

Seminar “The Digit Challenge”

In diesem Seminar sollen Sie fünf mathematische Probleme lösen, deren Ergebnis jeweils eine reelle Zahl ist. Der Auftrag lautet, diese Zahlen auf möglichst viele Ziffern (ohne Rundung) genau zu berechnen.

Aufgabe 1: Sei P die Menge aller Primzahlen. Berechnen Sie

$$s = \sum_{p \in P} \frac{p(p-1)}{p^\pi}.$$

Aufgabe 2: Die unendliche Matrix $A = (a_{ij})$, definiert durch $a_{ij} = 1/(i+j-1)$, falls $i+j$ eine Primzahl ist, und $a_{ij} = 1/(i+j-1)^2$ sonst, bildet einen unendlich-dimensionalen Operator auf ℓ^2 . Welchen Wert hat

$$a = \|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

wobei $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$?

Aufgabe 3: Definiere die stochastische Folge (x_n) rekursiv durch $x_0 = x_1 = x_2 = 1$ und

$$x_{n+3} = x_{n+2} \pm \frac{1}{3}(x_{n+1} + x_n), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 0,$$

wobei das Vorzeichen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ positiv oder negativ ist. Berechnen Sie

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{1/n}.$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie

$$I = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right)}\right) dx.$$

Aufgabe 5: Sei u die klassische Lösung von

$$u_t - \Delta u = e^u \quad \text{in } \Omega = (0, 1)^2, t > 0, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, t > 0, \quad u(0) = 1 \quad \text{in } \Omega.$$

Bestimmen Sie

$$t^* = \min\{t > 0 : \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty\}.$$

Spielregeln: Sie dürfen die Aufgaben alleine oder in einer Gruppe von 2-3 Studierenden lösen und Einfälle und Vorschläge von Bekannten, aus der Literatur oder aus dem Internet einholen. Im Seminar sollen Sie regelmäßig an der Tafel über Ihre Fortschritte zur Lösung der Aufgaben berichten. Die Lösungen müssen mit Begründungen, Rechnungen oder Programmen in schriftlicher Form bis spätestens 26.06.2014 vorliegen. Sie sollen begründen, warum Sie denken, dass die gefundenen Ziffern korrekt sind. “Gewonnen” hat diejenige Person bzw. Gruppe, die am meisten korrekte Ziffern (ohne Rundung) gefunden hat.

Tipps: Versuchen Sie zunächst, sich mit den Problemen vertraut zu machen, indem Sie z.B. die Aufgaben mit einer vereinfachten Aufgabenstellung oder mit mathematischer Standard-Software (Matlab, Maple, Mathematica, Femlab, Scilab, Python etc.) lösen. Eventuell können Sie das Problem umformulieren, so dass die Umformulierung einfacher zu lösen ist, oder in einen allgemeineren Kontext einbetten, der es Ihnen erlaubt, eine mathematische Theorie anzuwenden. Um die Korrektheit Ihrer Ziffern zu begründen, können Sie Intervallarithmetik verwenden (es gibt Zusatzpakete für Mathematica, Maple, Matlab oder C) oder verschiedene Algorithmen implementieren. Misstrauen Sie den Ergebnissen von Standardsoftware und berücksichtigen Sie den Einfluss von Rundungsfehlern.

Mehr Tipps finden Sie in dem Buch “Vom Lösen numerischer Probleme“ von F. Bornemann et al. (Springer 2007).