Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
Prüfungsbeispiele

Karl Grill
Institu für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
TU Wien

11. Juni 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Mengensysteme und Maßfunktionen

1. (a) Definieren Sie Maßfunktion, endliche Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion, äußere Maßfunktion.

   (b) Formulieren und beweisen Sie den Fortsetzungssatz für Maßfunktionen.

   (c) Ω sei eine beliebige Menge und für $A \subseteq \Omega$

   $$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } A = \emptyset, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass μ^* eine äußere Maßfunktion ist und bestimmen Sie das System der μ^*-messbaren Mengen.

2. Gegeben Sei die folgende Funktion auf $2^{\mathbb{R}}$:

   $$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A = \emptyset, \\ 1 & \text{wenn } 1 \leq |A| < \infty, \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass μ^* eine äußere Maßfunktion ist und bestimmen Sie das System der μ^*-messbaren Mengen.

3. (a) Definieren Sie Ring, Semiring, monotones System, Dynkin-System, Algebra, Sigmaalgebra.

   (b) Zeigen Sie: Wenn $\mathfrak{R}$ ein Ring ist, dann stimmt das von $\mathfrak{R}$ erzeugte monotone System mit dem erzeugten Sigmaring überein.

4. (a) Definieren sie Maßfunktion, endliche Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion, äußere Maßfunktion, von einem Maß erzeugte äußere Maßfunktion.

   (b) Zeigen Sie, dass eine äußere Maßfunktion auf dem System der messbaren Mengen ein Maß bildet.

5. (a) $\mathfrak{S}$ sei eine Sigmaalgebra über Ω, $C \subset \Omega$. Zeigen Sie

   $$\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{S} \cup \{C\}) = \{(A \cap C) \cup (B \cap C^c), A, B \in \mathfrak{S}\}.$$

   (b) R sei ein Ring über Ω. Zeigen Sie

   $$\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R} \cup \{A : A^c \in \mathfrak{R}\}.$$

6. (a) Definieren Sie Ring, Semiring, monotones System, Dynkin-System.

   (b) Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$. Für $A \in \mathfrak{S}$ sei

   $$\mathfrak{U}(A) = \{B : \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\}$$

   das System aller Mengen, die von A unabhängig sind. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{U}(A)$ ein Dynkin-System ist.

7. (a) Definieren Sie: äußeres Maß, Messbarkeit nach Caratheodory, von einer Maßfunktion erzeugtes Maß.
   (b) Zeigen Sie: wenn μ_n^* äußere Maße über derselben Menge sind, dann auch $\sup_n \mu_n^*$.

8. $\mathfrak{T}_i, i = 1, 2$ seien Semiringe über den Mengen $\Omega_i, i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass

$$\{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathfrak{T}_i, i = 1, 2\}$$

ein Semiring über $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist.

9. μ und ν seien zwei Maße auf dem Ring $\mathfrak{R}$. Zeigen Sie:
   (a) $(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$.
   (b) $\mathfrak{M}_{\mu^*+\nu^*} \supseteq \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*}$
   (c) Falls μ und ν sigmaendlich sind, dann gilt im vorigen Punkt Gleichheit.

10. (a) Definieren Sie die Begriffe Semiring, Ring, Sigmaring, monotones System, Dynkin-System.
    (b) Zeigen Sie, dass das von einem Ring erzeugte monotone System mit dem erzeugten Sigmaring übereinstimmt.
    (c) Bestimmen Sie alle Ringe über $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

11. (a) Definieren Sie: äußeres Maß, Carathéodory-Messbarkeit, Vervollständigung eines Sigmarings bezüglich eines Maßes.
    (b) Zeigen Sie, dass die μ^*-messbaren Mengen eine Sigmaalgebra bilden und μ^* darauf ein Maß ist.

12. Zeigen Sie: Falls μ_n für jedes n eine Maßfunktion auf $(\Omega, \mathfrak{S})$ ist, so ist auch $\mu = \sum_n \mu_n$ eine Maßfunktion.

13. Zeigen Sie: Falls μ_1 und μ_2 zwei äußere Maßfunktionen sind, so ist auch $\mu = \max(\mu_1, \mu_2)$ eine äußere Maßfunktion.

14. Es sei

$$\mathfrak{T} = \{A \subset \mathbb{R} : |A| \leq 2\}.$$

   (a) Zeigen Sie: $\mathfrak{T}$ ist ein Semiring.
   (b) Bestimmen Sie den von $\mathfrak{T}$ erzeugten Ring bzw. Sigmaring.
   (c) Was muss eine Mengenfunktion μ auf $\mathfrak{T}$ erfüllen, damit sie ein Maß ist.

15. Es sei $\Omega = (0, 1] \times (0, 1]$ und

$$\mathfrak{T} = \{(a, b] \times (0, 1] : 0 \leq a \leq b \leq 1\} \cup \{(0, 1] \times (a, b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

Ferner sei

$$\mu((a, b] \times (0, 1]) = \mu((0, 1] \times (a, b]) = b - a.$$

(a) Zeigen Sie: μ ist ein Inhalt auf $\mathfrak{T}$.

(b) Zeigen Sie: $\mathfrak{T}$ ist kein Semiring.

(c) Zeigen Sie: Die Fortsetzung von μ zu einem Inhalt auf dem erzeugten Ring ist nicht eindeutig bestimmt.

16. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig (gleichverteilt) gewählte Permuation von n Elementen keinen Fixpunkt hat.

17. Ein Würfel wird einmal geworfen, X sei die erzielte Augenzahl. Anschließend werden in eine Urne X weiße und eine schwarze Kugel gelegt, und eine Kugel wird gezogen. A sei das Ereignis, dass die schwarze Kugel gezogen wurde. Bestimmen Sie

    (a) $\mathbf{P}(A)$,

    (b) $\mathbf{P}(X = 3|A)$.

18. Stellen Sie fest, welche der folgenden Mengenfunktionen auf $2^{\mathbb{R}}$ äußere Maße sind. Bestimmen Sie für die äußeren Maßfunktionen jeweils das System der μ^*-messbaren Mengen.

    (a) $\mu^*(A) = |A|$,

    (b)
$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } |A| < \infty, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

    (c)
$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \operatorname{card}(A) \leq \aleph_0, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

    (d)
$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } A = \emptyset, \\ 2 & \text{wenn } A = \mathbb{R}, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

19. (a) Definieren Sie: Ring, Semiring, Sigmaring, Algebra, Sigmaalgebra, Dynkin-System, monotones System.

    (b) Von welchem Typ sind folgende Mengensysteme über $\Omega = \mathbb{R}$?

$$\mathfrak{C}_1 = \{A \subseteq R : |A| < \infty\},$$

$$\mathfrak{C}_2 = \{A \subseteq R : |A| < 5\},$$

$$\mathfrak{C}_3 = \{A \subseteq R : |A| < \infty \text{ gerade}\},$$

$$\mathfrak{C}_4 = \{A \subseteq R : \operatorname{card}(A) \leq \aleph_0\}.$$

20. (a) Definieren Sie: Maßfunktion, endliche Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion, äußere Maßfunktion, von einem Maß auf einem Ring erzeugte äußere Maßfunktion, messbare Menge.

    (b) Zeigen Sie, dass das System $\mathfrak{M}$ der μ^*-messbaren Mengen eine Sigmaalgebra ist, und dass die Einschränkung von μ^* auf $\mathfrak{M}$ ein Maß ist.

21. (a) Definieren Sie: Ring, Semiring, Sigmaring, Algebra, Sigmaalgebra, Dynkin-System, monotones System.

    (b) Formulieren und beweisen Sie das monotone class theorem.

22. (a) Definieren Sie: Maßfunktion, endliche Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion, äußere Maßfunktion, von einem Maß auf einem Ring erzeugte äußere Maßfunktion.

    (b) μ und ν seien zwei Maßfunktionen auf dem Ring $\mathfrak{R}$. Zeigen Sie:

    $$(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$$

    und

    $$\mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*} \subseteq \mathfrak{M}_{\mu^*+\nu^*}.$$

23. (a) Definieren Sie: Ring, Semiring, Sigmaring, Algebra, Sigmaalgebra, Dynkin-System.

    (b) μ und ν seien zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Messraum $(\Omega, \mathfrak{S})$. Zeigen Sie, dass

    $$\mathfrak{D} = \{A \in \mathfrak{S} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

    ein Dynkin-System ist.

24. Gegeben sind das Mengensystem

    $$\mathfrak{C} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$$

    über $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und darauf die Mengenfunktion μ mit

    $$\mu(\emptyset) = \mu(\{1\}) = \mu(\{4, 5\}) = 0,$$

    $$\mu(\{1, 2\}) = \mu(\{3\}) = 1,$$

    $$\mu(\{1, 2, 3\}) = 2.$$

    Verifizieren Sie, dass $\mathfrak{C}$ ein Semiring und μ ein Maß ist, und bestimmen Sie die Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$, das erzeugte äußere Maß μ^* und das System der μ^*-messbaren Mengen.

25. (a) Definieren Sie: äußere Maßfunktion, von einem Maß auf einem Ring erzeugte äußere Maßfunktion, messbare Menge.

(b) Auf $2^{\mathbb{R}}$ ist folgende Funktion gegeben:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } A \text{ höchstens abzählbar ist,} \\ 2 & \text{wenn } A^C \text{ höchstens abzählbar ist,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ^* eine äußere Maßfunktion ist, und bestimmen Sie das System der μ^*-messbaren Mengen.

(a) Definieren Sie: Ring, Semiring, Sigmaring, Algebra, Sigmaalgebra, monotones System.

(b) Von welchem Typ sind die folgenden Mengensysteme über $\Omega = \mathbb{R}$:

i. $\mathfrak{C} = \{A \subseteq \Omega : |A| \leq 5\}$,

ii. $\mathfrak{C} = \{A \subseteq \Omega : |A| < \infty\}$,

iii. $\mathfrak{C} = \{A \subseteq \Omega : \operatorname{card}(A) \leq \aleph_0\}$.

26. (a) Definieren Sie Maßfunktion, äußere Maßfunktion, messbare Menge.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A = \emptyset, \\ 2 & \text{für } A = \mathbb{R}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine äußere Maßfunktion über $\mathbb{R}$ definiert ist, und bestimmen Sie das System der μ^*-messbaren Mengen.

27. (a) Definieren Sie: Maßfunktion, Lebesgue-Stieltjes Maßfunktion, Messraum, Maßraum, Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Formulieren und beweisen Sie das Lemma von Borel-Cantelli.

28. (a) Definieren Sie Ring, Sigmaring, Algebra, Sigmaalgebra, von einem Mengensystem erzeugte Sigmaalgebra, Maßfunktion, Inhalt, endliche Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion.

(b) Zeigen Sie: Wenn $\mathfrak{R}$ ein Sigmaring über der Menge Ω ist, dann ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{R} \cup \{A \subseteq \Omega : A^C \in \mathfrak{R}\}$$

die von $\mathfrak{R}$ erzeugte Sigmaalgebra.

(c) Zeigen Sie: wenn $\mathfrak{R}$ ein Sigmaring ist, der Ω nicht enthält und μ ein endliches Maß auf $\mathfrak{R}$, dann ist μ beschränkt, also

$$a = \sup\{\mu(A) : A \in \mathfrak{R}\} < \infty$$

und für jedes $b \geq a$ durch

$$\mu_b(A) = \begin{cases} \mu(A) & \text{wenn } A \in \mathfrak{R}, \\ b - \mu(A) & \text{wenn } A^C \in \mathfrak{R} \end{cases}$$

ein Maß μ_b auf der von $\mathfrak{R}$ erzeugten Sigmaalgebra gegeben, das μ fortsetzt.

29. (a) Definieren Sie Semiring, Sigmaring, Ring, Algebra, Sigmaalgebra, monotones System, Dynkin-System.

    (b) Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{3, 4\}\}.$$

$$\mu(\{1\}) = \mu(\{3, 4\}) = \mu(\emptyset) = 0, \mu(\{2, 5\}) = \mu(\{1, 2, 5\}) = 1.$$

    Zeigen Sie, dass $\mathfrak{T}$ ein Semiring und μ ein Maß auf $\mathfrak{T}$ ist. Bestimmen Sie das von μ erzeugte äußere Maß μ^* und die Menge der μ^*-messbaren Mengen.

30. (a) Definieren Sie Semiring, Sigmaring, Ring, Algebra, Sigmaalgebra, monotones System, Dynkin-System.

    (b) Formulieren und beweisen Sie das monotone class theorem.

    (c) Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$. Stellen Sie fest, von welchem Typ $\mathfrak{T}$ ist und bestimmen Sie die von $\mathfrak{T}$ erzeugte Sigmaalgebra.

31. (a) Definieren Sie Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion, äußere Maßfunktion, von einem Maß auf einem Ring erzeugte äußere Maßfunktion.

    (b) Welche der folgenden Funktionen auf $2^{\mathbb{R}}$ sind äußere Maßfunktionen? Welche können als von einer Maßfunktion auf einem Ring erzeugte äußere Maßfunktionen dargestellt werden?

    i. $\mu^*(A) = |A|$.

    ii. $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } |A| < \infty, \\ 1 & \text{wenn } |A| = \infty. \end{cases}$

    iii. $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } A = \emptyset, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$

    iv. $\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } A = \emptyset, \\ 2 & \text{wenn } A = \mathbb{R}, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$

32. (a) Definieren Sie Semiring, Sigmaring, Ring, Algebra, Sigmaalgebra, monotones System, Dynkin-System.

    (b) Formulieren und beweisen Sie das monotone class theorem.

    (c) $\mathfrak{C}$ sei ein beliebiges nichtleeres Mengensytem über der Menge Ω. Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{R} = \{A \subseteq \Omega : \exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{C}^{\mathbb{N}} : A \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\}$$

    ein Sigmaring ist.

33. (Zum heutigen Welttierschutztag) Ein Tierschützer möchte in die Arktis fahren, um kuschelige Seehundbabies zu retten. Die Wahrscheinlichkeit, dass er überhaupt dorthin kommt, beträgt 0.4. Ist er einmal dort, kann er mit (bedingter) Wahrscheinlichkeit 0.3 tatsächlich Seehundbabies retten. Wenn ihm das gelingt, kehrt er danach mit Wahrscheinlichkeit 0.6 heil zurück, sonst mit Wahrscheinlichkeit 0.8. Sie treffen ihn nach seiner Rückkehr. Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass er Seehundbabies gerettet hat?

34. (a) Definieren Sie Semiring, Sigmaring, Ring, Algebra, Sigmaalgebra, monotones System, Dynkin-System.

    (b) $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A \in \mathfrak{S}$,

    $$\mathfrak{U} = \{B \in \mathfrak{S} : \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\}.$$

    Zeigen Sie, dass $\mathfrak{U}$ ein Dynkin-System ist.

35. (a) Definieren Sie: Lebesgue-Stieltjes Maßfunktion, Verteilungsfunktion, Verteilungsfunktion im engeren Sinn, Regularität eines Maßes.

    (b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $F(x_1, x_2) = g(x_1 + x_2)$ ist genau dann eine zweidimensionale Verteilungsfunktion, wenn g konvex ist.

36. (a) Definieren Sie Maßfunktion, endliche Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion, äußere Maßfunktion.

    (b) Für $A \subseteq \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen gegeben:

    i.
    $$\mu^*(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\},$$

    ii.
    $$\mu^*(A) = \sup\{|x| : x \in A\},$$

    iii.
    $$\mu^*(A) = \sup\{x : x \in A, x \geq 0\},$$

    immer mit der üblichen Konvention $\sup \emptyset = 0$.

    Stellen Sie fest, welche dieser Funktionen äußere Maßfunktionen sind, und bestimmen Sie für die äußeren Maßfunktionen jeweils das System der messbaren Mengen.

37. (a) Definieren Sie: Ring, Semiring,Sigmaring, Algebra, Sigmaalgebra, monotones System.

    (b) Bestimmen Sie alle Semiringe über $\Omega = \{1, 2, 3\}$, die den Ring 2^{Ω} erzeugen. Wie viele davon sind auch Semiringe im engeren Sinn?

38. (a) Definieren Sie: Semiring, Ring, Sigmaring, Algebra, monotones System.

    (b) Formulieren und beweisen Sie das monotone class theorem.

    (c) Auf $\Omega = \mathbb{R}$ sind der Durchmesser

$$d(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$$

(mit der Konvention $\sup \emptyset = 0$) und die Mengensysteme

$$\mathfrak{C}_1 = \{A \subseteq \mathbb{R}, d(A) < 2\},$$

$$\mathfrak{C}_2 = \{A \subseteq \mathbb{R}, d(A) \leq 2\}$$

$$\mathfrak{C}_3 = \{A \subseteq \mathbb{R}, d(A) < \infty\}$$

gegeben. Bestimmen Sie jeweils den Typ und speziell auch, ob es sich um ein monotones System handelt.

2 Lebesgue-Stieltjes Maße

1. Zeigen Sie:

$$F(x, y) = \begin{cases} xy^2 & \text{falls } y > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine zweidimensionale Verteilungsfunktion. Bestimmen Sie das Maß des Einheitskreises.

2. (a) Definieren Sie Maßfunktion, Lebesgue-Stieltjes Maßfunktion, Verteilungsfunktion.

   (b) Zeigen Sie, dass jede nichtfallende und rechtstetige Funktion Verteilungsfunktion eines Lebesgue-Stieltjes Maßes auf $\mathbb{R}$ ist.

   (c) Zeigen Sie, dass $F(x) = \min(x_1, x_2)$ zweidimensionale Verteilungsfunktion ist.

3. Gegeben sei die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x + 1 & \text{für } 1 \leq x < 2, \\ x^2 & \text{für } 2 \leq x \end{cases}.$$

Bestimmen Sie $\int e^{-x} d\mu_F(x)$.

4. Für welche n ist $(x_1 + \ldots + x_n)^2$ eine n-dimensionale Verteilungsfunktion?

5. Für welche n ist $F(x, y) = (x + y)^n$ zweidimensionale Verteilungsfunktion?

6. Zeigen Sie:

$$F(x, y) = \min(x, y)$$

ist eine zweidimensionale Verteilungsfunktion, und bestimmen Sie $\mu_F(]0, 1] \times]0, 1])$ und $\mu_F(\{(x, x) : 0 < x \leq 1\})$.

7. Zeigen Sie:
$$F(x,y) = \begin{cases} xy^2 & \text{falls } y > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
ist eine zweidimensionale Verteilungsfunktion. Bestimmen Sie das Maß des Einheitskreises.

8. Es sei
$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 1, \\ x^2 & \text{für } 1 < x \leq 2, \\ 5 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$
   (a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.
   (b) Bestimmen Sie $\mu_F(A)$ für $A = [0,2], (0,2), \mathbb{Q}, [-1,\infty)$.
   (c) Bestimmen sie $\int e^x d\mu_F(x)$.

9. (a) Definieren Sie: Maßfunktion, endliche Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion, Lebesgue-Stieltjes Maßfunktion, Regularität von oben, Regularität von unten, Regularität von Maßen.
   (b) Zeigen Sie, dass Lebesgue-Stieljes Maße regulär sind.

10. Gegeben ist die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 2x & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 8 & \text{für } x \geq 3. \end{cases}$$
Weisen Sie nach, dass F eine Verteilungsfunktion ist, und bestimmen Sie $\mu_F(]0,1])$, $\mu_F([0,1])$, $\mu_F(]0,1[)$ und $\mu_F(\mathbb{Q})$.

11. Gegeben ist die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 0, \\ 1 & \text{wenn } 0 \leq x < 1, \\ x^2 & \text{wenn } 1 \leq x < 2, \\ 5 & \text{wenn } x \geq 2. \end{cases}$$
   (a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.
   (b) Bestimmen Sie $\mu_F(]0,1[), \mu_F([0,2]), \mu_F(\mathbb{Q})$.
   (c) Bestimmen Sie $\int e^x d\mu_F(x)$.

12. (a) Definieren Sie Lebesgue-Stieltjes Maß, Verteilungsfunktion.
   (b) F_1 und F_2 seien zwei eindimensionale Verteilungsfunktionen. Zeigen Sie, dass
$$F(x_1,x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$$
   eine zweidimensionale Verteilungsfunktion ist.

13. (a) Definieren Sie Maßfunktion, endliche Maßfunktion, sigmaendliche Maßfunktion, Lebesgue-Stieltjes-Maßfunktion, Verteilungsfunktion.

    (b) Die Zufallsvariable X ist $N(7,16)$-normalverteilt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $[X < 10]$, $[X > 2]$ und $[|X| < 4]$.

14. (a) Definieren Sie: Lebesgue-Stieltjes Maßfunktion, Verteilungsfunktion. Zeigen Sie, dass durch

$$F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$$

eine zweidimensionale Verteilungsfunktion gegeben ist, und stellen Sie μ_F möglichst einfach dar.

3 Messbare Funktionen

1. Es sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathfrak{S} = 2^{\mathbb{N}}$, $\mu(A) = \sum_{x \in A} 2^{-x}$. Wann konvergiert die Funktionenfolge f_n im Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$
    (a) fast überall
    (b) fast gleichmäßig
    (c) im Maß?

2. Es sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathfrak{S} = 2^{\mathbb{N}}$ und $\mu(A) = |A|$. Wann konvergiert die Folge f_n in $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$
    (a) fast überall
    (b) fast gleichmäßig
    (c) im Maß?

3. (a) Bestimmen Sie die kleinste σ-Algebra $\mathfrak{S}$ über $\mathbb{Z}$, bezüglich der die Funktion $f(x) = x^2$ messbar ist.

    (b) Welche Bedingung muss eine Funktion $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ erfüllen, damit sie messbar bezüglich $\mathfrak{S}$ ist?

4. Definieren Sie Konvergenz fast überall, fast gleichmäßig, im Maß, fast überall gleichmäßig, im p-ten Mittel.

    In welchem dieser Sinne konvergieren die folgenden Funktionenfolgen auf dem Maßraum $([0,1], \mathfrak{B} \cap [0,1], \lambda)$?
    (a) $f_n(x) = x/n$,
    (b) $F_n(x) = (nx)^{-1/2}$,
    (c) $f_n(x) = x^n$,
    (d) $f_n(x) = I_{[\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor]}(x)$.

5. (a) Definieren Sie Konvergenz fast überall, fast gleichmäßig, fast überall gleichmäßig, im Maß.

(b) In welchem Sinn konvergiert die Folge

$$f_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{x}}$$

auf dem Maßraum $([0,1], \mathfrak{B} \cap [0,1], \lambda)$? Für welche Werte von p konvergiert sie im p-ten Mittel?

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei überall differenzierbar. Zeigen Sie, dass f' Borel-messbar ist.

7. (a) Definieren Sie: messbare Funktion, Treppenfunktion, Konvergenz im Maß, Konvergenz fast überall, Konvergenz fast gleichmäßig.

   (b) Formulieren und beweisen Sie den Approximationssatz für reellwertige messbare Funktionen.

8. (a) Definieren Sie: messbare Funktion, Treppenfunktion, Konvergenz im Maß, Konvergenz fast überall, Konvergenz fast gleichmäßig.

   (b) In welchem Sinn (fast überall gleichmäßig/fast gleichmäßig/fast überall/im Maß) konvergieren die folgenden Folgen in $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$?

      i. $f_n(x) = \sin(x)/n$,
      ii. $f_n(x) = e^{-n|x|}$,
      iii. $f_n(x) = x/n$,
      iv. $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \le x \le \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

9. (a) Definieren Sie: messbare Funktion, Treppenfunktion, Konvergenz im Maß, Konvergenz fast überall, Konvergenz fast gleichmäßig.

   (b) In welchem Sinn (fast überall gleichmäßig/fast gleichmäßig/fast überall/im Maß) konvergieren die folgenden Folgen in $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$?

      i. $f_n(x) = \sin(x)/n$,
      ii. $f_n(x) = e^{-n|x|}$,
      iii. $f_n(x) = x/n$,
      iv. $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \le x \le \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

10. (a) Definieren Sie: messbare Funktion, Treppenfunktion, Konvergenz im Maß, Konvergenz fast überall, Konvergenz fast gleichmäßig.

   (b) $f_n, n \in \mathbb{N}$ und f seien reellwertige messbare Funktionen auf dem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$. Zeigen Sie:

      i. Wenn $f_n \to f$ fast überall und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann $g \circ f_n \to g \circ f$ fast überall.
      ii. Wenn $f_n \to f$ im Maß und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, dann $g \circ f_n \to g \circ f$ im Maß.

iii. Geben Sie ein Beispiel einer Folge f_n und einer stetigen Funktion g, sodass f_n im Maß konvergiert, aber nicht $g \circ f_n$.

11. (a) Definieren Sie: Konvergenz fast überall, fast überall gleichmäßig, fast gleichmäßig, im Maß.

    (b) Gegeben ist der Maßraum $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ mit $\mu(\{x\}) = 2^{-x}, x \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass in diesem Maßraum die Konvergenzen fast überall, fast gleichmäßig und im Maß äquivalent sind.

12. (a) Definieren Sie messbare Funktion, maßtreue Funktion.

    (b) Auf $\Omega = \mathbb{N}$ ist die Funktion

    $$f(x) = x^2 - 3x$$

    gegeben. Bestimmen Sie die kleinste Sigmaalgebra $\mathfrak{S}$ über Ω, für die f $\mathfrak{S}$-messbar ist.

13. (a) Definieren Sie: messbare Funktion, maßtreue Funktion, Konvergenz fast überall, Konvergenz im Maß.

    (b) Auf $\mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = x^2$ gegeben.

    i. Bestimmen Sie die kleinste Sigmaalgebra $\mathfrak{S}$, bezüglich der f messbar ist.

    ii. Was muss die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen, damit sie bezüglich $\mathfrak{S}$ messbar ist?

14. (a) Definieren Sie messbare Funktion, Borel-messbare Funktion, maßtreue Funktion.

    (b) Es sei $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$.

    i. Bestimmen Sie die kleinste Sigmaalgebra $\mathfrak{S}$ über Ω, für die f $\mathfrak{S}$-messbar ist.

    ii. Von $g : (\Omega, \mathfrak{S}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ist bekannt, dass $g(x) = x$ für alle $x \in \Omega \setminus \{1\}$. Welchen Wert hat $g(1)$?

15. (a) Definieren Sie Konvergenz im Maß, fast überall, fast gleichmäßig, fast überall gleichmäßig.

    (b) (X_n) sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass genau dann fast sicher

    $$\lim_{n\to\infty} X_n = 0$$

    gilt, wenn für jedes $\epsilon > 0$

    $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) < \infty).$$

16. (a) Definieren Sie: messbare Funktion, Treppenfunktion, Konvergenz im Maß, Konvergenz fast überall, Konvergenz fast gleichmäßig.

(b) (X_n) sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass

$$X_n \to 0 \text{ in Wahrscheinlichkeit}$$

genau dann gilt, wenn für alle $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = 0,$$

und

$$X_n \to 0 \text{ fast sicher,}$$

wenn für alle $\epsilon > 0$

$$\sum_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) < \infty$$

17. Gegeben ist $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^2 - x$.

   (a) Bestimmen Sie die Kleinste Sigmaalgebra $\mathfrak{S}$ über Ω, bezüglich der f messbar ist.

   (b) von der Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ sind die Werte $g(-2) = 1$, $g(-1) = 4$ und $g(0) = 0$ bekannt. Ergänzen Sie die fehlenden Werte so, dass g bezüglich $\mathfrak{S}$ messbar ist.

4 Das Integral

1. Es sei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } 0 \le x < 1 \\ (x+1)^2 & \text{für } 1 \le x \le 2 \\ 9 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie: F ist eine Verteilungsfunktion

   (b) Bestimmen Sie $\int f d\mu_F$ für $f(x) = x^2$.

2. Es sei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{falls } x \ge 0. \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie: F ist eine Verteilungsfunktion.

   (b) Bestimmen Sie $\int f(x)dF(x)$ für $f(x) = e^{-x}$.

3. Ein Versuch besitzt die möglichen Ausgänge $\{\omega_1, \dots \omega_m\}$. Ein Spieler beginnt mit einem Kapital K_0 zu spielen und setzt den Anteil q_1 seines Kapitals auf Ausgang ω_1, q_2 auf ω_2 usw. ($q_i \ge 0$, $\sum q_i = 1$). Wenn Ausgang ω_i gezogen wird, wird das m-fache des Einsatzes auf diesen Ausgang als Gewinn ausgezahlt, die anderen Einsätze gehen verloren. Nach der ersten

Runde hat der Spieler also ein Kapital $K_1 = mq_i K_0$, wenn ω_i gezogen wurde. In jeder folgenden Runde wird das Kapital K_{n-1} wieder im Verhältnis $q_1 : q_2 : \ldots : q_m$ aufgeteilt. Die Ergebnise der einzelnen Ziehungen seien unabhängig.

(a) Wie groß ist das Kapital K_n nach n Runden?

(b) Gegen welchen Wert konvergiert $(1/n)\log(K_n)$?

(c) Welche Aufteilung $q_1, \ldots, q_n$ ist optimal?

4. Zwei Spieler A und B spielen folgendes Spiel: beginnend mit A wird abwechselnd gewürfelt, bis ein Spieler gewinnt. A gewinnt, wenn er eine 3 oder 6 würfelt, B gewinnt, wenn er eine gerade Zahl würfelt.

   (a) Ist dieses Spiel fair?

   (b) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass B gewinnt, wenn A das erste Spiel verliert.

5. (a) Definieren Sie das Integral einer nichtnegativen Treppenfunktion, einer nichtnegativen messbaren Funktion, einer messbaren und einer fast überall messbaren Funktion.

   (b) Es sei
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x+1 & \text{für } 1 \le x < 2, \\ 2x^2 & \text{für } 2 \le x < 3, \\ 20 & \text{für } 3 \le x. \end{cases}$$
   Überzeugen Sie sich, dass F eine Verteilungsfunktion ist und bestimmen Sie $\int f\, d\mu_F$ für $f(x) = e^x$.

   (c) Formulieren und beweisen Sie den Satz von der Konvergenz durch Majorisierung.

6. X sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Zeigen Sie für $\lambda > 0$
$$\mathbb{P}(X \ge \lambda) \le \frac{1}{1+\lambda^2}.$$
   (Wenden Sie die Ungleichung von Markov auf $(X+c)^2, c > 0$ an und bestimmen Sie die optimale Wahl für c).

7. (a) Definieren Sie: Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion, integrierbare Funktion, gleichmäßige Integrierbarkeit.

   (b) Gegeben ist die Verteilungsfunktion
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x^3 & \text{für } 0 \le x < 1, \\ x+1 & \text{für } 1 \le x < 2 \\ x^2 & \text{für } x \ge 2. \end{cases}$$
   Bestimmen Sie $\int e^{-x} d\mu_F(x)$.

8. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen, auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Gegen welchen Wert konvergiert

$$(\prod_{i=1}^{n} X_i)^{1/n}?$$

9. (a) Formulieren und beweisen Sie das starke Gesetz der großen Zahlen von Kolmogorov.

   (b) (a_n) sei eine Folge von reellen Zahlen, (X_n) unabhängig mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_n a_n X_n$$

   genau dann fast sicher konvergiert, wenn $\sum a_n^2 < \infty$.

10. Auf $[0,1]$ ist folgende Funktion gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{falls } x = p/q,\ p, q \in \mathbb{N},\ \mathrm{ggT}(p,q) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie dass f Riemann-integrierbar ist und bestimmen Sie $\int_0^1 f(x)dx$.

11. Es sei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ (x+1)^2 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 9 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie: F ist eine Verteilungsfunktion

   (b) Bestimmen Sie $\int f d\mu_F$ für $f(x) = x^2$.

12. Ein Würfel wird einmal geworfen, X sei die erzielte Augenzahl. Anschließend werden X Münzen geworfen. Y sei die Anzahl der "Köpfe". Bestimmen sie die Varianz von Y und die bedingte Erwartung von X unter der Bedingung $Y = 3$.

13. X und Y seien unabhängig gleichverteilt auf $[0,1]$, $U = \min(X,Y)$, $V = \max(X,Y)$. Bestimmen Sie die Kovarianz von U und V sowie die Varianz von U.

14. In einer Urne befinden sich 3 schwarze und 5 weiße Kugeln. Es wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis eine weiße Kugel erscheint. X sei die Anzahl der benötigten Ziehungen. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

15. X sei Poissonverteilt mit Parameter λ; die bedingte Verteilung von Y unter der Bedingung $X = x$ sei binomial mit Parametern x und p.

(a) Die Verteilung von Y,

(b) Die bedingte Verteilung von X unter der Bedingung $Y = y$.

16. X habe eine Verteilung mit der Dichte

$$f(x) = ax(1-x) \ (0 \leq x \leq 1).$$

Bestimmen Sie a sowie Erwartungswert und Varianz von X.

17. Ein Würfel wird 10 mal geworfen. Bestimmen Sie mit den Ungleichungen von Markov und Chebychev obere Abschätzungen für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen mindestens 50 beträgt.

18. Formulieren und beweisen Sie den Satz von der dominierten Konvergenz.

19. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$, (a_n) eine Folge von reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X_n$$

genau dann fast sicher konvergiert, wenn

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 < \infty.$$

20. (a) Definieren Sie das Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion.

    (b) (Resolute Minderheit) Bei einer Umfrage sind 1000000 Personen wahlberechtigt. Davon sind 10000 unbedingt dafür, die restlichen Personen sind indifferent und entscheiden bei der Abstimmung mit Wahrscheinlichkeit 1/2 dafür, mit Wahrscheinlichkeit 1/2 dagegen. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Entscheidung negativ ausfällt, mit Hilfe der Ungleichung von Chebychev ab.

21. (a) Definieren Sie das Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion.

    (b) Formulieren und beweisen Sie den Satz von der dominierten Konvergenz.

22. (a) Definieren Sie das Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion.

    (b) Gegeben ist die folgende Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0, \\ x^2 + 1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 3x & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

    Bestimmen sie $\int e^{-|x|} d\mu_F(x)$.

23. (a) Definieren Sie das Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion.

(b) Formulieren und beweisen Sie den Satz von der dominierten Konvergenz.

(c) $(X_n, n \in \mathbb{N})$ sei eine Folge von unabhängigen, auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$Y_n = (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{1/n}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_n Y_n$.

24. Gegeben ist die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 0, \\ 1 & \text{wenn } 0 \leq x < 1, \\ x^2 & \text{wenn } 1 \leq x < 2, \\ 5 & \text{wenn } x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

(b) Bestimmen Sie $\mu_F(]0,1[), \mu_F([0,2]), \mu_F(\mathbb{Q})$.

(c) Bestimmen Sie $\int e^x d\mu_F(x)$.

25. (a) Definieren Sie das integral einer nichnegativen messbaren Funktion.

(b) Formulieren und beweisen Sie den Satz von der dominierten Konvergenz.

(c) Gegeben ist die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x+1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ x^2 & \text{für } 1 \leq x < 2, \\ 6 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\int x^2 d\mu_F(x)$.

26. (a) Definieren Sie: Integral einer nichnegativen messbaren Funktion, integrierbare Funktion.

(b) Formulieren und beweisen Sie den Satz von der monotonen Konvergenz.

27. Gegeben ist die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ x^2+1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 2x & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 8 & \text{für } x \geq 3. \end{cases}$$

Weisen Sie nach, dass F eine Verteilungsfunktion ist, und bestimmen Sie

$$\int e^x d\mu_F(x).$$

28. (a) Definieren Sie: Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion, Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariable.

    (b) Ein fairer Würfel wird 100 mal geworfen. Bestimmen Sie mit den Ungleichungen von Markov und Chebychev obere Schranken für die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Sechsen mindestens 21 ist.

29.

30. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen, auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}.$$

31. (a) Definieren Sie: Integral einer nichtnegativen messbaren Funktion, Erwartungswert, Varianz, gleichmäßige Integrierbarkeit.

    (b) Gegeben ist die Funktion $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x<0,\\ x+1 & \text{für } 0\le x\le 1,\\ (x+1)^2 & \text{für } 1\le x<2,\\ 10 & \text{für } x\ge 2.\end{cases}$$

    Bestimmen Sie $\int F d\mu_F$.

32. (a) Definieren Sie: Integral einer nichtnegtiven messbaren Funktion, Erwartungswert, Varianz, gleichmäßige Integrierbarkeit.

    (b) Zeigen Sie: wenn die unabhängigen Zufallsvariablen $(X_n, n\in\mathbb{N})$ nichtnegativ sind, dann genügt für die Konvergenz von $\sum_n X_n$ die Konvergenz der ersten beiden Reihen aus dem Dreireihensatz.

33. $(X_n, n\in\mathbb{N})$ sei eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X>x)=\frac{1}{x^10}$ für $x\ge 1$. Für welche $k\in\mathbb{N}$ hat

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

einen endlichen Grenzwert m_k? Bestimmen Sie in diesen Fällen den Wert von m_k.

5 Signierte Maße

1. Für welche $p\in\mathbb{R}$ gibt es ein signiertes Maß μ auf $([0,1],\mathfrak{B}([0,1])$ mit $\mu([0,x])=x^p\sin(1/x)$? Bestimmen Sie eine Hahn-Zerlegung für μ.

2. Für welche werte von $p \in \mathbb{R}$ gibt es eine signierte Maßfunktion ν auf $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ mit
$$\nu(\{x\}) = (-1)^x x^p?$$

3. (a) Definieren Sie: signiertes Maß, positive Menge, negative Menge, Hahn-Zerlegung, Jordan-Zerlegung.
   (b) Formulieren und beweisen Sie den Zerlegungssatz von Jordan.
   (c) Für welche Werte $n \in \mathbb{Z}$ gibt es eine signierte Maßfunktion μ auf $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}})$ mit $\mu(\{x\}) = x^n$?

4. Zeigen Sie, dass durch $\mu((0, x]) = e^{2x} - e^x$ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ eine signierte Maßfunktion festgelegt wird und bestimmen Sie eine Hahn-Zerlegung von μ.

5. Für welche Werte von a gibt es auf $([0, \infty), \mathfrak{B})$ eine signierte Maßfunktion μ_a mit $\mu_a([0, x)) = e^{ax}\sin(x)$? Bestimmen Sie eine Hahn-Zerlegung von μ_a.

6. (a) Definieren Sie signierte Maßfunktion, positive Menge, Hahn-Zerlegung, Jordan-Zerlegung.
   (b) Zeigen Sie, dass es auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ein signiertes Maß μ gibt mit
   $$\mu(]-\infty, x]) = e^{3x} - e^x.$$
   Bestimmen Sie eine Jordan-Zerlegung für μ.

7. (a) Definieren Sie signiertes Maß, positive Menge, Hahn-Zerlegung, Jordan-Zerlegung.
   (b) Formulieren und beweisen Sie den Zerlegungssatz von Jordan.
   (c) Für welche (reellen) Werte von p gibt es ein signiertes Maß μ_p auf $]0, 1]$ mit
   $$\mu_p(]0, x]) = x^p \sin(\log(x))$$
   für alle $x \in]0, 1]$? Bestimmen Sie in diesem Fall eine Hahn-Zerlegung von μ_p.

8. (a) Definieren Sie: signiertes Maß, positive Menge, Hahn-Zerlegung, Jordan-Zerlegung.
   (b) Zeigen Sie, dass es ein signiertes Maß auf $([0, 1], \mathfrak{B})$ gibt mit
   $$\mu([0, x]) = 3x^3 - 2x^2 \ (0 \leq x \leq 1).$$
   Bestimmen Sie eine Hahn-Zerlegung für μ.

9. (a) Definieren Sie: signiertes Maß, positive Menge, Hahn-Zerlegung, Jordan-Zerlegung.

(b) Auf $([0,1],\mathfrak{B})$ ist ein signiertes Maß μ mit

$$\mu([0,x]) = x^3 - x^2 (0 \leq x \leq 1)$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Hahnzerlegung.

10. (a) Definieren Sie: signierte Maßfunktion, positive Menge, negative Menge, Hahn-Zerlegung, Jordan-Zerlegung.

    (b) Formulieren und beweisen Sie den Zerlegungssatz von Jordan.

11. (a) Definieren Sie: signierte Maßfunktion, positive Menge, Hahn-Zerlegung, Jordan-Zerlegung.

    (b) Auf der Algebra

    $$\mathfrak{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| < \infty \text{ oder } |A^C| < \infty\}$$

    ist die Mengenfunktion

    $$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{wenn } |A| < infty, \\ -|A^C| & \text{sonst} \end{cases}$$

    gegeben. Zeigen Sie, dass μ sigmaadditiv ist, aber nicht zu einer signierten Maßfunktion auf der von $\mathfrak{A}$ erzeugten Sigmaalgebra fortgesetzt werden kann.

12. (a) Definieren Sie: signierte Maßfunktion, positive Menge, Hahn-Zerlegung, Jordan-Zerlegung.

    (b) Formulieren und beweisen Sie den Zerlegungssatz von Jordan.

    (c) Zeigen Sie, dass es auf $(]0,1],\mathfrak{B})$ eine signierte Maßfunktion μ mit $\mu(]0,x]) = x^2 - x^3$ für $0 \leq x \leq 1$ gibt, und bestimmen Sie eine Hahn-Zerlegung für μ.

13. (a) Definieren Sie: signierte Maßfunktion, positive Menge, Hahn-Zerlegung, Jordan-Zerlegung.

    (b) Formulieren und beweisen Sie den Zerlegungssatz von Jordan.

    (c) Für welche Werte von p gibt es ein signiertes Maß μ auf $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}})$ mit

    $$\mu(\{x\}) = \frac{(-1)^x}{1+|x|^p}?$$

6 Der Satz von Radon-Nikodym

1. Es sei

   $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$$

   und

   $$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: F und G sind Verteilungsfunktionen.

(b) Zeigen Sie: μ_F ist absolutstetig bezüglich μ_G und bestimmen Sie die Radon-Nikodym Dichte.

2. Es sei
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ (x+1)^2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 9 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$
und
$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$
Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_G bezüglich μ_F und die Radon-Nikodym Dichte des absolutstetigen Anteils.

3. Es sei
$$F(x,y) = \begin{cases} xy^2 & \text{falls } x, y > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: F ist eine zweidimensionale Verteilungsfunktion.

(b) Zeigen Sie: μ_F is absolutstetig bezüglich des zweidimensionalen Lebesguemaßes.

(c) Bestimmen Sie die Radon-Nikodym Ableitung von μ_F bezüglich des zweidimensionalen Lebesguemaßes.

4. Es sei
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 2 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$
und
$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x+1 & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ 3 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$
Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_G bezüglich μ_F und die Radon-Nikodym Dichte des absolutstetigen Anteils.

5. Es sei
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ x+1 & \text{falls } 0 \leq x < 2, \\ 4 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$
und
$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ x^2 & \text{falls } 0 \leq x < 2, \\ 4 & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: F und G sind Verteilungsfunktionen.

(b) Zeigen Sie, dass μ_G absolutstetig bezüglich F ist, und bestimmen Sie die Radon-Nikodym Dichte.

6. Es sei

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 1, \\ x^2 & \text{für } 1 < x \leq 2, \\ 5 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

   (a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

   (b) Bestimmen Sie $\mu_F(A)$ für $A = [0,2], (0,2), \mathbb{Q}, [-1,\infty)$.

   (c) Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_F bezüglich λ und die Radon-Nikodym Dichte des absolutstetigen Anteils.

   (d) Bestimmen sie $\int e^x d\mu_F(x)$.

7. (a) Definieren Sie absolute Stetigkeit und Singularität von Maßfunktionen.

   (b) Formulieren und beweisen Sie den Zerlegungssatz von Lebesgue.

   (c) Gegeben sind die Verteilungsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x+1 & \text{für } 1 \leq x < 2, \\ x^2 & \text{für } 2 \leq x \end{cases}$$

   und

$$G(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 1 \\ x^2 & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 10 & \text{für } 3 \leq x. \end{cases}$$

   Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_G bezüglich μ_F.

8. (a) Definieren Sie absolute Stetigkeit und Singularität zweier Maße, Lebesgue-Zerlegung.

   (b) F sei eine Verteilungsfunktion im engeren Sinn. Zeigen Sie, dass $G(x) = (F(x))^2$ Verteilungsfunktion eines Maßes ist, das bezüglich μ_F absolutstetig ist, und bestimmen Sie seine Radon-Nikodym-Ableitung.

9. Gegeben ist die Funktion

$$F(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 I_{[0,\infty)}(x_2).$$

   (a) Zeigen Sie, dass F eine zweidimensionale Verteilungsfunktion ist.

   (b) Zeigen Sie $\mu_F \ll \lambda_2$.

   (c) Bestimmen Sie $\frac{d\mu_F}{d\lambda_2}$.

10. (a) Definieren Sie: absolute Stetigkeit und Singularität von zwei Maßfunktionen, Radon-Nikodym Dichte.

(b) Gegeben sind die Verteilungsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0, \\ x^2 + 1 & \text{für } 0 \leq x < 2, \\ 7 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

und

$$G(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 1, \\ x^2 + 1 & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 11 & \text{für } x \geq 3. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_G bezüglich μ_F und die Radon-Nikodym-Dichte des absoutstetigen Anteils.

11. (a) Definieren Sie: absolute Stetigkeit und Singularität von zwei Maßfunktionen, Radon-Nikodym Dichte.

    (b) Auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ sind durch das Lebesguemaß λ und das Zählmaß ζ $(\zeta(A) = |A|)$ zwei Maße gegeben. Zeigen Sie, dass zwar $\lambda \ll \zeta$ gilt, aber λ nicht als unbestimmtes Integral bezüglich ζ dargestellt werden kann.

12. (a) Definieren Sie: absolute Stetigkeit und Singularität von zwei Maßfunktionen, Radon-Nikodym Dichte.

    (b) Zeigen Sie: Wenn $(\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{S}_2, \mu_2)$ zwei sigmaendliche Maßräume sind und ν_1 und ν_2 weitere (sigmaendliche) Maße mit $\nu_1 \ll \mu_1$ und $\nu_2 \ll \mu_2$, dann gilt auch

$$nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$$

und

$$\frac{d\nu_1 \times \nu_2}{d\mu_1 \times \mu_2}(\omega_1, \omega_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(\omega_1)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(\omega_2).$$

13. (a) Definieren Sie: absolute Stetigkeit und Singularität von Maßfunktionen, Radon-Nikodym-Dichte, Lebesgue-Zerlegung.

    (b) Gegeben ist die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 2x & \text{für } 1 \leq x < 3, \\ 8 & \text{für } x \geq 3. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_F bezüglich des Lebesguemaßes.

14. (a) Definieren Sie: absolute Stetigkeit und Singularität von Maßfunktionen, Radon-Nikodym-Dichte, Lebesgue-Zerlegung.

    (b) F sei eine Verteilungsfunktion. Zeigen Sie: $G = F^3$ ist die Verteilungsfunktion eines bezüglich μ_F absolutstetigen Maßes, und bestimmen Sie $\frac{d\mu_G}{d\mu_F}$.

15. (a) Definieren Sie: absolute Stetigkeit und Singularität von zwei Maßfunktionen, Radon-Nikodym-Dichte.

    (b) Gegeben sind die Verteilungsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0, \\ x^2 + 1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 2x & \text{für } 1 \leq x < 2, \\ 4 & \text{für } x \geq 2, \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ x^2 + 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

    Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_G bezüglich μ_F und die Radon-Nikodym Dichte des absolutstetigen Anteils.

    (a) Definieren Sie absolute Stetigkeit, Singularität von zwei Maßfunktionen, Radon-Nikodym Dichte, Lebesgue-Zerlegung

    (b) Formulieren und beweisen Sie den Zerlegungssatz von Lebesgue.

    (c) Gegeben ist die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x + 1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ x^2 & \text{für } 1 \leq x < 2, \\ 6 & \text{für } x \geq 2. \end{cases}$$

    Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_F bezüglich λ und die Radon-Nikodym Dichte des absolutstetigen Anteils.

7 Integralungleichungen und L_p-Räume

1. (a) Definieren Sie Konvergenz im p-ten Mittel, $\mathcal{L}_p$-Raum, L_p-Raum.

   (b) Formulieren und beweisen Sie die Ungleichung von Minkowski.

2. (a) Definieren Sie: p-fach integrierbare Funktion, $\mathcal{L}_p$-Raum, L_p-Raum.

   (b) Formulieren und beweisen Sie die Ungleichung von Minkowski.

   (c) Für welche Werte von p konvergiert $f_n(x) = (nx)^{-1/2}$ im Maßraum $([0,1], \mathfrak{B}, \lambda)$ im p-ten Mittel?

3. (a) Definieren Sie: p-fach integrierbare Funktion, $\mathcal{L}_p$-Raum, L_p-Raum, p-Norm.

   (b) Zeigen Sie, dass für $1 < p < \infty$ $L_1 \cap L\infty$ in L_p dicht liegt.

4. (a) Definieren Sie: p-fach integrierbare Funktion, p-Norm, $\mathcal{L}_p$-Raum, L_p-Raum.

   (b) Formulieren und beweisen Sie die Ungleichung von Minkowski.

8 Produkträume

1. μ_1 und μ_2 seien Maße mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x^2 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

   Ferner sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie $(\mu_1 \otimes \mu_2)(A)$.

2. (a) Definieren Sie das Produkt von zwei sigmaendlichen Maßräumen.
   (b) Formulieren und beweisen Sie den Satz von Fubini (für nichtnegative Funktionen).
   (c) F sei eine Maßfunktion im engeren Sinn. Zeigen Sie

$$\int (F(x + c) - F(x)) d\lambda(x) = c.$$

3. (a) Definieren Sie das Produkt von zwei sigmaendlichen Maßräumen.
   (b) Auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ist ein Maß μ gegeben durch

$$\mu(A) = \int_A |x| d\lambda(x).$$

   Bestimmen Sie $\mu \times \mu(\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\})$.

4. (a) Definieren Sie das Produkt von zwei sigmaendlichen Maßräumen.
   (b) Gegeben sei die Verteilungsfunktion

$$F(x) = x^2[x \geq 0].$$

   Bestimmen Sie

$$\mu_F \times \mu_F(\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}).$$

5. (a) Definieren Sie das Produkt von zwei sigmaendlichen Maßräumen.
   (b) Formulieren und beweisen Sie den Satz von Fubini.
   (c) $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i, \mu_i), i = 1, 2)$ seien zwei sigmaendliche Maßräume, $\nu_i \ll \mu_i, i = 1, 2$. Zeigen Sie $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ und $\frac{d\nu_1 \times \nu_2}{d\mu_1 \times \mu_2}(x) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2)$.

6. (a) Formulieren und beweisen Sie den Satz von Fubini.
   (b) F und G seien zwei eindimensionale Verteilungsfunktionen. Zeigen Sie

$$\int_{(a,b]} F(x) dG(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{(a,b]} G(x - 0) dF(x).$$

7. Bestimmen Sie
$$\lim_{M\to\infty}\int_{[0,M]}\frac{\sin(x)}{x}d\lambda(x).$$
(Verwenden Sie $1/x=\int_{[0,\infty)}e^{-xt}d\lambda(t)$ und den Satz von Fubini)

8. (a) Definieren Sie das Produkt von zwei sigmaendlichen Maßräumen.
   (b) $(\Omega,\mathfrak{S})$ sei ein Messraum, $f:(\Omega,\mathfrak{S})\to(\mathbb{R},\mathfrak{B})$. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen $\mathfrak{S}\times\mathfrak{B})$-messbar sind:
      i. $A_a=\{(x,y):f(x)<a<y\}$, $a\in\mathbb{R}$,
      ii. $\{(x,y):f(x)<y\}=\bigcup_{a\in\mathbb{Q}}A_a$,
      iii. $\{(x,y):f(x)>y\}$,
      iv. $\{(x,y):f(x)=y\}$.

9. (a) Definieren Sie das Produkt von zwei sigmaendlichen Maßräumen.
   (b) Formulieren und beweisen Sie den Satz von Fubini.
   (c) $(\Omega_i,\mathfrak{S}_i,\mu_i)$, $i=1,2$, seien zwei sigmaendliche Maßräume, ν_i, $i=1,2$ zwei weitere Maße mit $\nu_i\ll\mu_i$. Zeigen Sie
$$\nu_1\times\nu_2\ll\mu_1\times\mu_2$$
   und
$$\frac{d\nu_1\times\nu_2}{d\mu_1\times\mu_2}(\omega_1,\omega_2)=\frac{d\nu_1}{d\mu_1}(\omega_1)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(\omega_2).$$

9 Transformationssätze

1. X und Y seien unabhängig exponentialverteilt mit Parameter λ. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $S=X+Y$ und $Q=X/Y$. Sind S und Q unabhängig?

2. X und Y seien unabhängig standardnormalverteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von $S=X+Y$ und $Q=X/Y$.

3. X und Y seien unabhängig mit der Verteilungsfunktion
$$F_X(x)=e^{-e^{-x}}.$$
   (a) Bestimmen Sie die Momentenerzeugende M_X.
   (b) Bestimmen Sie die Verteilung von $X-Y$.

4. X und Y seien unabhängig exponentialverteilt mit Parameter λ. Bestimmen Sie die Verteilung von $X-Y$.

5. (a) Definieren Sie die verallgemeinerte Inverse F^{-1} einer Verteilungsfunktion.

(b) Zeigen Sie: wenn U auf $[0,1]$ gleichverteilt ist, dann ist $X = F^{-1}(U) \sim F$.

(c) Zeigen Sie: wenn F stetig ist und $X \sim F$, dann ist $F(X) \sim U([0,1])$.

6. ξ und η seien unabhängig exponentialverteilt mit Parameter λ bzw. μ. Bestimmen Sie die Dichte von $\xi + \eta$.

7. X und Y seien unabhängig identisch verteilt mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

   Bestimmen Sie die Dichte von $X + Y$.

8. X und Y seien unabhängig gammaverteilt: $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $S = X + Y$ und $Q = X/Y$. Sind S und Q unabhängig?

9. X und Y sind unabhängig identisch verteilt mit der Dichte

$$f(x) = 2x[0 \leq x \leq 1].$$

   Bestimmen Sie die Dichte von $X + Y$.

10 Null-Eins Gesetze

1. Formulieren und beweisen Sie das Null-Eins Gesetz von Kolmogorov für eine Folge von unabhängigen Ereignissen.

2. (a) Formulieren und beweisen Sie das 0-1-Gesetz von Kolmogorov für Ereignisse.

   (b) (X_n) sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, $\bar{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$. Zeigen Sie dass es Zahlen $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ gibt, sodass

$$\liminf \bar{X}_n = a, \limsup \bar{X}_n = b.$$

11 Charakteristische Funktionen

1. Bestimmen Sie die charakteristische Funktion der Gleichverteilung auf $[-1,1]$ und zeigen Sie, dass es keine unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen X und Y gibt, sodass $X - Y$ auf $[-1,1]$ gleichverteilt ist.

2. Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der Augenzahlen mindestens 100 beträgt, nicht kleiner als 0.9 ist (verwenden Sie eine geeignete Approximation)?

3. (a) Definieren Sie die schwache Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen und die Konvergenz in Verteilung einer Folge von Zufallsvariablen.

(b) Formulieren und beweisen Sie den zentralen Grenzwertsatz für eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen.

4. (a) Definieren Sie die schwache Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen und die Konvergenz in Verteilung einer Folge von Zufallsvariablen.

   (b) X_n sei binomialverteilt mit Parametern n und p_n und $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Zeigen Sie, dass (X_n) in Verteilung gegen eine Poissonverteilung konvergiert.

5. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in 500 Würfen eines fairen Würfels die Anzahl der Sechsen größer als 100 ist.

6. (a) Definieren Sie die schwache Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen und die Konvergenz in Verteilung einer Folge von Zufallsvariablen.

   (b) Formulieren und beweisen Sie den zentralen Grenzwertsatz für unabhängig identisch verteilte Zufallsvariable.

   (c) Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, mehr als 100 Sechsen zu würfeln, mindesten 0.9 beträgt?

7. (a) Definieren Sie die schwache Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen und die Konvergenz in Verteilung einer Folge von Zufallsvariablen.

   (b) Formulieren und beweisen Sie den zentralen Grenzwertsatz für unabhängig identisch verteilte Zufallsvariable.

   (c) $\mathbb{P}, \mathbb{P}_n, n \in \mathbb{P}_n$ seien Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und absolutstetig bezüglich des sigmaendlichen Maßes μ, f, f_n seien die zugehörigen Radon-Nikodym-Dichten. Zeigen Sie: wenn $f_n \to f$ punktweise, dann $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$.

8. (a) Definieren Sie die schwache Konvergenz einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ und die Konvergenz in Verteilung einer Folge von Zufallsvariablen.

   (b) $(X_n, n \in \mathbb{N})$ und X seien Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie dass (X_n) genau dann in Verteilung gegen X konvergiert, wenn für alle $x \in Z$ $\mathbb{P}(X_n = x) \to \mathbb{P}(X = x)$.

9. (a) Definieren Sie: schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Konvergenz in Verteilung, charakteristische Funktion.

   (b) Formulieren und beweisen Sie den zentralen Grenzwertsatz.

   (c) Ein fairer Würfel wird 1000 mal geworfen. Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen mehr als 3600 beträgt.

10. (a) Definieren Sie: schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Konvergenz in Verteilung, charakteristische Funktion.

    (b) Formulieren und beweisen Sie den zentralen Grenzwertsatz.

11. (a) Definieren Sie: schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Konvergenz in Verteilung, charakteristische Funktion.

    (b) Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen größer als 150 ist, mindestens 90% beträgt?

12. (a) Definieren Sie: schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Konvergenz in Verteilung, charakteristische Funktion.

    (b) Formulieren und beweisen Sie den zentralen Grenzwertsatz.

    (c) Ein fairer Würfel wird 100 mal geworfen. Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Sechsen mindestens 21 ist.

13. (a) Definieren Sie: schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Konvergenz in Verteilung, charakteristische Funktion.

    (b) Berechnen Sie die charakteristische Funktion für die Exponentialverteilung und die Laplaceverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

14. Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen mindestens 1000 beträgt, gröser als 0.9 ist (verwenden Sie eine geeignete Approximation)?

15. (a) Definieren Sie: schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen, Konvergenz in Verteilung, charakteristische Funktion.

    (b) Formulieren und beweisen Sie den zentralen Grenzwertsatz.

    (c) $(X_n, n \in \mathbb{N})$ sei eine Folge von unabhängigen, auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen,

$$Y_n = (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{1/n}.$$

    Bestimmen Sie (näherungsweise)

$$\mathbb{P}(Y_{50} \geq \mathbb{E}(Y_{50})).$$

16. (a) Definieren Sie: schwache Konvergenz, Konvergenz in Verteilung, charakteristische Funktion.

    (b) Formulieren und beweisen Sie den zentralen Grenzwertsatz

(c) (Resolute Minderheit) Bei einer Umfrage sind 1000000 Personen wahlberechtigt. Davon sind 2800 unbedingt dafür, die restlichen Personen sind indifferent und entscheiden bei der Abstimmung mit Wahrscheinlichkeit 1/2 dafür, mit Wahrscheinlichkeit 1/2 dagegen. Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit, dass die Entscheidung negativ ausfällt.

17. (Zum heutigen Welttierschutztag) Ein begeisterter Tierschützer sieht täglich im Fernsehen vier Werbespots, die zum Schutz bedrohter Tierarten auffordern. Jedesmal spendet er (unabhängig von allen anderen Spenden) mit Wahrscheinlichkeit 0.6 5 Euro, mit Wahrscheinlichkeit 0.3 10 Euro und mit Wahrscheinlicheit 0.1 20 Euro. Wieviel Geld muss er am Anfang des Jahres beiseite legen, damit seine Spenden während des Jahres (365 Tage) damit mit Wahrscheinlichkeit 0.9 abgedeckt sind (verwenden Sie eine geeignete Approximation)?

18. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$, (a_n) eine beschränkte Folge von reellen Zahlen mit $\sum_n a_n^2 = \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$$

in Verteilung gegen eine Standardnormalverteilung konvergiert.

12 Momente und die Momentenerzeugende

1. Formulieren und beweisen Sie das Gesetz vom iterierten Logarithmus für standardnormalverteilte Zufallsvariable.

2. (a) Definieren Sie: n-tes Moment einer Zufallsvariable, momentenerzeugende Funktion, kumulantenerzeugende Funktion.
   (b) Formulieren und beweisen Sie das Gesetz vom iterierten Logarithmus für normalverteilte Zufallsvariable.

3. (a) Definieren Sie: n-tes Moment einer Zufallsvariable, momentenerzeugende Funktion, kumulantenerzeugende Funktion.
   (b) Berechnen Sie die Momente und die Momentenerzeugende Funktion für die Laplaceverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

13 Martingale

1. (a) Definieren Sie Martingal, Submartingal, Stoppzeit.

(b) Formulieren und beweisen Sie die Maximalungleichung von Doob.

(c) $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig standardnormalverteilt, $S_k = \sum_{i \leq k} X_i$. Wenden Sie die Maximalungleichung auf e^{tS_n} an und bestimmen Sie eine möglichst gute Abschätzung für

$$\mathbb{P}(\max_{k \leq n} S_k \geq x) \ (x > 0).$$

2. (a) Formulieren und beweisen Sie den Martingal-Konvergenzsatz.

   (b) $\nu \ll \mu$ seien zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $((0,1], \mathfrak{B})$,

$$f_n(x) = \frac{\nu((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}])}{\mu((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}])}, x \in (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}], k = 0, \ldots 2^n - 1.$$

   Zeigen Sie, dass (f_n) ein Martingal ist und dass $f_n \to \frac{d\nu}{d\mu}$ μ-fast überall.

3. $(X_1, \ldots, X_{n+1})$ seien unabhängig und identisch verteilt mit endlichem Erwartungswert, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Zeigen Sie, dass

$$Y_i = \frac{S_{n+1} - S_i}{n+1-i}, i = 1, \ldots, n$$

   ein Martingal ist.

4. (a) Definieren Sie: Filtration, Martingal, Submartingal.

   (b) $(X_n, n \geq 1)$ sei eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_n) = 0$ und $\mathbb{V}(X_n) = 1$. Zeigen Sie, dass

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i \ (n \geq 0)$$

   und $S_n^2 - n$ Martingale sind.

5. (a) Definieren Sie: Filtration, Martingal, Submartingal, Stoppzeit.

   (b) Formulieren und beweisen Sie die Maximalungleichung von Doob.