

**Prüfung aus Mathematik 2 für BI und UI**  
**am 13. Jänner 2023**

ZUNAME: .....

Vorname: .....

Mat.Nr.: .....

Deckblatt bitte nicht herunterreißen!  
Arbeitszeit: 90 Minuten!

1. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie  $A^3$ .
- (b) Es sei nun  $B$  eine allgemeine  $3 \times 3$  Matrix. Zeigen Sie, dass, wenn  $\lambda$  ein Eigenwert von  $B$  ist, dann ist  $\lambda^3$  ein Eigenwert von  $B^3$ .
- (c) Was lässt sich aufgrund von (a) und (b) über die Eigenwerte von  $A$  aussagen? Überprüfen Sie Ihren Schluss, indem Sie die Eigenwerte von  $A$  mit Hilfe der charakteristischen Gleichung berechnen.

2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = (x + 2)e^{-x} - 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

3. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{v}_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy - 1 \\ \alpha x^2 + 3y^2 \end{pmatrix},$$

wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Parameter ist.

- (a) Bestimmen Sie den Wert von  $\alpha$  so, dass  $\mathbf{v}_\alpha$  konservativ wird und berechnen Sie für diesen Fall auch die Potentialfunktion von  $\mathbf{v}_\alpha$ .
- (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C \mathbf{v}_\alpha \, d\mathbf{x}$$

für  $\alpha = 1$ , wobei  $C$  den im mathematisch positiven Sinn durchlaufenen Ellipsenbogen  $x^2 + 2y^2 = 1$  mit  $y \geq 0$  bezeichnet.

4. (a) Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\int_1^3 \int_1^{x^2} \frac{x}{y} \, dy \, dx$$

indem Sie die Integrationsreihenfolge vertauschen.

- (b) Formulieren Sie das Gesetz der Großen Zahlen und den Zentralen Grenzwertsatz.