $f(x) = -|x|^{-1}$ . Das Potential  $f$  ist das Coulomb Potential zum elektrischen Feld  $F$ .

(2) Sei

$$F(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Wir berechnen das Kurvenintegral über  $\Gamma$ :

$$\int_{\Gamma} F(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

Nach Satz 5.8 kann  $F$  kein Potential besitzen. Dies ist nach den Ergebnissen aus Abschnitt 4.4 auch einleuchtend, denn gäbe es eine Funktion  $f$  mit  $F = \nabla f$ , so folgt nach Satz 4.30 (2)

$$0 = \operatorname{rot}(\nabla f) = \operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

also ein Widerspruch. □

Das letzte Beispiel läßt vermuten, daß es einen Zusammenhang zwischen dem Verschwinden des Integrals über geschlossenen Kurven und der Rotation im  $\mathbb{R}^3$  gibt. Existiert nämlich zu  $F = (F_1, \dots, F_n)^\top$  ein Potential  $f$  und ist  $F$  stetig partiell differenzierbar, so folgt nach dem Satz 4.14 von Schwarz wegen  $F_i = \partial f / \partial x_i$ :

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

Für  $n = 3$  bedeutet dies gerade  $\operatorname{rot} F = 0$ . Es gilt allgemein:

**Satz 5.10** *Seien  $D_F \subset \mathbb{R}^n$  sternförmig und  $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_{\Gamma} F(x) \cdot dx = 0 \quad \text{für alle geschlossenen, glatten Kurven } \Gamma \subset D_F$$

genau dann, wenn

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n.$$

**Beispiel 5.11** Sei  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  parametrisiert durch  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^\top$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , und sei

$$F(x) = \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{-1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}.$$



Nach Satz 5.10 würden wir vermuten, daß das Kurvenintegral von  $F$  über  $\Gamma$  verschwindet. Wir prüfen dies nach:

$$\int_{\Gamma} F(x) \cdot dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = 2\pi \neq 0.$$

Dieses Ergebnis scheint in Widerspruch zu Satz 5.10 zu stehen. Der Widerspruch löst sich aber auf, denn der Definitionsbereich  $D_F = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist nicht sternförmig: Für beliebiges  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  liegt die Verbindungsgerade von  $x_0$  nach  $x = -x_0$  nicht ganz in  $D_F$  (siehe Abbildung 5.4).  $\square$

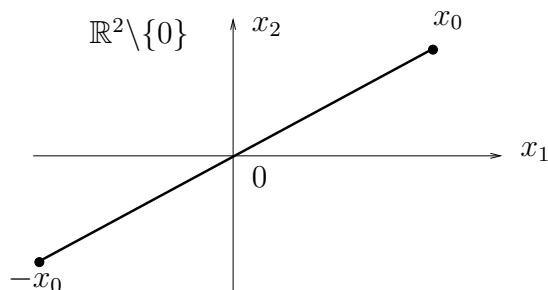


Abbildung 5.4: Die Verbindungsgerade von  $x_0$  nach  $-x_0$  liegt nicht ganz in  $D_F = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , denn  $0 \notin D_F$ .

Als Korollar zu den Sätzen 5.8 und 5.10 erhalten wir folgendes Ergebnis.

**Korollar 5.12** Sei  $F : D_F \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld. Dann gilt:

- (a)  $\exists f : D_F \rightarrow \mathbb{R} : F = \nabla f \implies \operatorname{rot} F = 0$ .
- (b)  $D_F$  sternförmig und  $\operatorname{rot} F = 0 \implies \exists f : D_F \rightarrow \mathbb{R} : F = \nabla f$ .

**Beispiel 5.13** In der Elektrostatik gilt  $\operatorname{rot} E = 0$  für das elektrische Feld. Gilt diese Gleichung in einem sternförmigen Gebiet, so besitzt  $E$  ein Potential, nämlich das elektrische Potential  $U$  mit  $E = -\nabla U$ .  $\square$

### Fragen zum Selbsttest:

1. Die folgenden Parametrisierungen beschreiben eine Kreislinie mit Radius  $R$  um den Nullpunkt im  $\mathbb{R}^2$  ( $t \in [0, 2\pi]$ ):

(a)  $\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ , (b)  $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ , (c)  $\begin{pmatrix} \cos \sqrt{t} \\ \sin \sqrt{t} \end{pmatrix}$ .

2. Seien  $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Parametrisierung einer Kurve  $\Gamma \subset D_f$ . Dann ist das Kurvenintegral von  $f$  über  $\Gamma$  definiert durch

(a)  $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$ , (b)  $\int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)| dt$ , (c)  $\int_a^b f(t)\gamma'(t) dt$ .

3. Die Länge der Kurve  $\gamma(t) = (t^2, t^2)^\top$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , beträgt

(a) 1 (b)  $\sqrt{2}$ , (c) 2.

4. Die Länge der Kurve  $\gamma(t) = (t, f(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , wobei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ist, beträgt

(a)  $\int_a^b \sqrt{1 + f(t)^2} dt$ , (b)  $\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$ , (c)  $\int_a^b \sqrt{t^2 + f(t)^2} dt$ .

5. Seien  $D_F \subset \mathbb{R}^n$  sternförmig und  $F = (F_1, \dots, F_n)^\top : D_F \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig partiell differenzierbar. Es gelte für alle geschlossenen glatten Kurven  $\Gamma \subset D_F$ , daß

$$\int_{\Gamma} F(x) \cdot dx = 0.$$

Dann folgt für alle  $i, j = 1, \dots, n$ :

(a)  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0$ , (b)  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0$ , (c)  $\frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = 0$ .

6. Seien  $D_F$  und  $F$  wie in 5. und sei  $\Gamma \subset D_F$  eine geschlossene, glatte Kurve. Der Wert von  $I = \int_{\Gamma} F(x) \cdot dx$  ist

- (a) gleich Null für alle  $\Gamma$ ,  
(b) ungleich Null für alle  $\Gamma$ ,  
(c) ungleich Null für manche  $\Gamma$ .

### Richtige Antworten:

1a, 1b; 2a; 3b; 4b; 5b; 6a.

## 5.2 Mehrfachintegrale

Wir definieren zunächst das Integral einer Funktion  $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  über dem zweidimensionalen Quader  $Q = (0, 1)^2$ . Ähnlich wie im eindimensionalen Fall approximieren wir das Integral durch die Summe der Flächeninhalte kleiner Quadrate um einen Punkt  $x^{(i)}$ , multipliziert mit  $f(x^{(i)})$ :

$$\sum_{i=1}^n f(x^{(i)}) \Delta x_1^{(i)} \Delta x_2^{(i)}$$

(siehe Abbildung 5.5). Im Grenzwert immer feiner werdender Zerlegungen von  $Q$  durch kleine Quadrate erhalten wir das Integral über  $Q$ :

$$\int \int_Q f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x^{(i)}) \Delta x_1^{(i)} \Delta x_2^{(i)}.$$

Allgemein definieren wir:

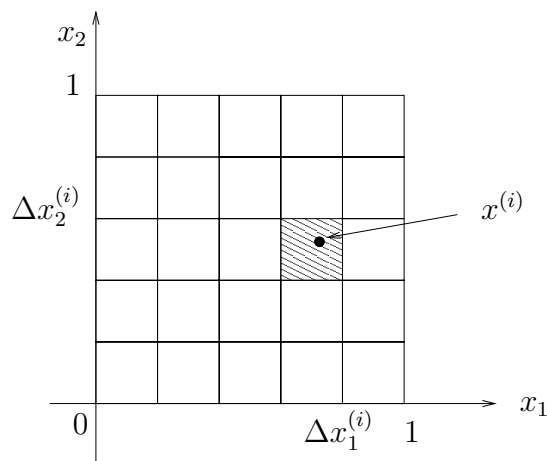


Abbildung 5.5: Zerlegung des Quadrats  $(0, 1)^2$  in kleine Quadrate mit Flächeninhalt  $\Delta x_1^{(i)} \Delta x_2^{(i)}$

**Definition 5.14** Seien  $Q = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$  ein Quader im  $\mathbb{R}^n$  und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Wir definieren das Integral von  $f$  über  $Q$  durch

$$\int_Q f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} \dots \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x) dx_1 \right) dx_2 \right) \dots dx_n. \quad (5.1)$$

Tatsächlich spielt die Reihenfolge, in der wir die einzelnen Integrale auswerten, keine Rolle, und wir können die Klammern weglassen, denn es gilt das folgende Resultat.

**Satz 5.15** (Fubini)

Sei  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann spielt die Reihenfolge, in der das Integral (5.1) ausgerechnet wird, keine Rolle. Insbesondere gilt im Fall  $n = 2$ :

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x) dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x) dx_2 dx_1.$$

**Beispiel 5.16** (1) Sei  $f(x) = x_1 + x_2^2$ ,  $x = (x_1, x_2)^\top \in Q = (0, 1) \times (0, 2)$ . Dann ist

$$\int_Q f(x) dx = \int_0^2 \int_0^1 (x_1 + x_2^2) dx_1 dx_2. \quad (5.2)$$

Wir werten zuerst das innere Integral bezüglich  $x_1$  aus, indem wir  $x_2$  als konstanten Parameter betrachten:

$$\int_0^1 (x_1 + x_2^2) dx_1 = \left[ \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 x_1 \right]_{x_1=0}^{x_1=1} = \frac{1}{2} + x_2^2.$$

Schließlich integrieren wir das äußere Integral bezüglich  $x_2$ , indem wir das obige Resultat in (5.1) einsetzen:

$$\int_Q f(x) dx = \int_0^2 \left( \frac{1}{2} + x_2^2 \right) dx_2 = \left[ \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_2^3 \right]_{x_2=0}^{x_2=2} = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}.$$

(2) Sie  $f(x) = x_1 \cdot x_2^2$ ,  $x = (x_1, x_2)^\top \in Q$  und  $Q$  wie in (1). Wir können das Integral in zwei Faktoren zerlegen:

$$\begin{aligned} \int_Q f(x) dx &= \int_0^2 \int_0^1 x_1 \cdot x_2^2 dx_1 dx_2 = \int_0^2 x_2^2 dx_2 \cdot \int_0^1 x_1 dx_1 \\ &= \left[ \frac{1}{3}x_2^3 \right]_0^2 \left[ \frac{1}{2}x_1^2 \right]_0^1 = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}. \end{aligned} \quad \square$$

Integrale über den gesamten Raum  $\mathbb{R}^n$  können wir als Grenzwert immer größer werdender Quader  $Q_R = (-R, R)^n = (-R, R) \times \cdots \times (-R, R)$  definieren:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{Q_R} f(x) dx.$$

Diese Definition macht Sinn, wenn

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{Q_R} |f(x)| dx$$

existiert.

**Beispiel 5.17** Sei  $f(x) = e^{-|x_1|-|x_2|-|x_3|}$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ . Wir berechnen zuerst das Integral von  $f$  über  $Q_R = (-R, R)^3$  und führen dann den Grenzwert  $R \rightarrow \infty$  durch:

$$\begin{aligned} \int_{Q_R} f(x) dx &= \int_{-R}^R \int_{-R}^R \int_{-R}^R e^{-|x_1|-|x_2|-|x_3|} dx_3 dx_2 dx_1 \\ &= \int_{-R}^R e^{-|x_1|} dx_1 \int_{-R}^R e^{-|x_2|} dx_2 \int_{-R}^R e^{-|x_3|} dx_3 \\ &= \left( \int_{-R}^R e^{-|x|} dx \right)^3. \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der Funktion  $x \mapsto e^{-|x|}$  erhalten wir

$$\int_{-R}^R e^{-|x|} dx = 2 \int_0^R e^{-x} dx = 2 [-a^{-x}]_0^R = 2(1 - e^{-R}),$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{Q_R} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} (2(1 - e^{-R}))^3 = 8. \quad \square$$

Um Funktionen über kompliziertere Gebiete integrieren zu können, ist es zweckmäßig, das Gebiet geeignet zu parametrisieren. Wir illustrieren die Vorgehensweise anhand einiger Beispiele.

**Beispiel 5.18** (1) Integriere  $f(x) = \cos x_1 \cdot e^{-x_2}$ ,  $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ , über das in Abbildung 5.6 links skizzierte Dreieck  $G$ . Wir parametrisieren das Gebiet wie folgt:

$$G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < x_1\}.$$

Dann ist

$$\int_G f(x) dx = \int_0^\pi \int_0^{x_1} \cos x_1 \cdot e^{-x_2} dx_2 dx_1.$$

Hier können wir die Integrationsreihenfolge nicht vertauschen, da das innere Integral von der Variablen  $x_1$  des äußeren Integrals abhängt. Wir berechnen zuerst das innere Integral

$$\begin{aligned} \int_G f(x) dx &= \int_0^\pi \cos x_1 \left( \int_0^{x_1} e^{-x_2} dx_2 \right) dx_1 = \int_0^\pi \cos x_1 (1 - e^{-x_1}) dx_1 \\ &= \int_0^\pi \cos x_1 dx_1 - \int_0^\pi \cos x_1 e^{-x_1} dx_1. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int \cos x e^{-x} dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x)$$

folgt

$$\int_G f(x) dx = [\sin x_1]_0^\pi - \left[ \frac{1}{2} e^{-x_1} (\sin x_1 - \cos x_1) \right]_0^\pi = -\frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1).$$

(2) Berechne den Flächeninhalt einer Kreisscheibe mit Radius  $R$ . Wir müssen also das Integral

$$\int_K 1 \, dx \quad \text{mit } K = \text{Kreisscheibe mit Radius } R$$

lösen. Dazu parametrisieren wir den Viertelkreis  $G$  durch

$$0 < x_1 < R, \quad 0 < x_2 < \sqrt{R^2 - x_1^2}$$

(siehe Abbildung 5.6 rechts) und erhalten

$$\int_K dx = 4 \int_G dx = 4 \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - x_1^2}} dx_2 \, dx_1 = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x_1^2} \, dx_1.$$

Mit der Substitution  $x_1 = R \sin y$ , also  $0 < y < \pi/2$  und

$$\frac{dx_1}{dy} = R \cos y \quad \text{bzw.} \quad dx_1 = R \cos y \, dy$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_K dx &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - (R \sin y)^2} R \cos y \, dy = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 y} \cos y \, dy \\ &= 4R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 y \, dy = 4R^2 \left[ \frac{1}{2}(y + \sin y \cos y) \right]_0^{\pi/2} = \pi R^2. \end{aligned}$$

□

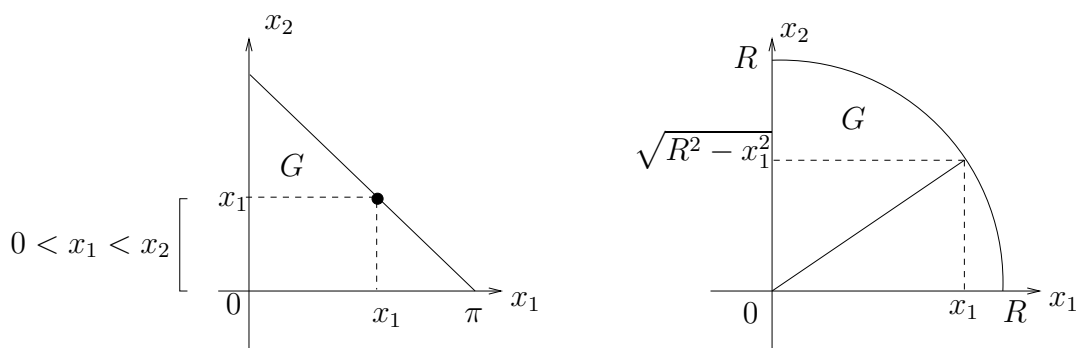


Abbildung 5.6: Zur Parametrisierung eines Dreiecks (links) und eines Viertelkreises (rechts).

Im letzten Beispiel scheint es angebrachter, Polarkoordinaten zu verwenden, um den Flächeninhalt zu berechnen. Dies bedeutet, daß wir eine mehrdimensionale Transformation

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = g(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

durchführen möchten. Wir erinnern, daß im eindimensionalen Fall die Substitution  $x = g(y)$  mit  $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(y))g'(y) dy$$

oder symbolisch

$$dx = g'(y) dy$$

lautet. Im Fall der zweidimensionalen Polarkoordinaten motivieren wir, wie  $dx = dx_1 dx_2$  transformiert werden muß. In Abbildung 5.7 sehen wir, daß das Flächenelement  $\Delta x_1 \Delta x_2$  durch die Polarkoordinaten (5.3) auf  $r \Delta r \Delta \phi$  abgebildet wird. Die Abbildung  $g$  "verzerrt" also das Element  $\Delta x_1 \Delta x_2$ . Ein Maß für die Flächenverzerrung ist die Determinante. In der Tat gilt

$$\det g'(r, \phi) = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = r(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r.$$

Im Grenzwert ist das Flächenelement  $dx_1 dx_2$  also gleich  $|\det g'(r, \phi)| dr d\phi = r dr d\phi$ . Der folgende Satz sagt aus, daß dies allgemein gilt.

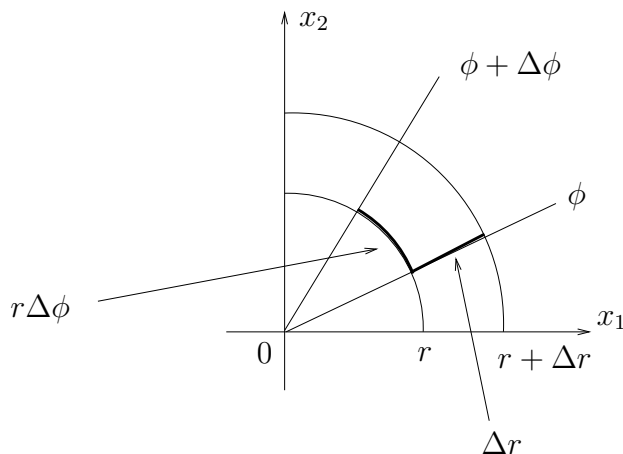


Abbildung 5.7: Das Flächenelement in Polarkoordinaten lautet  $r \Delta r \Delta \phi$ .

**Satz 5.19** (Transformationsformel)

Seien  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g : Q \rightarrow G$  invertierbar und stetig partiell differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_G f(x) dx = \int_Q f(g(y)) |\det g'(y)| dy.$$

**Beispiel 5.20** (Integration mit Polarkoordinaten)

(1) Wir wollen den Flächeninhalt einer Kreisscheibe  $K$  mit Radius  $R$  mit Hilfe der Polarkoordinaten (5.3) berechnen. Wir haben bereits die symbolische Formel

$$\boxed{dx_1 dx_2 = r dr d\phi}$$

berechnet. In Polarkoordinaten wird die Kreisscheibe durch  $0 \leq r < R$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$  beschrieben. Daher ist

$$\int_K dx = \int_K dx_1 dx_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r dr = \pi R^2.$$

(2) Sei  $f(x) = e^{-|x|^2/2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Wir berechnen das Integral von  $f$  über  $\mathbb{R}^2$ , parametrisiert durch  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Wegen  $r = |x|$  folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2/2} dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2/2} r dr d\phi = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2/2} dr \\ &= 2\pi \left[ -e^{-r^2/2} \right]_0^\infty = 2\pi. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Andererseits gilt in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2/2} dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2/2 - x_2^2/2} dx_2 dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2/2} dx_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2/2} dx_2 = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \right)^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Setzen wir (5.4) und (5.5) gleich, erhalten wir die wichtige Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}. \quad (5.6)$$

Beachte, daß die Funktion  $x \mapsto e^{-x^2/2}$  keine elementare Stammfunktion besitzt, so daß deren Integral über ein Intervall i.a. nur numerisch berechnet werden kann.  $\square$

Die Zylinderkoordinaten sind nach Abschnitt 4.1 definiert durch

$$g(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r < \infty, 0 \leq \phi < 2\pi, z \in \mathbb{R}.$$

Wir berechnen die Ableitung von  $g$  und deren Determinante:

$$\det g'(r, \phi, z) = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = r.$$

Also gilt symbolisch:

$$\boxed{dx_1 dx_2 dx_3 = r dr d\phi dz}$$



**Beispiel 5.21** (Integration mit Zylinderkoordinaten)

(1) Ein Zylinder  $Z$  mit Radius  $R$  und Höhe  $H$  wird beschrieben durch  $0 \leq r < R, 0 \leq \phi < 2\pi, 0 < z < H$ . Das Volumen dieses Zylinders lautet also

$$\int_Z dx = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\phi \, dz = 2\pi H \int_0^R r \, dr = \pi R^2 H.$$

Das Volumen ist wie erwartet gleich der Zylindergrundfläche  $\pi R^2$ , multipliziert mit der Höhe  $H$ .

(2) Ein umgedrehter Kegel  $K$  mit Radius  $R$  und Höhe sei mit einem Gas der Dichte  $f(x) = e^{-x_3}$  gefüllt. Wir wollen die Gesamtmasse des Gases in dem Kegel berechnen. Wir parametrisieren den Kegel in Zylinderkoordinaten durch

$$0 \leq r < R, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 < z < \frac{H}{R} r$$

(siehe Abbildung 5.8). Dann ist mit  $z = x_3$ :

$$\begin{aligned} \int_K f(x) \, dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{Hr/R} e^{-z} r \, dz \, dr \, d\phi \\ &= 2\pi \int_0^R r \int_0^{Hr/R} e^{-z} \, dz \, dr = 2\pi \int_0^R r [-e^{-z}]_0^{Hr/R} \, dr \\ &= 2\pi \int_0^R r (1 - e^{-Hr/R}) \, dr. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int r e^{-\alpha r} \, dr = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r} \left( r + \frac{1}{\alpha} \right) \quad \text{für } \alpha \neq 0$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_K f(x) \, dx &= 2\pi \int_0^R r \, dr - 2\pi \int_0^R r e^{-Hr/R} \, dr \\ &= \pi R^2 + 2\pi \left[ \frac{R}{H} e^{-Hr/R} \left( r + \frac{R}{H} \right) \right]_0^R \\ &= \pi R^2 + 2\pi \left( \frac{R}{H} \right)^2 e^{-H} (H + 1) - \left( \frac{R}{H} \right)^2. \end{aligned}$$

Ist die Höhe des Kegels sehr viel größer als dessen Radius, d.h.,  $R/H$  ist sehr viel kleiner als Eins, können wir das Integral approximieren durch

$$\int_K f(x) \, dx \approx \pi R^2. \quad \square$$

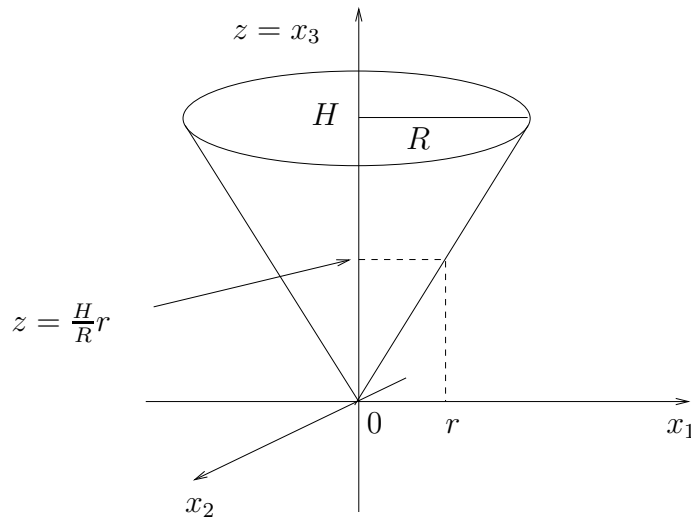


Abbildung 5.8: Zur Parametrisierung eines umgedrehten Kegels mit Radius  $R$  und Höhe  $H$ .

Die Kugelkoordinaten lauten gemäß Abschnitt 4.1:

$$g(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Die Determinante der Ableitung berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \det g'(r, \theta, \phi) &= \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\ &= r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \\ &= r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Symbolisch lautet damit das Volumenelement in Kugelkoordinaten:

$$\boxed{dx_1 dx_2 dx_3 = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.}$$

**Beispiel 5.22** (Integration mit Kugelkoordinaten)

(1) Das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-|x|^2/2} dx$$

kann mit Kugelkoordinaten berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-|x|^2/2} dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty e^{-r^2/2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cdot \int_0^\infty r^2 e^{-r^2/2} dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty r^2 e^{-r^2/2} dr. \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\int_0^\infty 1 \cdot e^{-r^2/2} dr = \left[ r \cdot e^{-r^2/2} \right]_0^\infty - \int_0^\infty r \cdot (-r) e^{-r^2/2} dr = \int_0^\infty r^2 e^{-r^2/2} dr.$$

Das Integral auf der linken Seite haben wir bereits in Beispiel 5.20 (2) berechnet (siehe (5.6)):

$$\int_0^\infty e^{-r^2/2} dr = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-r^2/2} dr = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}.$$

Wir schließen

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-|x|^2/2} dx = 4\pi \int_0^\infty e^{-r^2/2} dr = 2\pi \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}^3.$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da mit (5.6)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-|x|^2/2} dx &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-x_1^2/2} dx_1 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-x_2^2/2} dx_2 \int_{\mathbb{R}^3} e^{-x_3^2/2} dx_3 \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx \right)^3 = \sqrt{2\pi}^3 \end{aligned}$$

folgt.

(2) Wir wollen die mittleren Abstände des Elektrons zum Atomkern für das  $s$ -Orbital (Grundzustand) und das  $p_z$ -Orbital des Wasserstoffatoms bestimmen. Der mittlere Abstand ist gleich dem Erwartungswert des quantenmechanischen Ortsoperators:

$$\langle \psi | r | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(x)} r \psi(x) dx,$$

wobei  $r = |x|$ . Das  $s$ - bzw.  $p_z$ -Orbital wird durch die folgenden Wellenfunktionen beschrieben:

$$\begin{aligned} \psi_s(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \\ \psi_p(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi a^3}} \frac{r}{a} e^{-r/a} \cos \theta, \end{aligned}$$

wobei  $a$  der erste Bohrsche Radius ist. Um die Abstände zu bestimmen, müssen wir also nur die Integrale über die entsprechenden Wellenfunktionen in Kugelkoordinaten

ausrechnen:

$$\begin{aligned}\langle \psi_s | r | \psi_s \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \psi_s(x)^2 r \, dx = \frac{1}{\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r e^{-2r/a} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{1}{\pi a^3} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^\infty r^3 e^{-2r/a} \, dr.\end{aligned}$$

Wir verwenden folgende Rechenformel, die man durch sukzessive partielle Integration nachweisen kann:

$$\int_0^\infty r^k e^{-\alpha r} \, dr = \frac{k!}{\alpha^{k+1}} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann folgt

$$\langle \psi_s | r | \psi_s \rangle = \frac{4}{a^3} \frac{3!}{(2/a)^4} = \frac{3}{2}a.$$

Für die Wellenfunktion des  $p_z$ -Orbitals rechnen wir:

$$\begin{aligned}\langle \psi_p | r | \psi_p \rangle &= \frac{1}{32\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{-r/a} \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{2\pi}{32\pi a^3} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \int_0^\infty \frac{r^5}{a^2} e^{-r/a} \, dr \\ &= \frac{1}{16a^3} \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi \frac{1}{a^2} \frac{5!}{(1/a)^6} = \frac{1}{16a^3} \frac{2}{3} \frac{1}{a^2} 120a^6 = 5a.\end{aligned}$$

Der mittlere Abstand des Elektrons zum Wasserstoffkern beträgt also  $\frac{3}{2}a$  im Grundzustand ( $s$ -Orbital) und  $5a$  im  $p_z$ -Orbital (siehe Abbildung 5.9).  $\square$

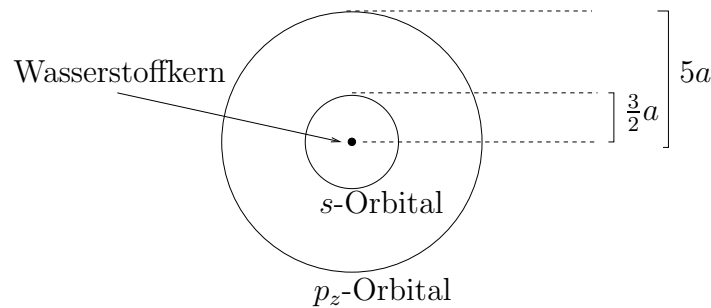


Abbildung 5.9: Mittlere Abstände des Elektrons im Wasserstoffatom zum Kern.

### Fragen zum Selbsttest:

1. Das Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x_1 x_2 dx_1 dx_2 dx_3$$

besitzt den Wert

(a) 0, (b)  $\frac{1}{4}$ , (c)  $\frac{1}{2}$ , (d) 1.

2. Seien  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g : Q \rightarrow G$  invertierbar und stetig partiell differenzierbar. Dann lautet die Transformationsformel

(a)  $\int_Q f(x) dx = \int_G f(g(y)) |\det g'(y)| dy$ ,

(b)  $\int_G f(x) dx = \int_Q f(g(t)) |\det g'(t)| dt$ ,

(c)  $\int_G f(x) dx = \int_Q f(g(y)) g'(y) dy$ .

3. Das Volumenelement  $dx_1 dx_2 dx_3$  lautet in Zylinderkoordinaten:

(a)  $r^2 \sin \phi dr d\phi dz$ , (b)  $r \sin \theta dr d\theta d\phi$ , (c)  $r dr d\phi dz$ .

4. Das Volumenelement  $dx_1 dx_2 dx_3$  lautet in Kugelkoordinaten:

(a)  $r dr d\theta, d\phi$ , (b)  $r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi$ , (c)  $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ .

5. Das Integral von  $f(x) = |x|^{-2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , über eine Kugel mit Radius 1 um den Ursprung hat den Wert

(a)  $\infty$ , (b)  $4\pi$ , (c)  $2\pi$ , (d)  $\pi$ .

### Richtige Antworten:

1b; 2b; 3c; 4c; 5b.

### 5.3 Oberflächenintegrale

Ziel dieses Abschnitts ist die Definition und Berechnung von Integralen der Form

$$\int_S f(x) ds, \quad (5.7)$$

wobei  $S \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche (englisch: surface) sei. Flächen im  $\mathbb{R}^3$  können wir durch Funktionen  $g : Q \rightarrow S$  parametrisieren, wobei  $Q$  ein zweidimensionaler Parameterbereich sei.

**Beispiel 5.23** (1) Das Rechteck  $S = (0, 1) \times (0, 1) \times \{2\}$  im  $\mathbb{R}^3$  kann durch die Funktion

$$g(s, t) = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (s, t) \in Q = (0, 1) \times (0, 1)$$

parametrisiert werden (siehe Abbildung 5.10 links).

(2) Für die Parametrisierung der Oberfläche der Nordhalbkugel mit Radius  $R$  um den Ursprung (siehe Abbildung 5.10 rechts) wählen wir Kugelkoordinaten, wobei der Radius  $R$  fest ist:

$$g(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (5.8)$$

Dann ist  $g : Q \rightarrow S$  mit  $Q = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi)$  und  $S =$  Oberfläche der Nordhalbkugel (ohne Boden).  $\square$

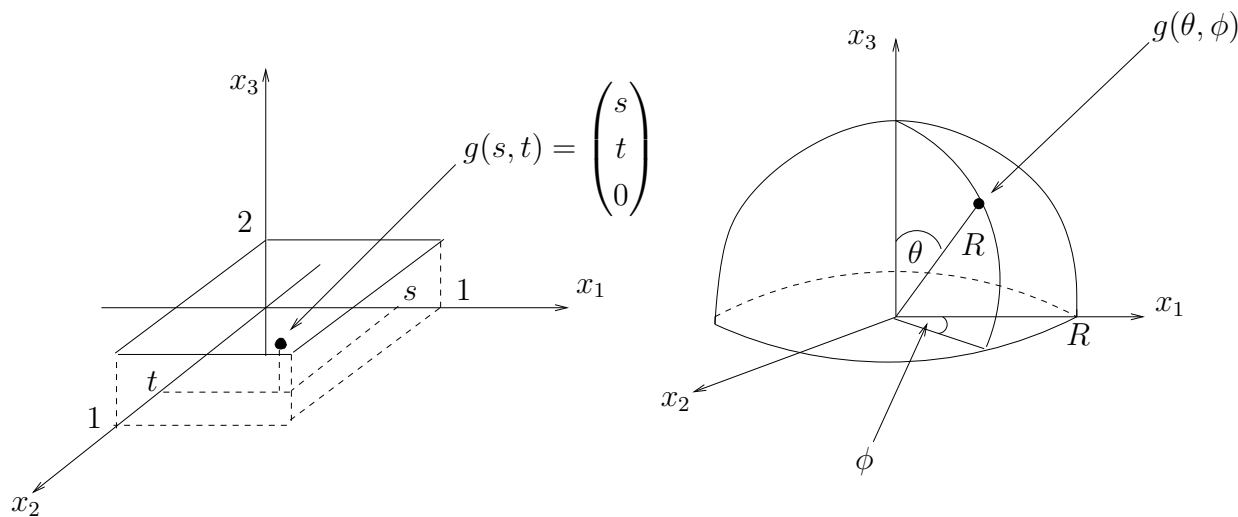


Abbildung 5.10: Parametrisierung eines Rechtecks (links) und der Oberfläche der Nordhalbkugel (rechts).

Das Integral (5.7) definieren wir als den Grenzwert immer feiner werdender Zerlegungen der Summe über die Flächenelemente  $\Delta s^{(i)}$ , gewichtet mit  $f(x_i)$ , wobei  $x_i \in \Delta s^{(i)}$ :

$$\int_S f(x) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x^{(i)}) \Delta s^{(i)}.$$

Die Frage ist, wie das Flächenelement  $\Delta S^{(i)}$  formuliert werden kann. Nach Abbildung 5.11 wird die Fläche approximiert durch die Paralleleogramme  $\Delta S^{(i)}$ , deren Flächeninhalt durch den Betrag des Kreuzprodukts der Tangentialvektoren  $\partial g / \partial s$  und  $\partial g / \partial t$  gegeben ist:

$$\text{Flächeninhalt von } \Delta s^{(i)} = \left| \frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) \right|.$$

Daher ist das Flächenelement  $\Delta s^{(i)}$  gleich

$$\Delta s^{(i)} = \left| \frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) \right| \Delta s \Delta t.$$

Das Kreuzprodukt steht senkrecht auf den Tangentialvektoren  $\partial g / \partial s$  und  $\partial g / \partial t$  und folglich auch senkrecht auf dem Flächenelement, das durch die Tangentialvektoren aufgespannt wird. Das Kreuzprodukt wird daher auch die *Normale* auf  $S$  an  $x^{(i)}$  genannt und mit

$$n(s, t) = \frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) \quad (5.9)$$

bezeichnet. Die Definition des Oberflächenintegrals (5.7) ist also wie folgt.

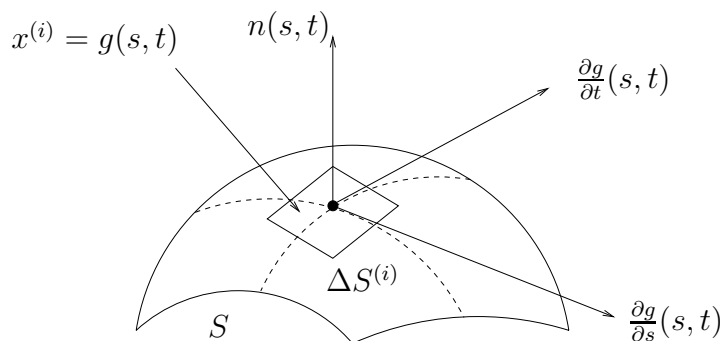


Abbildung 5.11: Tangentialvektoren  $\partial g / \partial s$  und  $\partial g / \partial t$  und Normalenvektor  $n(s, t)$  an der Fläche  $S$ .

**Definition 5.24** Seien  $S$  eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit invertierbarer und stetig partiell differenzierbarer Funktion. Dann ist das Oberflächenintegral (1. Art) von  $f$  über  $S$  definiert durch

$$\int_S f(x) ds = \int_Q f(g(s, t)) |n(s, t)| ds dt,$$

und die Normale  $n(s, t)$  ist gegeben durch (5.9).

**Beispiel 5.25** (1) Seien  $f(x) = x_1 \cdot x_3$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  und  $S = (0, 1) \times (0, 1) \times \{2\}$  das Rechteck im  $\mathbb{R}^3$  aus Beispiel 5.23 (1) mit Parametrisierung

$$g(s, t) = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (s, t) \in Q = (0, 1)^2.$$

Wir rechnen

$$\left| \frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 1$$

und erhalten

$$\int_S f(x) ds = \int_0^1 \int_0^1 f(s, t, 2) \cdot 1 ds dt = \int_0^1 \int_0^1 2s ds dt = 1.$$

(2) Wir berechnen die Oberfläche der Halbkugel  $S$  aus Beispiel 5.23 (2). Dazu bestimmen wir zunächst den Normalenvektor (siehe (5.8)):

$$\begin{aligned} n(\theta, \phi) &= \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, \phi) \times \frac{\partial g}{\partial \phi}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi \\ R \cos \theta \sin \phi \\ -R \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = R \sin \theta g(\theta, \phi). \end{aligned} \quad (5.10)$$

In diesem speziellen Fall zeigt der Normalenvektor in Richtung des Vektors  $g(\theta, \phi)$ . Der Betrag von  $n(\theta, \phi)$  berechnet sich zu

$$|n(\theta, \phi)| = R \sin \theta |g(\theta, \phi)| = R^2 \sin \theta.$$

Damit erhalten wir

$$\int_S ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} 1 \cdot |n(\theta, \phi)| d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi R^2. \quad \square$$

**Beispiel 5.26** Wir betrachten die Oberfläche  $S$  eines Zylinders  $Z$  mit Radius  $R$  und Höhe  $H$  (siehe Abbildung 5.12). Die Oberfläche umschließt den Zylinder und wird auch als *Rand* des Zylinders bezeichnet. Wir schreiben insbesondere  $S = \partial Z$ , wobei das Symbol  $\partial$  für ‘‘Rand von’’ steht. Der Zylinderrand besteht aus Deckel, Boden und Mantel, die wir getrennt parametrisieren:



- Boden:  $g_B(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (r, \phi) \in Q_B = [0, R] \times [0, 2\pi),$
- Deckel:  $g_D(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ H \end{pmatrix}, \quad (r, \phi) \in Q_D = [0, R] \times [0, 2\pi),$
- Mantel:  $g_M(\phi, z) = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ z \end{pmatrix}, \quad (\phi, z) \in Q_M = [0, 2\pi) \times [0, H].$

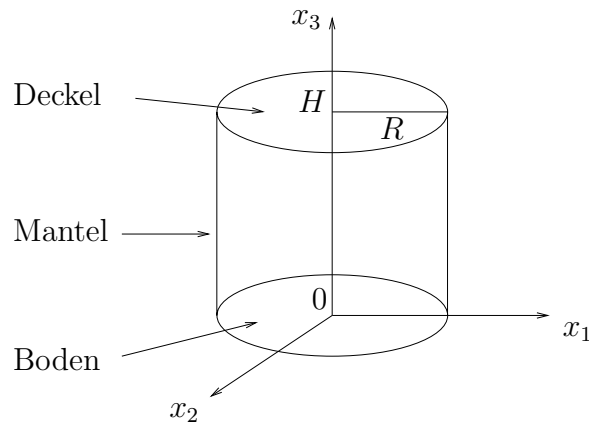


Abbildung 5.12: Bei der Zylinderoberfläche parametrisieren wir den Deckel, Boden und Mantel separat.

Die entsprechenden Normalen lauten:

$$n_B(r, \phi) = \frac{\partial g_B}{\partial r}(r, \phi) \times \frac{\partial g_B}{\partial \phi}(r, \phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \quad |n_B(r, \phi)| = r,$$

$$n_D(r, \phi) = \frac{\partial g_D}{\partial r}(r, \phi) \times \frac{\partial g_D}{\partial \phi}(r, \phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \quad |n_D(r, \phi)| = r,$$

$$n_M(\phi, z) = \frac{\partial g_M}{\partial \phi}(\phi, z) \times \frac{\partial g_M}{\partial z}(\phi, z) = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |n_M(\phi, z)| = R.$$

Wir haben die Parametrisierung so gewählt, daß die Normalen nach außen zeigen (also nicht in das Zylinderinnere). Man nennt diese Vektoren daher auch *äußere Normalen*.

Das Oberflächenintegral ist die Summe der drei Teilintegrale:

$$\begin{aligned} \int_{\partial Z} ds &= \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\phi}_{\text{Boden}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\phi}_{\text{Deckel}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^H R dr d\phi}_{\text{Mantel}} \\ &= 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} + 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} + 2\pi RH + 2\pi R(R + H). \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist einleuchtend: Die Zylinderoberfläche ist gleich den Flächeninhalten von Deckel und Boden ( $2 \cdot \pi R^2$ ) und der Fläche des Mantels (Höhe mal Breite =  $H \cdot 2\pi R$ ).  
□

Ist  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Vektorfeld, so definieren wir das Oberflächenintegral von  $F$  über  $S$  ähnlich wie bei Kurvenintegralen (2. Art) (siehe Abschnitt 5.1).

**Definition 5.27** Seien  $S$  eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$  mit invertierbarer und stetig partiell differenzierbarer Parametrisierung  $g : Q \rightarrow S$  und  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig. Dann ist das Oberflächenintegral (2. Art) von  $F$  über  $S$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_S F(x) \cdot ds &= \int_Q F(g(s, t)) \cdot \frac{n(s, t)}{|n(s, t)|} |n(s, t)| ds dt \\ &= \int_Q F(g(s, t)) \cdot n(s, t) ds dt. \end{aligned}$$

**Beispiel 5.28** (1) Sei  $F(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ . Wir wollen das Integral von  $F$  über die Kugel mit Oberfläche  $\partial K$  und Radius  $R$  um den Ursprung bestimmen. Die Kugeloberfläche wird parametrisiert durch

$$g(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\theta, \phi) \in Q = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \quad (5.11)$$

mit äußerer Normalen (siehe (5.10))

$$n(\theta, \phi) = \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, \phi) \times \frac{\partial g}{\partial \phi}(\theta, \phi) = R \sin \theta g(\theta, \phi). \quad (5.12)$$

Es folgt für das Oberflächenintegral

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} F(x) \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(g(\theta, \phi)) \cdot n(\theta, \phi) d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (g(\theta, \phi) \cdot R \sin \theta g(\theta, \phi)) d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^3 \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi \cdot 2R^3 = 4\pi R^3 \\ &= 3 \cdot \text{Volumen der Kugel.} \end{aligned}$$

(2) Wir integrieren das Vektorfeld  $F(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$  über die Kugeloberfläche wie in (1):

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} F(x) \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \begin{pmatrix} -R \sin \theta \sin \phi \\ R \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta (-R^2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi + R^2 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi) d\theta d\phi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es gilt auch  $\operatorname{div} F(x) = 0$ . Zufall? Nein, zwischen der Divergenz und dem Oberflächenintegral besteht ein Zusammenhang, der im Satz von Gauß präzisiert wird.  $\square$

**Satz 5.29** (Gauß)

Seien  $G \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränkter Bereich und  $\partial G$  der Rand von  $G$ , parametrisiert durch eine invertierbare, stetig partiell differenzierbare Funktion  $g : Q \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \partial G$ . Sei weiter  $F : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Bezeichnet  $n(s, t)$  die äußere Normale

$$n(s, t) = \frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial g}{\partial t}(s, t),$$

so gilt

$$\int_G \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial G} (F \cdot n) \, ds.$$

Der Satz 5.29 von Gauß ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a)$$

für differenzierbare Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , denn mit den äußeren Normalen

$$n(a) = -1, \quad n(b) = 1$$

an den Intervallenden  $a$  und  $b$  (siehe Abbildung 5.13) und  $G = (a, b)$ ;  $\partial G = \{a, b\}$  folgt

$$\int_G f'(x) \, dx = \int_a^b f'(x) \, dx = f(b)n(b) + f(a)n(a) = \int_{\partial G} f(x)n(x) \, dx.$$

**Beispiel 5.30** Wir greifen das Beispiel 5.28 auf und zeigen, daß die entsprechenden Oberflächenintegrale mit Hilfe des Satzes 5.29 von Gauß bequem berechnet werden können.

(1) Für  $F(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , gilt  $\operatorname{div} F = 3$ , also nach dem Satz 5.29 von Gauß

$$\int_{\partial K} F(x) \cdot ds = \int_K \operatorname{div} F \, dx = 3 \int_K 1 \, dx = 3 \cdot \text{Volumen der Kugel}.$$



Abbildung 5.13: Äußere Normalenvektoren  $n(a)$  und  $n(b)$  am Rand des Intervalls  $(a, b)$ .

(2) Für  $F(x) = (-x_2, x_1, 0)$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ , folgt  $\operatorname{div} F = 0$ , also nach dem Satz 5.29 von Gauß

$$\int_{\partial K} F(x) \cdot ds = \int_K \operatorname{div} F \, dx = 0. \quad \square$$

**Beispiel 5.31** Wir wollen den Fluß des elektrischen Feldes einer Punktladung

$$F(x) = \frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

durch die Oberfläche einer Kugel  $K$  vom Radius  $R$  um den Ursprung berechnen. Mit der Parametrisierung (5.11) und der Normalen (5.12) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} F(x) \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{R^3} \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix} \cdot R^2 \sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta (\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta) d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi = 2\pi. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \right) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{2x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \\ &= \frac{-2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{|x|^5} \end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) = \frac{x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2}{|x|^5}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2}{|x|^5}.$$

Es folgt

$$\operatorname{div} F(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(x) = 0$$

und daher nach dem Satz 5.29 von Gauß

$$\int_{\partial K} F(x) \cdot ds = \int_K \operatorname{div} F \, dx = 0$$

im Widerspruch zu (5.13). Was ist schiefgelaufen? Die Divergenz von  $F$  ist gleich Null für alle  $x \neq 0$ , aber ungleich Null für  $x = 0$ . Genauer gesagt haben wir eine Singularität in  $x = 0$ , die so stark ist, daß das Integral

$$\int_K \operatorname{div} F \, dx = 2\pi$$

gemäß obiger Rechnung ist. □

Satz 5.29 von Gauß eine hat einfache Interpretation: Der Fluß des Vektorfeldes  $F$  durch den Rand eines Gebietes ist gleich der Stärke der Quellen bzw. Senken (Divergenz) von  $F$  in diesem Gebiet. Der Satz kann auch dazu benutzt werden, um Transportgleichungen herzuleiten. Betrachte etwa eine Flüssigkeit mit Dichte  $\varrho(x, t)$  und Teilchenfluß  $J(x, t)$ . Die zeitliche Änderung der Flüssigkeitsmasse in einen Gebiet  $G$

$$\frac{d}{dt} \int_G \varrho(x, t) \, dx$$

ist gleich dem Fluß der aus dem Gebiet heraus- oder hineintretenden Teilchen:

$$\int_{\partial G} J(x, t) \cdot n(x) \, ds,$$

wobei es genügt, nur die Normalkomponente  $J \cdot n$  zu berücksichtigen (falls  $J \cdot n = 0$ , ist der Fluß tangential zum Rand, und es fließen keine Teilchen hinaus oder herein). Gleichsetzen der beiden Gleichungen und Anwenden des Satzes 5.29 von Gauß führt auf

$$\int_G \frac{\partial \varrho}{\partial t}(x, t) \, dx = \frac{d}{dt} \int_G \varrho(x, t) \, dx = \int_{\partial G} J(x, t) \cdot n(x) \, ds = \int_G \operatorname{div} J(x, t) \, dx.$$

Für alle Gebiete  $G \subset \mathbb{R}^3$  gilt also

$$\int_G \left( \frac{\partial \varrho}{\partial t} - \operatorname{div} J \right) dx = 0.$$

Dann muß auch der Integrand verschwinden (wenn die Funktionen stetig sind):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} - \operatorname{div} J = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \, t \in \mathbb{R}.$$

Man nennt diese Gleichung eine *Transportgleichung* für die Teilchendichte.

### Fragen zum Selbsttest:

1. Das Oberflächenintegral von einem stetigen Skalarfeld  $f$  über die Kugeloberfläche mit Radius  $R$  um den Ursprung lautet, wobei

$$g(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \sin \theta \cos \phi \\ R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \end{pmatrix},$$

(a)  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(g(\theta, \phi)) R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi,$

(b)  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(g(\theta, \phi)) R \sin \theta \, d\theta \, d\phi,$

(c)  $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(g(\theta, \phi)) \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$

2. Das Oberflächenintegral von einem stetigen Vektorfeld  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  über eine durch  $g : Q \rightarrow S$  parametrisierte Oberfläche  $S$  lautet, wobei  $n(s, t)$  die äußere Normale an  $S$  ist:

(a)  $\int_Q F(g(s, t)) |n(s, t)| \, ds \, dt,$

(b)  $\int_Q F(g(s, t)) \cdot n(s, t) \, ds \, dt,$

(c)  $\int_G F(g(s, t)) \cdot n(s, t) \, ds \, dt.$

3. Der Satz von Gauß für ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^3$  mit Rand  $\partial G$ , äußerer Normale  $n(x)$  und stetig partiell differenzierbarem Vektorfeld  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  lautet:

(a)  $\int_G F(x) \, dx = \int_{\partial G} (F \cdot n) \, ds,$

(b)  $\int_G \operatorname{div} F(x) \, dx = \int_{\partial G} (F \cdot n) \, ds,$

(c)  $\int_{\partial G} \operatorname{div} F(x) \, dx = \int_G (F \cdot n) \, ds$

4. Es erfüllen  $G \subset \mathbb{R}^3$  und  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  den Satz von Gauß. Außerdem sei  $\operatorname{div} F = 0$ . Dann gilt

$$\int_{\partial G} (F \cdot n) \, ds = 0$$

- (a) immer, (b) manchmal (hängt von  $F$  ab), (c) nie.

5. Es erfüllen  $G \subset \mathbb{R}^3$  und  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  den Satz von Gauß. Der Wert von

$$\int_{\partial G} (\operatorname{rot} F) \cdot n \, ds$$

lautet:

(a) 0, (b)  $2\pi$ , (c) irgendein Wert von  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  (hängt von  $F$  ab).

6. Seien  $G \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit Rand  $\partial G$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar. Der Wert von

$$\int_{\partial G} (\nabla f \cdot n) \, ds$$

lautet:

(a) 0, (b)  $2\pi$ , (c) irgendein Wert von  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  (hängt von  $f$  ab).

**Richtig Antworten:** 1a; 2b; 3b; 4a; 5a; 6c.