Technische Universität Wien
Institut für Analysis und Scientific Computing
Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel

Sommer 2008

Seminar "The Digit Challenge"

In diesem Seminar sollen Sie fünf mathematische Probleme lösen, deren Ergebnis jeweils eine reelle Zahl ist. Der Auftrag lautet, diese Zahlen auf möglichst viele Ziffern (ohne Rundung) genau zu berechnen.

Aufgabe 1: Finden Sie das globale Minimum $M = \min f(x,y)$ der Funktion

$$f(x,y) = \sin(\cos(xy)) + \cos(\sin(x+2y)) + \sin(e^{x^2}) + e^{\cos(y)} + x^2 + y^2,$$

wobei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2: Lösen Sie das Integral

$$I = \int_{\mathbb{R}^6} e^{-x_1^4 - \cdots - x_6^4} \sin^2(x_1 \cdots x_6) dx,$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_6)$.

Aufgabe 3: Die unendliche Matrix $A = (a_{ij})$, definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+j-1} & : i+j \text{ ist Primzahl} \\ 0 & : \text{sonst,} \end{cases} \qquad i,j \geq 1,$$

bildet einen unendlich-dimensionalen Operator auf ℓ^2. Welchen Wert hat

$$a = \|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

wobei $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^\infty x_i^2$?

Aufgabe 4: Bestimmen Sie $c > 0$, so daß die Lösung von

$$-\Delta u = e^u \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \quad u = c \quad \text{auf } \Gamma = \{0\} \times (0,1), \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \backslash \Gamma,$$

die Beziehung $u(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 1$ erfüllt.

Aufgabe 5: Die Lösung (x,y,z) des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_1 y - k_2 xy + k_3 x - k_4 x^2, \\ \dot{y} &= -k_1 y - k_2 xy + k_5 f z, \\ \dot{z} &= 2k_3 x - k_5 z, \end{aligned}$$

mit $(x,y,z)(0) = (0.01, 0.02, 0.2)$ und $k_1 = 1.28$, $k_2 = 2.4 \cdot 10^6$, $k_3 = 33.6$, $k_4 = 3000$, $k_5 = 1$ und $f = 0.5$ ist periodisch. Bestimmen Sie das kleinste $p > 0$, so daß $x(t) = x(t+p)$ für alle $t > 0$.

Spielregeln: Sie dürfen die Aufgaben alleine oder in einer Gruppe von 2-3 Studierenden lösen und Einfälle und Vorschläge von Bekannten, aus der Literatur oder aus dem Internet einholen. Im Seminar sollen Sie regelmäßig an der Tafel über Ihre Fortschritte zur Lösung der Aufgaben berichten. Die Lösungen müssen mit Begründungen, Rechnungen oder Programmen in schriftlicher Form bis spätestens Ende Juli vorliegen. Sie sollen begründen, warum Sie denken, daß die gefundenen Ziffern korrekt sind. "Gewonnen" hat diejenige Person bzw. Gruppe, die am meisten korrekte Ziffern (ohne Rundung) gefunden hat.

Tipps: Versuchen Sie zunächst, sich mit den Problemen vertraut zu machen, indem Sie z.B. die Aufgaben mit einer vereinfachten Aufgabenstellung oder mit mathematischer Standard-Software (Matlab, Maple, Mathematica, Femlab, Intlab etc.) lösen. Eventuell können Sie das Problem umformulieren, so daß die Umformulierung einfacher zu lösen ist, oder in einen allgemeineren Kontext einbetten, der es Ihnen erlaubt, eine mathematische Theorie anzuwenden. Um die Korrektheit Ihrer Ziffern zu begründen, können Sie Intervallarithmetik verwenden (es gibt Zusatzpakete für Mathematica, Maple, Matlab oder C) oder verschiedene Algorithmen implementieren. Mißtrauen Sie den Ergebnissen von Standardsoftware und berücksichtigen Sie den Einfluß von Rundungsfehlern.

Mehr Tipps finden Sie in dem Buch "Vom Lösen numerischer Probleme" von F. Bornemann et al. (Springer 2007).