Praktische Mathematik 1 für TPH **3.Klausur** 10.01.2023

Gruppe A

1. Betrachten Sie für $y = y(t)$ und $t > 0$ die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - \frac{2}{t^2} y = 0.$$

   (a) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $y(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, *eine Lösung* der Differentialgleichung.

   (b) Berechnen Sie mit Variation der Konstanten *eine zweite Lösung*.

2. Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung der Form

$$u_{xx} = \frac{1}{2} u_t,$$

wobei $u = u(x,t), 0 < x < 1$ und $t > 0$. Zusätzlich sind Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ und die Anfangsbedingung $u(x,0) = 2\sin(4\pi x)$ gegeben.

Verwenden Sie den Separationsansatz und berechnen Sie damit die Lösung der gegebenen Gleichung unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen.
Hinweis: Die Konstante κ ist negativ, setzen Sie daher die Konstante $\kappa = -\alpha^2$.

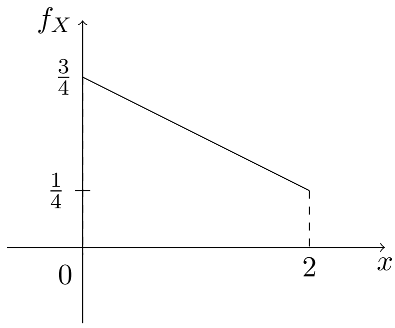
3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$2x\mathrm{e}^{2y} + y + a + \left(2x^2\mathrm{e}^{2y} + x\right) y' = 0.$$

   (a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Differentialgleichung exakt?

   (b) Bestimmen Sie für $a = 1$ ein erstes Integral.

4. Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f_X, gegeben durch die Skizze



.

   (a) Zeigen Sie, dass f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion darstellt.

   (b) Bestimmen Sie die zu f_X gehörige Verteilungsfunktion F_X und skizzieren Sie diese.

   (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable X.

   (d) Gegeben seien die Ereignisse $A = \{0 \leq X \leq \frac{2}{3}\}$ und $B = \{\frac{2}{9} \leq X \leq 2\}$. Berechnen Sie $P(B)$ und $P(A|B)$.

Gruppe B

1. Betrachten Sie für $y = y(t)$ und $t > 0$ die Differentialgleichung

$$\ddot{y} - \frac{2}{t^2} y = 0.$$

   (a) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $y(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, *eine Lösung* der Differentialgleichung.

   (b) Berechnen Sie mit Variation der Konstanten *eine zweite Lösung*.

2. Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung der Form

$$u_{xx} = \frac{1}{3} u_t,$$

   wobei $u = u(x,t), 0 < x < 1$ und $t > 0$. Zusätzlich sind Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ und die Anfangsbedingung $u(x,0) = 3\sin(4\pi x)$ gegeben.

   Verwenden Sie den Separationsansatz und berechnen Sie damit die Lösung der gegebenen Gleichung unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen.
   Hinweis: Die Konstante κ ist negativ, setzen Sie daher die Konstante $\kappa = -\alpha^2$.

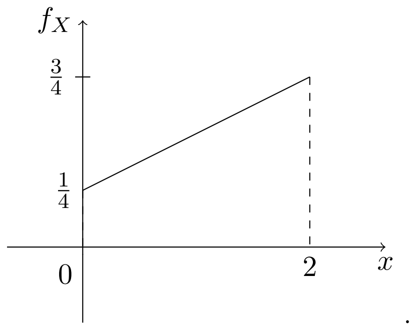
3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$3y^2 e^{3x} + y + \left(2ye^{3x} + x + a\right) y' = 0.$$

   (a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Differentialgleichung exakt?

   (b) Bestimmen Sie für $a = 1$ ein erstes Integral.

4. Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f_X, gegeben durch die Skizze



   (a) Zeigen Sie, dass f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion darstellt.

   (b) Bestimmen Sie die zu f_X gehörige Verteilungsfunktion F_X und skizzieren Sie diese.

   (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable X.

   (d) Gegeben seien die Ereignisse $A = \{0 \leq X \leq \frac{5}{4}\}$ und $B = \{\frac{3}{4} \leq X \leq 2\}$. Berechnen Sie $P(B)$ und $P(A|B)$.

Gruppe C

1. Betrachten Sie für $y = y(t)$ und $t > 0$ die Differentialgleichung

$$t^2 \ddot{y} - 6y = 0.$$

   (a) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $y(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, *eine Lösung* der Differentialgleichung.

   (b) Berechnen Sie mit Variation der Konstanten *eine zweite Lösung*.

2. Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung der Form

$$u_{xx} = \frac{1}{2} u_t,$$

   wobei $u = u(x,t), 0 < x < 1$ und $t > 0$. Zusätzlich sind Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ und die Anfangsbedingung $u(x,0) = 2\sin(4\pi x)$ gegeben.

   Verwenden Sie den Separationsansatz und berechnen Sie damit die Lösung der gegebenen Gleichung unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen.
   Hinweis: Die Konstante κ ist negativ, setzen Sie daher die Konstante $\kappa = -\alpha^2$.

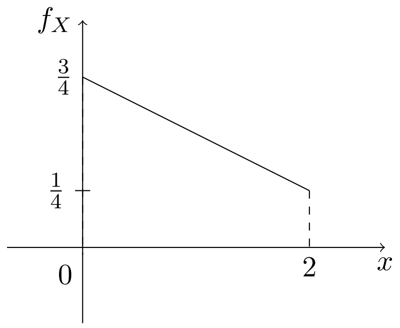
3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$3y^2 e^{3x} + y + \left(2ye^{3x} + x + a\right) y' = 0.$$

   (a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Differentialgleichung exakt?

   (b) Bestimmen Sie für $a = 1$ ein erstes Integral.

4. Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f_X, gegeben durch die Skizze



   (a) Zeigen Sie, dass f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion darstellt.

   (b) Bestimmen Sie die zu f_X gehörige Verteilungsfunktion F_X und skizzieren Sie diese.

   (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable X.

   (d) Gegeben seien die Ereignisse $A = \{0 \le X \le \frac{2}{3}\}$ und $B = \{\frac{2}{9} \le X \le 2\}$. Berechnen Sie $P(B)$ und $P(A|B)$.