Schriftliche Prüfung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 - VO Doz. Grill

14. Oktober 2022

zweistündig ohne Unterlagen

1. (a) Definieren Sie Maßfunktion, endliche Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion, äußere Maßfunktion.

   (b) Für $A \subseteq \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen gegeben:

      i.
      $$\mu^*(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\},$$

      ii.
      $$\mu^*(A) = \sup\{|x| : x \in A\},$$

      iii.
      $$\mu^*(A) = \sup\{x : x \in A, x \geq 0\},$$

   immer mit der üblichen Konvention $\sup \emptyset = 0$.

   Stellen Sie fest, welche dieser Funktionen äußere Maßfunktionen sind, und bestimmen Sie für die äußeren Maßfunktionen jeweils das System der messbaren Mengen.

2. (a) Definieren Sie: Lebesgue-Stieltjes Maßfunktion, Verteilungsfunktion, Verteilungsfunktion im engeren Sinn, Regularität eines Maßes.

   (b) Zeigen Sie, dass jede nichtfallende rechtsstetige Funktion auf $\mathbb{R}$ Verteilungsfunktion eines Lebesgue-Stieltjes-Maßes ist.

3. (a) Definieren Sie: messbare Funktion, Konvergenz fast überall, fast gleichmäßig und im Maß.

   (b) $f_n, n \in \mathbb{N}$ und f seien reellwertige messbare Funktionen auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

      i. Zeigen Sie: wenn $f_n \to f$ fast überall und g stetig ist, dann $g \circ f_n \to g \circ f$ fast überall.

      ii. Zeigen Sie: wenn $f_n \to f$ im Maß und g gleichmäßig stetig ist, dann $g \circ f_n \to g \circ f$ im Maß.

      iii. Zeigen Sie: wenn μ endlich ist, dann genügt im vorigen Punkt die Stetigkeit von g.

      iv. Geben Sie ein Beispiel für eine stetige Funktion g und eine Folge f_n, die im Maß konvergiert, aber für die $g \circ f_n$ nicht im Maß konvergiert.

4. (a) Definieren Sie: Integral einer nichtnegtiven messbaren Funktion, Erwartungswert, Varianz, gleichmäßige Integrierbarkeit.

   (b) Zeigen Sie: wenn die unabhängigen Zufallsvariablen $(X_n, n \in \mathbb{N})$ nichtnegativ sind, dann genügt für die Konvergenz von $\sum_n X_n$ die Konvergenz der ersten beiden Reihen aus dem Dreireihensatz.