

Schriftliche Prüfung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 1 - VO Doz. Grill

26. Juni 2023

zweistündig ohne Unterlagen

1. (a) Definieren Sie: Mengenfunktion, Additivität, Sigmaadditivität, Inhalt, Maßfunktion, äußere Maßfunktion, von einem Maß auf einem Ring erzeugte äußere Maßfunktion, messbare Menge.
(b) Ω_1 und Ω_2 seien zwei nichtleere Mengen, $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine Abbildung, μ_2^* eine äußere Maßfunktion auf Ω_2 . Zeigen Sie, dass durch $\mu_1^*(A) = \mu_2^*(f(A))$ eine äußere Maßfunktion auf Ω_1 definiert ist, und dass $f^{-1}(A)$ bezüglich μ_1^* messbar ist, wenn A bezüglich μ_2^* messbar ist.
2. (a) Definieren Sie: Lebesgue-Stieltjes Maßfunktion, Verteilungsfunktion, Verteilungsfunktion im engeren Sinn, Regularität eines Maßes.
(b) Zeigen Sie, dass jede Lebesgue-Stieltjes-Maßfunktion regulär ist.
3. (a) Definieren Sie: messbare Funktion, Borel-messbare Funktion, Konvergenz fast überall, Konvergenz fast gleichmäßig und Konvergenz im Maß.
(b) Formulieren und beweisen Sie den Approximationssatz für messbare Funktionen.
4. (a) Definieren Sie: Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion, Erwartungswert, Varianz, gleichmäßige Integrierbarkeit.
(b) Die Zufallsvariable X hat eine Verteilung mit der Dichte

$$f_X(x) = c(1 - x^2)_+.$$

Bestimmen Sie die Konstante c , die Verteilungsfunktion F_X , Erwartungswert und Varianz von X .