

Schriftliche Prüfung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 - VO Doz. Grill

7. Dezember 2022

zweistündig ohne Unterlagen

1. (a) Definieren Sie: Ring, Semiring, Sigmaring, Algebra, monotonen System.
(b) Formulieren und beweisen Sie das monotone class theorem.
2. (a) Definieren Sie: Lebesgue-Stieltjes Maßfunktion, Verteilungsfunktion, Verteilungsfunktion im engeren Sinn, Regularität eines Maßes.
(b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $F(x_1, x_2) = g(x_1 + x_2)$ ist genau dann eine zweidimensionale Verteilungsfunktion, wenn g konvex ist.
3. (a) Definieren Sie: messbare Funktion, Borel-messbare Funktion, Konvergenz fast überall, Konvergenz fast gleichmäßig und Konvergenz im Maß.
(b) Formulieren und beweisen Sie den Approximationssatz für messbare Funktionen.
4. (a) Definieren Sie: Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion, Erwartungswert, Varianz, gleichmäßige Integrierbarkeit.
(b) Gegeben ist die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x + 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ (x + 1)^2 & \text{für } 1 \leq x < 2, \\ 10 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\int F d\mu_F$.